

DE MOTV
VIBRATORIO CHORDARVM
CRASSITIE VTCVNQVE VARIABILI
PRAEDITARVM.

Auctore

L. E V L E R O.

I.

Tab. VI. **S**it huiusmodi chorda in terminis A et B fixa et
Fig. 4. tensa a vi seu pondere K, ponatur eius longitu-
do $AB = a$ et abscissa portione quacunqve $AX = x$,
crassities in x ita sit comparata, vt si haberetur
chorda vniformis eiusdem crassitiei, cuius longitudo
 $= k$, eius pondus futurum esset $= X$ denotante X
functionem quamcunqve ipsius x , quippe qua ratio
crassitiei variabilis continetur, hinc ergo elementi
chordae dx massula seu pondusculum erit $= \frac{x dx}{k}$,
ideoqve pondus portionis $AX = \int X dx$ in quò
integrali si fiat $x = a$, prodibit pondus totius chor-
dae AB.

II. Ponamus nunc elapso t min. sec. punctum
chordae X peruenisse in Y, vbi quidem serper af-
sumimus hoc interuallum $XY = y$ esse quasi infi-
nite paruum, ita vt omnes rangentes in his punctis
Y infinite parum ab axe declinent, ac pro puncto
Y haec declinatio aequetur angulo minimo $= u$.
Haec

Haec igitur applicata $X Y = y$ erit functio binarum variabilium t et x , unde celeritas puncti Y a X digredientis erit $(\frac{dy}{dt})$ eiusque incrementum seu acceleratio $= \frac{1}{2b} (\frac{d^2y}{dt^2})$, denotante b altitudinem lapsus pro vno minuto secundo, quae ducta in massam elementi dx dabit ipsam vim, qua elementum in Y secundum directionem $X Y$ sollicitatur $= \frac{x dx}{2bk} (\frac{d^2y}{dt^2})$ quia enim excursiones sunt infinite parvae, punctum y aliter moveri nequit nisi in directione $X Y$.

III. Nunc igitur etiam vires, quibus punctum y reue a sollicitatur, expendi oportet, quae aliae non sunt nisi tensiones, quibus punctum Y cum versus A , tum in plagam oppositam versus B urgetur; sit igitur Θ tensio punctum Y versus A trahens, hincque oriatur vis in directione

$$\text{abscissae } X A = \Theta \cos. \omega$$

at in directione

$$\text{applicatae } Y X = \Theta \sin. \omega;$$

at pro elemento sequente, quum sit eius inclinatio ad axem $= \omega + d\omega$ et tensio $= \Theta + d\Theta$; hinc nascetur vis

$$\text{secundum } X B = (\Theta + d\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$$

et vis

$$\text{in directione } X Y = (\Theta + d\Theta) \sin. (\omega + d\omega).$$

Iam vero vires in directione axis agentes se mutuo destruere debent, quia alioquin punctum Y non secundum applicatam moueretur, necesse igitur est, fiat

$$\Theta \cos. \omega = (\Theta + d\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$$

Tom. XVII. Nou. Comm.

I i i

ideoque

ideoque

$$d \Theta \cos. \omega - \Theta d \omega \sin. \omega = 0,$$

ideoque

$$d \Theta = \Theta d \omega \frac{\sin. \omega}{\cos. \omega},$$

quia autem angulus ω est infinite paruus, vtique hinc sequitur $d \Theta = 0$, ita vt tensio Θ sit constans seu per totam cordae longitudinem eadem; quare quum in termino A tensio manifesto aequetur ponderi K, quo chorda tenditur, erit vtique $\Theta = K$.

IV. Contemplemur nunc vires in directione X Y agentes, et quia ob

$$\sin. \omega = \left(\frac{d y}{d x} \right) \text{ prior vis in directione Y X est } K \left(\frac{d y}{d x} \right)$$

altera autem huic contraria ipso sui differentiali augetur eritque idcirco

$$= K \left(\frac{d y}{d x} \right) + K \left(\frac{d d y}{d x^2} \right)$$

sicque punctum Y reuera in directione X Y sollicitabitur

$$vi = K d x \left(\frac{d d y}{d x^2} \right)$$

quae ergo necessario aequalis esse debet vi illi acceleratrici supra inuentae, vnde exoritur ista aequatio:

