DE MOTV VIBRATORIO LAMINARVM ELASTICARVM, VBI PLVRES NOVAE VIBRATIONVM SPECIES HACTENVS NON PERTRACTATAE EVOLVVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Quamquam hoc argumentum iam olim fusius pertractaui, tamen quoniam ab eo tempore vera methodus huiusmodi quaestiones soluendi demum excoli est coepta, non inutile erit idem problema denuo tractare.

I. Laminam igitur elasticam hic sum considerturus per totam longitudinem eiusdem crassitiei atque eodem elateris gradu praeditam, cuius massam seu pondus ita in calculum introduco, vt pro longitudine laminae $= k$, massam seu pondus ponam $= K$, tum vero hanc laminam in statu suo naturali in directum extensam assumo, quae ob elasticitatem omni incuruationi ita resistat, vt momentum virium ipsi datam curuaturam inducentium radio osculi eius curuaturae sit reciproce proportionale, scilicet si alicubi radius curuaturae fuerit $= r$, ad laminam in hoc statu curuato conseruandam requiretur momentum virium $= \frac{Ccc}{r}$.

Tab. VII. Fig. 1. II. Sit igitur A B huiusmodi lamina elastica, altero termino A a muro seu parieti immobili infixa, quae deinde a viribus quotcunque incuruata sit in statum A Y F, quam minime a statu naturali A B discrepantem, quoniam enim hic de vibrationibus minimis quaestio instituitur, curua A Y F tam parum a recta A B ceu axe recedere est sumenda, vt omnes applicatae X Y sint quasi infinite paruae, et dum lamina motu vibratorio agitatur, singula eius puncta Y secundum ipsas applicatas X Y, siue accedendo ad axem, siue inde recedendo moueantur. Hinc si abscissa a termino B computata vocetur $BX = x$ et applicata $XY = y$, quoniam haec vt infinite parua spectatur, ipse arcus F Y abscissae $BX = x$ aequalis censeri poterit, quemadmodum etiam arcus A Y rectae A X aequalis censetur. Hinc portionis laminae F Y massa seu pondus erit $= \frac{Kx}{k}$, eiusque elementi pondusculum $\frac{Kdx}{k}$, ac si longitudinem huius laminae vocemus $BA = a$, eius massa seu pondus erit $\frac{Ka}{k}$. Praeterea ex formulis notissimis radii osculi Y R in puncto Y sursum vergentis valor est $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, denotante ds elementum curuae, quod quum sit aequale elemento abscissae dx, radius iste osculi $YR = r$ erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, hincque momentum huic curuaturae debitum erit $= \frac{Kcc.\,ddy}{dx^2}$. Scilicet si in F applicata concipiatur vis quaepiam Ff, ea tanta esse debet, vt eius momentum respectu puncti Y fiat $= \frac{Kcc\,ddy}{dx^2}$, tum enim ista vis hanc curuaturam conseruare valebit.

III.

III. Contemplemur iam ipſum motum vibrationum, ac tempore quodam ab initio elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus, lamina acceperit figuram A Y F, ac ſi motum quaſi ab axe recedentem ſpectemus, celeritas puncti Y in directione Y V referatur formula $\frac{dy}{dt}$ quatenus ſcilicet hic y a ſolo tempore t pendere concipitur, ita vt dy hic denotet augmentum, quod diſtantia X Y $= y$, tempuſculo dt accipit, hincque acceleratio huius puncti exprimetur formula $\frac{ddy}{dt^2}$, quae vt etiam ad menſuras abſolutas reuocetur, exhibebit ipſam vim acceleratricem ſi diuidatur per $2b$, denotante b altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ſicque vis acceleratrix ſecundum directionem X V erit $= \frac{ddy}{2b\,dt^2}$, dum ſcilicet vis acceleratrix grauitatis naturalis vnitate repraeſentatur.

IV. Quum autem hic in motum totius laminae A Y F inquiramus; perſpicuum eſt, applicatam X Y $= y$, functionem eſſe duarum variabilium abſciſſae ſcilicet B X $= x$ et temporis $= t$, ita vt in ea duplex variabilitas ineſſe poſſit; ad has igitur variationes diſtinguendas, more ſolito vtemur formulis vncinulis incluſis ſicque formula radium oſculi in Y exhibens, quoniam ibi ſola x variabilis ſtatuitur, ita referetur $\left(\frac{dx^2}{ddy}\right)$, vnde momentum elaſticitatis in hoc loco $= Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, breuitatis ſcilicet gratia hic momentum elaſticitatis voco illud virium momentum, quod ad illam curuaturam retinendam poſtulatur, ſimilique modo vis illa acceleratrix in

 dire-

directione X V, vbi folum tempus t variari assumitur, ita exhiberi debet, vt fit $\frac{1}{2b}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ex quo manifestum est, hanc inuestigationem ad illam partem calculi integralis pertinere, quae circa functiones duarum variabilium versatur, atque hoc ipso ista quaestio ab aliis, vbi vnius tantum variabilis functiones quaeruntur, maxime discrepat ac prorsus singularem soluendi methodum postulat, siquidem solutionem perfectam et latissime patentem desideremus, quemadmodum occasione Problematis de chordis vibrantibus saepius iam est inculcatum.

