ANIMADVERSIONES IN SOLVTIONEM BERNOVLLIANAM DE MOTV CHORDARVM EX DVABVS PARTIBVS DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM. TOM. XVI. NOV. COMMENT.

Auctore

L. EVLERO.

Quum haec solutio plurimum diffentiat ab illa, quam iam olim de eodem argumento dederam, atque adeo a methodo mea huiusmodi quaestiones tractandi maxime discrepet, Illustris Auctor veritatis amore ductus, non aegre feret, si omnia momenta, quibus eius solutio innititur, ad examen reuocauero, quoniam enim huiusmodi quaestiones plane nouae Analyseos genus, cui Geometrae adhuc parum sunt assueti, postulant; mirum sane non est, si in solutionibus etiamnum ingens discrimen deprehenditur.

I. Principio Illustris Auctor innuere videtur, in chordas inter vibrandum alias figuras cadere non posse, nisi quae ad genus lineae sinuum referantur, quum tamen etiam aliae figurae quaecunque locum habere

habere queant, siquidem totus chordae motus a figura, quae ipsi initio fuerit impressa, pendet, haec figura autem plane arbitrio nostro relinquitur, interim tamen facile concedo, talem figuram chordae ex duabus partibus inaequalibus compositae conuenire posse, quemadmodum autem motus deinceps futurus sit comparatus, Illustris Auctor singulari plane ratione inuestigauit loco citato, quam meo equidem more hic ob oculos sum expositurus.

II. Sit igitur chorda A B C, ex duabus partibus inaequalibus A B et B C conflata, atque in terminis A et C fixa, ponamus longitudines vtriusque partis $AB = a$ et $BC = b$, massam autem illius portionis $= A$, huius vero $= B$, ipsa autem chordae tensio sit $= F$, tum vero statuatur breuitatis gratia Tab. VI. Fig. 1.

$$\frac{2abF}{A} = \alpha\alpha \text{ et } \frac{2bbF}{B} = \beta\beta,$$

vbi littera b indicat altitudinem, vnde grauia delabuntur tempore minuti secundi, vt scilicet hoc modo tempora in minutis secundis exprimi queant.

III. Inter vibrandum autem elapso tempore $= t$ sec. induerit chorda figuram A F C, quae quidem in genere linearum sinuum contineatur. Sumta iam in parte A B abscissa $= AX = x$, cui respondeat applicata $XY = y$, pro portione autem altera, notetur abscissa $BX = x'$, et applicata $X'Y' = y'$, tum vero principia motus sequentes suppeditant aequationes. Pro priore quidem parte A B habetur:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

similique modo pro parte DC

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae formulae vtique omnes motus possibiles, qui quidem in hanc chordam cadere possunt, in se complectuntur. His expositis, Illustris Auctor, pro curua AF, hanc constituit aequationem

$$y = m \text{ sin. } \theta t \text{ sin. } \frac{\theta x}{\alpha},$$

pro altera vero FB istam:

$$y' = n \text{ sin. } \theta t \text{ sin. } \theta\left(f + \frac{x'}{\beta}\right),$$

in quas formulas simul ipsum tempus elapsum introduxi, quo facilius deinceps tempus cuiusque vibrationis cognosci possit. Nunc statim perspicuum est, in his duabus formulis tres quantitates indefinitas contineri, litteras scilicet θ et f vna cum ratione inter coefficientes m et n, quibus ergo tribus conditionibus satisfieri posse videtur.

IV. Sequentibus autem tribus conditionibus Illustris Auctor satisfieri oportere statuit. 1°. Scilicet in ipsa iunctura B vbi $x = a$ et $x' = 0$, vtraque applicata y conuenire debet, vnde oritur ista aequalitas

$$m \text{ sin. } \frac{\theta a}{\alpha} = n \text{ sin. } \theta f.$$

Deinde quia chorda in puncto C fixa ponitur, facto $x' = b$, semper esse oportet

$$\text{sin. } \theta\left(f + \frac{b}{\beta}\right) = 0,$$

vnde

vnde iam duae quantitatum illarum indeterminatarum determinantur. Tertiam autem determinationem inde petit, quod ambabus partibus in ipsa iunctura F communem tribuit tangentem, vnde vtique sequitur esse debere

$$\frac{m}{\alpha} \operatorname{cos.} \frac{\theta a}{\alpha} = \frac{n}{\beta} \operatorname{cos.} \theta f,$$

hocque modo ternae illae quantitates indefinitae egregie determinari videntur.