$$\frac{x d x}{z b k} \left(\frac{d d y}{d x^2} \right) = K d x \left(\frac{d d y}{d x^2} \right);$$

quae per $K d x$ diuisa producit hanc aequationem finalem:

$$\frac{x}{z b k K} \left(\frac{d d y}{d x^2} \right) = \left(\frac{d d y}{d x^2} \right).$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\frac{K}{z b k K} = w,$$

quae

quae ergo littera designat functionem ipsius x , a tempore t immunem, ita vt habeamus

$$w \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right),$$

quam autem aequationem adhuc nullo modo in genere resolvere licuit, interim tamen per seriem infinitam eius integrale adeo completum exhiberi potest. Denotante enim Θ functionem quamcunque temporis t , litteris vero P, Q, R, S etc. functiones tantum alterius variabilis x ; fingatur

$$y = P \Theta + Q \left(\frac{d^2 \Theta}{dt^2} \right) + R \left(\frac{d^4 \Theta}{dt^4} \right) + S \left(\frac{d^6 \Theta}{dt^6} \right) \text{ etc.}$$

et habebimus

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = P \left(\frac{d^2 \Theta}{dt^2} \right) + Q \left(\frac{d^4 \Theta}{dt^4} \right) + R \left(\frac{d^6 \Theta}{dt^6} \right) + S \left(\frac{d^8 \Theta}{dt^8} \right)$$

$$\text{et } \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \Theta \left(\frac{d^2 P}{dx^2} \right) + \left(\frac{d^2 \Theta}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + \left(\frac{d^4 \Theta}{dx^4} \right) \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \right) \text{ etc.}$$

quae series vt praecedenti in w ductae aequetur, consequimur has determinationes:

$$\text{I}^\circ. \left(\frac{d^2 P}{dx^2} \right) = 0 \text{ ideoque } P = \alpha x + \beta$$

$$\text{II}^\circ. \left(\frac{d^2 Q}{dx^2} \right) = w P; \text{ siue } Q = \int dx \int w P dx$$

$$\text{III}^\circ. \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \right) = w Q; \text{ siue } R = \int dx \int w Q dx$$

$$\text{IV}^\circ. \left(\frac{d^2 S}{dx^2} \right) = w R; \text{ siue } S = \int dx \int w R dx \text{ etc.}$$

Verum hinc parum lucri impetramus, atque hanc ob rem conueniet casus aliquot particulares euoluere, id quod in Problematibus sequentibus expediemus.

Problema I.

Inuenire casus, quibus aequationi differentiali inventae:

$$w \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right),$$

Iii 2

fatis-

satisfacit haec forma integralis :

$$y = p \Phi(t + f z dx),$$

vbi p, z sint functiones tantum ipsius x .

Solutio.

V. Character Φ hic denotat functionem quamcunque quantitatis suffixae $t + f z dx$, nequidem functionibus discontinuis exceptis, cuius differentialia more solito, per Φ', Φ'', Φ''' etc. designabimus, ex hac autem forma statim colligimus :

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = p \Phi''(t + f z dx), \text{ tum vero reperimus}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right) \Phi(t + f z dx) + p z \Phi'(t + f z dx), \text{ hincque}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^2 p}{dx^2} \Phi(t + f z dx) + \frac{z z dp + p dz}{dx} \Phi'(t + f z dx) + p z z \cdot \Phi''(t + f z dx),$$

cui illa forma in w ducta aequari debet, vnde sequitur :

$$\text{I}^\circ. \frac{d^2 p}{dx^2} = 0; \text{ ideoque } p = \alpha x + \beta$$

$$\text{II}^\circ. z z dp + p dz = 0; \text{ siue } z p^2 = C \text{ ideoque } z = \frac{C}{p^2} = \frac{C}{(\alpha x + \beta)^2}$$

$$\text{III}^\circ. \text{ tandem esse debet } w = z z = \frac{C^2}{(\alpha x + \beta)^4}.$$

Consequenter si crassities chordae ita fuerit comparata, vt fiat

$$w = \frac{x}{z b k K} = \frac{C C}{(\alpha x + \beta)^4},$$

tum motum chordae actu definire licebit.

Euolutio casus quo crassities chordae ita variatur, vt fiat :

$$\frac{x}{z b k K} = \frac{C C}{(\alpha x + \beta)^4}.$$

VI.