V. Quod autem ad hanc postremam conditionem attinet, equidem nullam rationem perspicio, cur in puncto F, vbi ambae chordae partes iunguntur, vtraque tangens absolute congruere debeat, praecipue quum hic tantum de vibrationibus infinite paruis agatur, ideoque nulla sensibilis diuersitas in inclinatione elementorum locum habere possit. Statim equidem suspicatus eram hoc ideo ab Auctore requiri, vt accelerationes prope iuncturam F vtrinque ad aequalitatem redigerentur. Verumtamen ne haec quidem conditio hoc pacto adimpletur, nam vis acceleratrix in hoc loco ex parte priore est

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\frac{m}{\alpha\,\alpha} \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{\alpha},$$

ex posteriore autem fit

$$= -\frac{n}{\beta\,\beta} \operatorname{sin.} \theta f,$$

quae duae expressiones nunquam aequales esse possunt, quamdiu litterae α et β discrepant, quum prima conditio iam postulauerit

$$m \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{\alpha} = n \operatorname{sin.} \theta f.$$

VI. Non ſolum autem haec conditio mihi non neceſſaria videtur, ſed etiam mox oſtendam, eam plane eſſe ſuperfluam et plerumque indoli quaeſtionis aduerſantem. Hic ſaltem extra dubium poſitum videtur, omiſſa hac conditione problema adhuc indeterminatum relictum iri, et litteram θ nondum determinari, et quaſi arbitrio noſtro permitti. Ab hac littera autem pendet tempus cuiusque vibrationis, quod autem experientia teſte nequaquam indeterminatum eſſe poteſt, etiamſi in iunctura F inaequalis inclinatio admitteretur.

VII. Poſtquam autem has rationes diu multumque mecum perpendiſſam, tandem vitium aliquod in eo latere deprehendi, quod ambo coefficientes m et n inter ſe quaſi inaequales ſpectantur, quorum tamen aequalitatem rei naturam poſtulare ita manifeſtum reddetur: Vt in ipſa iunctura F omnis ſaltus et continui interruptio euitetur, non ſufficit, vt pro axis puncto B vna eademque applicata y vtrinque reſultet, ſed etiam ipſi anguli, quorum ſinus in ſuperiores aequationes ingrediuntur, ordine non interrupto progredi debent, ita vt in ipſo puncto B ambo illi arcus, $\frac{\theta a}{\alpha}$ ex priori parte, et θf ex poſteriori aequales fieri debeant, vnde ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, haecque adeo conditio potior videtur, quam altera, vbi ipſi ſinus horum arcuum ſpectantur. Sumto autem $f = \frac{a}{\alpha}$ valores illi ipſius y aequales inter ſe fieri nequeunt, niſi ſtatuatur $n = m$. Statim autem ac ſtatuamus $m = n$, quia iam nacti

ſumus

ſumus $f = \frac{a}{\alpha}$, ſola ſupereſt quantitas indefinita θ, inde vtique determinanda, vt punctum C maneat fixum, ex quo manifeſtum eſt, circa inclinationem illam elementorum in puncto F nihil prorſus arbitrio noſtro relinqui.

VIII. Hac circumſtantia autem probe obſeruata, etiam ſuperiores formulae Bernoullianae egregie cum mea ſolutione conſpirabunt. Poſito enim

$$n = m \text{ et } f = \frac{a}{\alpha},$$

ſumendo $x' = b$ in ipſo termino C applicata oritur

$$y' = m \text{ fin. } \theta \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right),$$

quae vt ſemper fiat o, arcus, cuius ſinus hic occurrit, vel o, vel 180, vel 360° eſſe debet, ponamus igitur

$$\theta \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) = \pi,$$

ſiue angulo 180°, ſicque iam littera θ determinatur, vnde ſponte tempus vnius vibrationis ſe prodit, quum enim omnes applicatae initio vbi $t = 0$, fuerint o, idemque denuo vſu veniat ſi $\theta t = \pi$, tempus vnius vibrationis hinc manifeſto fit $\pi = \theta t$, quod conſequenter erit $= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$ idque in ipſis minutis ſecundis expreſſum, iamque ergo euidens eſt, tempus vibrationis nullo modo ab angulo illo infinite paruo, quo elementa circa iuncturam F forte ad ſe inuicem inclinantur, pendere, prorſus vti ipſa experientia manifeſto declarat, id quod etiam plane cum mea Theoria congruit.

IX.