VI. In hac expressione litterae c , et f perinde ac b, k et x denotant quantitates lineares, dum litterae t, n aequae ac pondera K, X in meris numeris dantur, ita ut conditio praescripta homogeneitate gaudeat. Hac forma cum supra inuenta collata erit primo $C = c$; $\alpha = w$; et $\beta = f$ ideoque

$$p = nx + f \text{ et } z = \frac{c}{(nx + f)^2}$$

hincque

$$\int z dx = \int \frac{c dx}{(nx + f)^2} = \frac{c}{n} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{nx + f} \right) = \frac{cx}{f(nx + f)}$$

Quum igitur pro eadem chorda, cuius crassitiam quadratum cc inuoluit, loco c etiam $-c$ scribere liceat; haec quoque forma integralis locum habebit:

$$y = (nx + f) \psi \left(t - \frac{cx}{f(nx + f)} \right),$$

quocirca introducendo binas functiones arbitrarias Φ et Ψ nanciscimur verum integrale completum pro nostro casu, scilicet:

$$y = (nx + f) \Phi \left(t + \frac{cx}{f(nx + f)} \right) + (nx + f) \Psi \left(t - \frac{cx}{f(nx + f)} \right).$$

VII. Nihil igitur aliud superest, nisi ut hoc integrale completum ad statum nostrae quaestionis adcommodemus. Ac primo quidem quum posito $x = 0$, esse debeat $y = 0$; euidens est, functionem Ψ alteri Φ sub signo contrario aequari debere, ita ut iam habeamus

$$y = (nx + f) \Phi \left(t + \frac{cx}{f(nx + f)} \right) - (nx + f) \Phi \left(t - \frac{cx}{f(nx + f)} \right).$$

Quo igitur etiam in altero termino sumto $x = a$ denuo fiat $y = 0$, necesse est ut fit

$$\Phi \left(t + \frac{ca}{f(na + f)} \right) = \Phi \left(t - \frac{ca}{f(na + f)} \right),$$

vnde intelligimus, functionem Φ siue lineam curuam hac functione designatam ita comparatam esse debere, vt dum abscissae interuallo $= \frac{2ca}{f(na+f)}$ augentur, applicatae continuo eadem recurrant, quemadmodum hanc conditionem in Differtatione superiori de chordis vniformibus fufe explicauimus. Hinc porro sequitur, quum initio fuisset $t = 0$; elapso tempore $t = \frac{2ca}{f(na+f)}$ min. sec., chordam perfecte in pristinum statum restitui, duplici vibratione peracta, ita vt tempus vnus vibrationis futurum sit $= \frac{ca}{f(na+f)}$ sec. siue quod eodem redit haec chorda singulis minutis secundis $\frac{f(na+f)}{ca}$ absoluet vibrationes. Hocque adeo casu coniectura, quam in superiore differtatione inuimus, egregie confirmatur, quod enim hic vocauimus X, ibi erat V, tempus vibrationis autem asseruimus ibi esse $= \int \frac{dx \sqrt{V}}{\sqrt{2bk.K}}$, dum integrale per totam chordae longitudinem $x = a$ extenditur, hic autem tempus vibrationis prodiit $= \int z dx$, integrali etiam per totam chordae longitudinem extenso existente

$$z = \sqrt{w} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2bk.K}},$$

quae est prorsus eadem forma.

Problema II.

Inuenire casus, quibus aequationi nostrae differentiali talis satisfacit forma integralis:

$$y = p \Phi(t + \int z dx) + q \Phi'(t + \int z dx).$$

Solutio.

Solutio.

VIII. Evolutione huius formae facta, reperiemus ut sequitur :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) &= \left| \begin{array}{c} \Phi(t+fx dx) \\ + \frac{d^2 p}{dx^2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \Phi'(t+fx dx) \\ + \frac{2z dp + p dz}{dx} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \Phi''(t+fx dx) \\ + \frac{pz z}{dx} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \Phi'''(t+fx dx) \\ + q z z \end{array} \right| \\ w \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) &= \left| \begin{array}{c} \\ + \frac{d^2 q}{dx^2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \\ + \frac{2z dq + q dz}{dx} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} pz z \\ + \frac{pz z}{dx} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \\ + q w \end{array} \right| \end{aligned}$$

quocirca sequentes conditiones adimpleri oportet

I°. $\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$; siue $p = \alpha x + \beta$;

II°. $2z dp + p dz + \frac{d^2 q}{dx^2} = 0$; siue $\frac{d^2 q}{dx^2} = -(2z dp + p dz)$

III°. $\frac{2z dq + q dz}{dx} + pz z = p w$;

IV°. $q z z = q w$, ideoque $z z = w$.

Qui postremus valor $w = z z$ in penultima substitutus praebet

$$2z dq + q dz = 0,$$

quae in q ducta et integrata praebet $z q q = C$.

Hinc igitur habemus

$$z = \frac{C}{q} \text{ et } dz = -\frac{z C dq}{q^2},$$

vnde nostra secunda aequatio fit

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{2C dp}{q^2} - \frac{2C p dq}{q^3} = 0:$$

verum ob

$$p = \alpha x + \beta \text{ erit } dx = \frac{dp}{\alpha};$$

et per $2C$ diuidendo fiet

$$\frac{z d^2 q}{2C dp} + \frac{q dp - p dq}{q^3} = 0,$$

vbi elementum dp sumtum est constans. Verum secunda aequatio sponte fit integrabilis multiplicata per p , quum enim sit $dp = \frac{dx}{\alpha}$, ea transformatur in hanc :

$$\frac{\alpha p d d q}{d p} + 2 z p d p + p p d z = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{\alpha(p d q - q d p)}{d p} + 2 z p p = D.$$

Modo ante autem habebamus $z = \frac{c}{q q}$, ita vt nunc habeamus

$$\frac{\alpha(p d q - q d p)}{d p} + \frac{c p p}{q q} = D$$

quae posito $q = u p$ abit in hanc :

$$\alpha p p d u + \frac{c d p}{u u} = D d p$$

vnde colligitur

$$\frac{d p}{p p} = \frac{\alpha u u d u}{D u u - c} = \frac{1}{D} d u + \frac{\alpha c}{D} \cdot \frac{d u}{D u u - c}$$

vnde u per p vel vicissim facile definitur. Quo invento erit

$$q = p u \text{ et } z = \frac{c}{q q} \text{ et } w = z z = \frac{c c}{q^4}.$$

IX. Quia autem hinc quantitas u non per p , sed vicissim p per u definitur, excepto solo casu $D = 0$, quandoquidem quantitatem C nihilo aequare non licet; casus $D = 0$ vtique singularem evolutionem meretur, pro quo statim habemus

$$-\frac{\alpha u u d u}{c} = \frac{d p}{p p},$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{p} + E = \frac{\alpha u^2}{2c}$$

ideo-

ideoque

$$u = \sqrt[5]{\frac{c}{\alpha p} (1 + E p)}; \text{ hincque porro}$$

$$q = p \sqrt[5]{\frac{c}{\alpha p} (1 + E p)} = \sqrt[5]{\frac{c p p}{\alpha} (1 + E p)}$$

$$z = \frac{C}{p p \sqrt[5]{\frac{q C C}{\alpha^2 p^2} (1 + E p)^2}} = \frac{C}{p \sqrt[5]{\frac{q C C p}{\alpha \alpha} (1 + E p)^2}} = \frac{\sqrt[5]{\frac{\alpha \alpha C}{q}}}{p \sqrt[5]{p (1 + E p)^2}}$$

$$w = \frac{C C}{p p \sqrt[5]{\frac{c^2 p p}{\alpha} (1 + E p)^4}} = \frac{C C}{\frac{c}{\alpha} p p (1 + E p) \sqrt[5]{\frac{c p p}{\alpha} (1 + E p)}} \\ = \frac{\sqrt[5]{\alpha^4 C C}}{\sqrt[5]{81. p^3 (1 + E p)^4}}$$