IX. Neque vero hoc tempus vnius vibrationis ad figuram illam, qua chorda ſecundum lineam ſinuum incuruatur, eſt adſtrictum, ſed quaecunque alia figura eidem chordae initio fuerit impreſſa, eodem ſemper tempore eius vibrationes abſoluentur, niſi forte ob ſingulares circumſtantias eueniat, vt motus vibratorius vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. crebrior reddatur, id quod ſequenti modo facile oſtendo. Priori formulae

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = \alpha\,\alpha\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

qua motus prioris partis exprimitur, in genere ſatisfacit hoc integrale completum:

$$y = \Phi : \left(t + \frac{x}{\alpha}\right) - \Psi : \left(t - \frac{x}{\alpha}\right),$$

vbi Φ et Ψ functiones quascunque ſubiunctarum quantitatum $t + \frac{x}{\alpha}$ et $t - \frac{x}{\alpha}$ deſignare poſſunt, quod non ſolum de functionibus vere analyticis, quas ſcilicet per formulas analyticas exprimere licet, eſt intelligendum; ſed etiam in genere valet pro functionibus discontinuis, ſeu quae per curuas quascunque libero manus tractu delineatas repraeſentari posſunt, ita vt formula $\Phi : (t + \frac{x}{\alpha})$ denotet applicatam cuiuscunque curuae, abſciſſae $t + \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem, ſimilique modo altera formula $\Psi : (t - \frac{x}{\alpha})$, ſiue eiusdem ſiue alius cuiuscunque lineae curuae applicatam, abſciſſae $t - \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem.

X. Haec ſumma vniuerſalitas probe eſt notanda, quum ea demum indoles quaeſtionis exhauriatur,

riatur, quandoquidem chordae initio figura quaecunque penitus ab arbitrio nostro pendens induci queat, cuius etiam naturam nulla analytica aequatione comprehendere liceat, neque etiam quod saepius contra methodum meam fuit obiectum, necesse est, vt curuae illae characteribus Φ et ψ designatae aequabili quasi tractu procedant, sed etiam aeque satisfaciunt, quamuis ex pluribus lineis rectis, vel portionibus aliarum curuarum, vtcunque inter se et sub angulis quibuscunque fuerint conflatae, dummodo scilicet applicatae y inde formatae euadant quam minimae, id quod facile obtinetur, functiones illas Φ et ψ per fractionem quasi infinite paruam i multiplicando. Quod autem huiusmodi anguli in istis curvis Φ et ψ, nullam moram facessant, vel ex hoc solo casu liquebit, quando in his curuis adeo cuspis occurrat. Si enim pro functione Φ abscissa $t + \frac{x}{\alpha}$ ponatur $= u$, si fuerit

$$\Phi : u = \sqrt[3]{c\,(c-u)^2},$$

haec curua vtique pro abscissa $u = c$ habebit cuspidem parabolae cubicalis Neilianae, interim tamen haec ipsa formula etiamnunc aequationi differentiali perfecte satisfacit; quum enim ob $u = t + \frac{x}{\alpha}$ fit $\frac{du}{dt} = 1$, et $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha}$, posito

$$y = \Phi : u = \sqrt[3]{c\,(c-u)^2},$$

per differentiationem nanciscimur, sumta sola t variabili:

 $(\frac{dy}{dt})$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\tfrac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(c-u)^4}}$$

tum vero ſumta ſola x variabili reperitur

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2}{3\alpha}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{c}}{q\alpha\sqrt[3]{(c-u)^4}},$$

ſicque manifeſto eſt

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

neque cuſpis illa infinite acuta vllum adfert impedimentum, multo minus ergo eiusmodi anguli, quales in his curuis Φ et ψ admittimus, vllo modo ſucceſſum noſtri calculi turbabunt.

XI. Eodem autem modo pro altera chordae parte B C, cuius motus hac aequatione continetur

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

in genere ſatisfiet hoc integrali completo:

$$y' = \Phi : \left(t + f + \frac{x'}{\beta}\right) - \psi : \left(t - f - \frac{x'}{\beta}\right)$$

vbi characteres Φ et ψ iterum functiones quascunque denotare poſſunt, ſiue easdem vt ante, ſiue etiam diuerſas, id quod ſtatim clarius exponemus. Quum pro vtraque parte chordae applicatae y per binas functiones Φ et ψ exprimantur; ante omnia probe obſeruaſſe iuuabit, vtrasque iſtas functiones ſeorſim aequationi differentio-differentiali conuenire. Ideo enim huiusmodi functiones ſunt introductae, vt integrale completum obtineremus, deinde vero manifeſtum eſt, priorem formulam pro parte A B, tantum

tantum valere a termino $x = o$, vsque ad terminum $x = a$, ſimilique modo altera formula pro parte B C valebit a termino $x' = o$ vsque ad $x' = b$.