Hinc autem consequitur formula integralis

$$\int z dx = - \sqrt[5]{\frac{c (1 + E p)}{\alpha p}}$$

X. Quo has formulas concinniores reddamus et simul homogeneitati consulamus, statuamus

$$p = n x + f; \text{ vt sit } \alpha = n,$$

tum vero sumamus

$$C = \frac{c}{g} \text{ et } 1 + E p = \frac{n x + f + g}{g}$$

et habebimus

$$\int z dx = - \sqrt[5]{\frac{c (n x + f + g)}{g (n x + f)}}$$

hinc

$$z = \frac{\sqrt[5]{n n g g c}}{3 \sqrt[5]{(n x + f)^2 (n x + f + g)^2}}; w = \frac{\sqrt[5]{n^4 g^4 c c}}{9 \sqrt[5]{(n x + f)^3 (n x + f + g)^3}}$$

ac denique

$$q = \sqrt[3]{\frac{c(n x + f)^2 (n x + f + g)}{n g}}$$

Caeterum quia integrale $\int z dx$ ita capi conuenit, ut euanescat posito $x = 0$, hoc obseruato erit

$$\int z dx = \sqrt[3]{\frac{c(f+g)}{nfg}} - \sqrt[3]{\frac{c(n x + f + g)}{n g (n x + f)}}$$

XI. Quoniam $w = z z$, patet, pro eodem valore ipsius w litteram z tam positue, quam negatiue accipi posse, at si eam negatiue capiamus, quod fit, dum loco c scribimus $-c$, etiam littera q valorem sortitur negatiuum, vnde pro eadem aequatione differentiali etiam sequens forma integralis valebit

$$y = p \psi(t - \int z dx) - q \psi'(t - \int z dx)$$

quae forma si ad ante inuentam addatur, habebitur integrale completum nostrae aequationis, quippe quod erit

$$y = p \Phi(t + \int z dx) + p \psi(t - \int z dx) + q \Phi'(t + \int z dx) - q \psi'(t - \int z dx).$$

Haec autem forma difficulter ad motum chordarum adcommodari potest, quandoquidem etiam si sumamus $\psi = -\Phi$ pro casu $x = 0$, non fit $y = 0$, multo minus pro casu $x = a$ quaestioni satisfieri poterit.

Problema III.

Proposita aequatione differentiali secundi gradus:

$$z z \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2;$$

vbi

vbi z denotet quamcunque functionem ipsius x tantum; eius integrale per huiusmodi seriem infinitam exprimere:

$$y = p\Phi(t + fz dx) + q\Phi'(t + fz dx) + r\Phi''(t + fz dx) + s\Phi'''(t + fz dx) \text{ etc.}$$

Solutio.

XII. Si singuli isti termini per differentiationem, vt ante, euoluantur, vbi iam vidimus esse $w = z z$, sequentes conditiones erunt adimplendae:

$$\text{I. } d d p = 0; \text{ II. } \frac{d d q}{d x} + 2 z d p + p d z = 0$$

$$\text{III. } \frac{d d r}{d x} + 2 z d q + q d z = 0; \text{ IV. } \frac{d d s}{d x} + 2 z d r + r d z = 0 \text{ etc.}$$

Ex prima statim colligitur $p = n x + f$, secunda ad hanc formam reducta

$$\frac{d d q}{d x} + \frac{1}{p} d. p p z = 0,$$

statim praebet

$$\frac{d q}{d x} = - \int \frac{1}{p} d. p p z \text{ ideoque } q = - \int d x \int \frac{1}{p} d. p p z,$$

quemadmodum autem hic q exprimitur per z et p , ita quoque r exprimetur per z et q ita, vt fit

$$r = - \int d x \int \frac{1}{q} d. q q z,$$

eodemque modo porro

$$s = - \int d x \int \frac{1}{r} d. r r z \text{ etc.}$$

Alia Solutio.

Solutio adhuc concinnior reddi potest, sumendo $z = \frac{1}{2} v v$, vt aequatio proposita fit

$$\frac{1}{2} v^4 \left(\frac{d d y}{d t^2} \right) = \left(\frac{d d y}{d x^2} \right),$$

K k k 2

tum

tum enim manente $p = nx + f$, secunda conditio hanc induet formam

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} q + v v dp + p v dv = 0; \text{ siue}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} q = -v (v dp + p dv) = -v d.pv,$$

vnde fit

$$q = -\int dx f v. d.pv,$$

eodemque modo reperitur

$$r = -\int dx f v d.qv \text{ et } s = -\int dx f v d.rv \text{ etc.}$$

XIII. Haec ergo forma in infinitum est continuanda, nisi forte eueniat, vt quaequam litterarum q, r, s etc. euanescat tum enim totum integrale forma finita exprimetur; et quia pro eodem valore $z z = \frac{1}{4} v^2$, quantitatem z siue uu etiam negative sumere licet, gemina huiusmodi forma obtinebitur, quae coniunctim integrale completum referet, id quod casibus, quibus omnes hae quantitates euadunt simplices potestates ipsius x , clarius elucebit. Quodsi autem sumto $v = \alpha x^\lambda$ quaecunque litterarum p, q, r, s etc. fuerit $= A x^n$, sequens erit

$$-\frac{A \alpha^2 (n + \lambda)}{(n + 2\lambda)(n + 2\lambda + 1)} x^{n + 2\lambda + 1}.$$

Quam ob rem quum pro his casibus fit vel $p = 1$, vel $p = x$, sequentes valores sequenti modo se habebunt:

Pro primo casu, quo $p = 1$, habebimus

$$q = -\frac{\alpha \alpha \lambda}{2\lambda(2\lambda + 1)} x^{2\lambda + 1}; r = +\frac{\alpha^2 \lambda(3\lambda + 1)}{2\lambda(2\lambda + 1)(4\lambda + 1)(4\lambda + 2)} x^{4\lambda + 2}$$

$$s = -\frac{\alpha^3 \lambda(3\lambda + 1)(5\lambda + 2)}{2\lambda(2\lambda + 1)(4\lambda + 1)(4\lambda + 2)(6\lambda + 2)(6\lambda + 3)} x^{6\lambda + 3} \text{ etc.}$$

haec

haec progressio igitur abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = 0$, vel $3\lambda + 1 = 0$ seu $\lambda = -\frac{1}{3}$, vel $\lambda = -\frac{2}{3}$, vel $\lambda = -\frac{3}{5}$ ideoque in genere si $\lambda = -\frac{i}{2i+1}$, quo casu fit $v = a x^{\frac{-i}{2i+1}}$ hincque $z = \frac{1}{2} a a x^{\frac{-2i}{2i+1}}$ ergo $z z = \frac{1}{4} a^2 x^{\frac{-4i}{2i+1}}$

Pro posteriore casu, quo $p = x$, habebimus:

$$q = -\frac{a\alpha(\lambda+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} x^{2\lambda+2}; r = +\frac{\alpha^2(\lambda+1)(3\lambda+2) \cdot x^{4\lambda+4}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)}$$

$$s = -\frac{\alpha^3(\lambda+1)(3\lambda+2)(5\lambda+3) \cdot x^{6\lambda+6}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)(6\lambda+3)(6\lambda+4)} \text{ etc.}$$

quae progressio abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = -1$ vel $\lambda = -\frac{2}{3}$; vel $= -\frac{3}{5}$ et in genere si fuerit $\lambda = -\frac{i}{2i-1}$, vnde fit $v = a x^{\frac{-i}{2i-1}}$; $z = \frac{1}{2} a a x^{\frac{-2i}{2i-1}}$ et $z z = \frac{1}{4} a^2 x^{\frac{-4i}{2i-1}}$. Hique casus manifesto conveniunt cum iis, qui in famosa aequatione Riccatiana locum habent.

XIV. At super solutione generali §. 12. id imprimis memoratu dignum vsu venit, quod omnes litterae p, q, r, s etc. per geminam integrationem definiantur, ideoque binas constantes arbitrarías recipiant, quum tamen iam character Φ omnes possibiles functiones in se inuoluat. Verum hoc nequam mirum videri debet, si enim haec forma

$$p\Phi(t+szdx) + q\Phi' \dots + r\Phi'' \dots + s\Phi''' \dots \text{ etc.}$$

aequationi nostrae differentiali satisfaciatur, euidens est, etiam sequentes formas esse satisfacturas:

$$p\Phi' \dots + q\Phi'' \dots + r\Phi''' \dots \text{ etc. item } p\Phi'' \dots + q\Phi''' \dots \text{ etc.}$$

atque hinc huiusmodi formae coniunctae pariter satisfaciunt, veluti

$$p\Phi \dots + (q+\alpha p)\Phi' \dots + (r+\alpha q+\beta p)\Phi'' \dots + (s+\alpha r+\beta q+\gamma p)\Phi''' \dots \text{ etc.}$$

hicque adeo prima quantitas p , quum sit $=nx+f$, in posterioribus formis adiectis diuersos valores induere poterit, vnde ratio huius multiplicis in oculos incurrit.