XII. Quum iam curuae illae functionibus Φ et ψ expreſſae continuo quodam tractu ſine vlla interruptione progredi debeant, hoc aeque de abſciſſis quam de applicatis vtriusque eſt intelligendum, poſito ergo pro ipſo puncto B in priori formula $x = a$, in altera vero $x' = o$, vtrinque eadem abſciſſa in illis functionibus reperiri debet; ex quo ſtatim ſequitur

$$t + \tfrac{a}{\alpha} = t + f,$$

ideoque $f = \frac{a}{\alpha}$, deinde vt etiam pro puncto B eadem applicata B F obtineatur, debet eſſe

$$\Phi : (t + \tfrac{a}{\alpha}) = \Phi : (t + f)$$

ſicque ob $\frac{a}{\alpha}$ manifeſto poſterior functio Φ cum priori debet conuenire, quod etiam de functionibus ψ eſt intelligendum.

XIII. His igitur expeditis pro motu portionis A B, habemus hanc aequationem:

$$y = \Phi : (t + \tfrac{x}{\alpha}) - \psi : (t - \tfrac{x}{\alpha})$$

quae valet ab $x = o$ vsque ad $\frac{x}{a}$; pro altera autem portione B C habemus:

$$y' = \Phi : (t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{x'}{\beta}) - \psi : (t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{x'}{\beta})$$

quae valet ab $x' = o$, vsque $x' = b$, atque hoc quidem modo indoli quaeſtionis reſpectu iuncturae in

 puncto

puncto B est satisfactum. Nunc igitur efficiendum est, vt in ipso termino A vbi $x = o$, applicata y semper euanescat, quod vtique euenit, si functio ψ prorsus conueniat cum functione ϕ, siue binae lineae illae curuae his functionibus repraesentatae in vnicam coalescere debeant, siquidem fieri debeat

$$\phi : t - \psi : t = o.$$

Superest igitur, vt in altero termino B, vbi $x' = b$ etiam applicata y' perpetuo ad nihilum redigatur, ad quod ob $\psi = \phi$ requiritur, vt sit

$$\phi : (t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta}) - \phi : (t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta}) = o,$$

quod quidem non tam facile effici posse videtur, at posito

$$t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta} = v,$$

hinc ista conditio exoritur, vt fit

$$\phi : (v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta}) = \phi : v,$$

vnde intelligimus curuam illam, qua functio ϕ repraesentatur, ita esse debere comparatam, vt quae applicata conuenit abscissae cuicunque v, eadem quoque abscissae

$$v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta} \text{ itemque } v + \tfrac{4a}{\alpha} + \tfrac{4b}{\beta}$$

et in genere abscissae

$$v + 2i(\tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta})$$

conueniat, denotante i numerum integrum quemcunque. Quamcunque ergo formam habuerit ista curua, ea in infinitum producta infinitis portionibus aequalibus et similibus composita existet, interualteruallo ſingularum harum portionum aequalium exiſtente

$$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta}.$$

XIV. Hoc iam modo omnibus conditionibus, quas natura quaeſtionis poſtulat, pleniſſime eſt ſatisfactum, atque nunc facillimum erit tempus cuiusque vibrationis aſſignare, quum enim initio fuerit $t = 0$, euidens eſt, elapſo tempore

$$t = \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta},$$

chordae eandem iterum figuram induci debere ſiue chordam ad ipſum ſtatum initialem reduci. Interea autem chorda cenſeri ſolet peregiſſe duas vibrationes, ſicque adeo tempus vnius vibrationis plane idem erit, quod iam ſupra indicauimus, ſcilicet

$$t = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}.$$

Denique manifeſtum eſt, hanc ſolutionem generaliſſimam ad omnes plane ſtatus, qui chordae initio induci poſſunt, patere, prorſus vti ipſa natura quaeſtionis poſtulat, quod autem ſupra memorauimus ad hanc quaeſtionem ſoluendam nouo Analyſeos genere opus eſſe, in eo eſt ſitum, quod noſtra ſolutio complectitur functiones plane arbitrarias, cuiusmodi olim naturae Analyſeos repugnare ſunt viſae.