XV. Quum igitur litterae p, q, r, s etc. duplicem determinationem ab arbitrio nostro pendente recipere queant, singulas ita constituere licebit, vt pro vtroque chordae termino, scilicet tam si $x=0$, quam si $x=a$, euanescent, quod adeo in prima p fieri posset sumendo $f=0$ et $n=0$, quo quidem casu chorda in quiete persisteret, at quomocumque litteram p accipere lubuerit, omnes litterae sequentes q, r, s etc. semper ita definiiri possunt, vt euanescent posito tam $x=0$ quam $x=a$, quae circumstantia nobis facilem suppeditat solutionem sequentis Problematis, quod generalissime motum omnium plane chordarum in se complectitur, quo omnia quae de hoc argumento desiderari solent, referri possunt.

Problema Generalissimum.

Si chorda crassitiei vtcunque variabilis, in duobus terminis fixa, a vi quacunque fuerit tensa, definire tempus singularum vibrationum, quas edet impulsu.

Solutio.

Solutio.

Chordae crassities se habeat eo modo, vti supra §. I. et vocetur eius longitudo $AB = a$ et vis chordam tendens aequetur ponderi K , tum vero ponatur

$$z z = \frac{x}{2 b k . K},$$

et quum motus chordae definiatur hac aequatione generali

$$z z \left(\frac{d d y}{d t^2} \right) = \left(\frac{d d y}{d x^2} \right)$$

modo ante vidimus huic aequationi tali forma:

$$y = p \Phi(t + f z d x) + q \Phi' \dots r \Phi'' \dots + s \Phi''' \dots \text{etc.}$$

ita satisfieri posse, vt post primum singuli coefficientes q, r, s etc. pro vtroque chordae termino euanescant tam posito $x = 0$, quam $x = a$. His iam coefficientibus ita determinatis et sumto $p = 1$, aequatio integralis completa ita exhiberi poterit, vt fit

$$\begin{aligned} y = & \Phi(t + f z d x) & - \Psi(t - f z d x) \\ & + q \Phi'(t + f z d x) & - q \Psi'(t - f z d x) \\ & + r \Phi''(t + f z d x) & + r (\Psi''(t - f z d x) \\ & + s \Phi'''(t + f z d x) & + s (\Psi'''(t - f z d x). \\ & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Quum enim aequatio inuoluat quadratum $z z$, eius radicem z tam positue quam negatiue capere licet, et ex superioribus facile colligitur, sumto z negatiue, coefficientium alternos signum contrarium recipere debere; nihil aliud igitur superest, nisi vt hoc integrale completum ad statum quaestionis accommode-

modetur, quo requiritur, vt posito siue $x=0$ siue $x=a$, valor ipsius y in nihilum abeat. Ponamus igitur $x=0$ et formulam $\int z dx$ ita captum assumamus, vt euanescat posito $x=0$ atque ob euanescentes q, r, s, t etc. habebimus $y=0$, vnde manifesto sequitur, functionem ψ conuenire debere cum functione ϕ ita, vt sit $\psi=\phi$. Nunc ergo pro casu $x=a$, quo litterae q, r, s, t etc. itidem annihilantur, sumamus formulam $\int z dx$ accipere valorem $=A$, et nunc habebitur

$$y = \phi(t + A) - \phi(t - A) = 0,$$

vnde discimus, indolem istius functionis ϕ ita comparatam esse debere, vt semper fiat

$$\phi(t + 2U) = \phi t$$

quicquid fuerit U , id quod etiam in functionibus ϕ', ψ' locum habebit. Quocirca in quocunque statu chorda fuerit pro statu praesenti, post elapsum tempus $\frac{t}{2A}$ in eundem statum reuertetur, hocque temporis interuallo binas absoluisse vibrationes censei solet, ita vt tempus vnus vibrationis fit $=A$. Ecce ergo solutionem nostri Problematis, quae ita se habebit: ob $z z = \frac{x}{2bk.K}$ sumatur integrale formulae $\int dx \sqrt{X}$ per totam longitudinem chordae extensum ac tempus singularum vibrationum in minutis secundis expressum erit $\int \frac{dx \sqrt{X}}{\sqrt{2bk.K}}$, ex quo vibrationum vno minuto secundo editarum numerus erit $\frac{\sqrt{2bk.K}}{\int dx \sqrt{X}}$, omnino vti haecenus coniectura inducti statuimus.