V. Vt ergo talis motus, qualem laminae nostrae illis formulis Analyticis tribuimus, reuera producatur, singulis elementis $Xy = dx$, quorum massula seu ponduſculum est $\frac{K\,dx}{k}$, vis acceleratrix secundum directionem $YV = \frac{1}{2b}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, hincque vis motrix $= \frac{K\,dx}{2kb}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ applicata est intelligenda, scilicet si singulis laminae elementis huiusmodi vires $YV = \frac{K\,dx}{2\,b\,k}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ essent applicatae, illae praecise illum ipsum motum laminae essent inducturae, quem formulae nostrae Analyticae inuoluunt, quare vt hic motus cum veritate conueniat, necesse est, vt omnes istae vires elementares aequiualeant illis viribus, quibus lamina reuera sollicitatur, laminae autem nullae aliae vires sunt applicatae, nisi quibus muro infixa retinetur.

VI. In hoc ipso autem cardo quaestionis praecipue versatur, quales vires intra murum exseri debe-

debeant, vt lamina inflexioni resistere possit, hicque statim facile perspicitur, vnicam vim verbi gratia in puncto A applicatam, quantumuis fuerit magna, nequaquam inflexioni resistere posse, verum si praeterea alia vis veluti in puncto a in directione contraria applicetur, quilibet facile intelliget, huiusmodi duabus viribus simul agentibus, desideratum effectum vtique produci posse, hoc autem loco nobis sufficit nosse, omnes vires, quibus lamina nostra actu sollicitatur, semper reduci posse ad binas vires in punctis A et a applicatas, de quarum quantitate nondum sumus solliciti, quandoquidem pro quouis laminae statu vehementer variari possunt, verum ipsa demum solutio nobis has vires declarabit, atque tum manifestum fiet quantas vires murus seu paries a portione infixa A a quouis momento sustineat.

VII. Tota ergo quaestio huc redit, quomodo vires illae elementares Y V $= \frac{K\,dx}{2\,bk}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right)$ comparatae esse debeant, vt binis illis viribus in A et a applicandis etiamsi ignotis aequiualeant, tum autem istae vires elementares illis, quae in punctis A et a applicatae concipiuntur, aequiualebunt, si eaedem vires Y V laminae in directione contraria applicatae cum binis istis postremis in aequilibrio fuerint constitutae, sicque hoc modo tota quaestio ad inuestigationem status aequilibrii reducitur, ita vt nunc non amplius ipse motus in considerationem veniat. Hanc ob rem Tab. VII. singulis punctis laminae Y in plagam contrariam Fig. 2. applicentur vires illae elementares

$$Y\,V = \frac{K\,dx}{2\,bk}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right),$$

 quas

quas formulam breuitatis gratia per $p\,d\,x$ designemus, vt sit vis

$$Y\,V = p\,d\,x = \frac{K\,d\,x}{2\,b\,k}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

atque has vires ita comparatas esse oportet, vt cum binis illis viribus laminae in punctis A et *a* applicatis in aequilibrio consistant, hoc modo si punctum laminae Y consideremus, atque ambas laminae portiones F Y et A Y vtrinque circa Y sitas spectemus, illa portio F Y nullas alias vires sustinet nisi quas hic elementares nominamus, dum altera portio A Y duas insuper vires ignotas in A et *a* gerit, quae ergo duplices vires respectu Y vtrinque in aequilibrio esse debent, sufficiet igitur vires portioni B Y applicatas spectasse, quae quum laminae curuaturam in ipso puncto Y sustentare debeant, quandoquidem illis remotis portio Y F statim in directum extenderetur, momentum istarum virium aequari debet ipsi illi momento elasticitatis supra definito, quod erat

$$= K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

vnde statim principalem aequationem consequemur, quae totam Problematis solutionem continebit.

VIII. Quo igitur commodius momentum omnium istarum virium elementarium respectu puncti Y eruamus, hoc ipsum punctum tantisper quasi fixum spectemus, ita vt coordinatae x et y pro constantibus habeantur, atque ab F versus Y progre-

progrediendo, ſumamus punctum y variabile, pro quo idcirco coordinatae

$$Bx = X \text{ et } xy = Y$$

nunc noſtrae erunt variabiles, huicque puncto y in directione yx applicata ſit vis $= P\,dX$ cuius momentum reſpectu puncti Y erit

$$Px\,X.\, Xx = P\,dX\,(x - X),$$

ſumto ergo huius formulae integrali, momentum ab omnibus viribus arcui Fy applicatis oriundum erit ob x conſtans

$$= x\int P\,dX - \int P\,X\,dX,$$

quod quidem ita ſumi debet, vt euaneſcente abſciſſa $Bx = X$ ſimul euaneſcat. Transferamus iam punctum y vsque in Y fietque $X = x$ et $P = p$, conſequenter momentum omnium virium elementarium per portionem F Y reſpectu puncti Y erit

$$= x\int p\,dx - \int p\,x\,dx = \int dx \int p\,dx$$
$$= \int dx \int \tfrac{K\,dx}{2bk}\left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right) = \tfrac{K}{2bk}\int dx \int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right),$$

quae duplex integratio ita eſt inſtituenda, vt ſumto $x = 0$ tam integrale

$$\int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right), \text{ quam } \int dx \int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right)$$

euaneſcat, quandoquidem puncto Y in ipſo termino F ſumto, nullae plane vires adſunt vltra F agentes.

IX. Momentum ergo hoc modo inuentum aequari debet ipſi momento elaſticitatis in puncto Y, quatenus autem in figura hae vires elementares deor-

deorſum tendunt, non ſolum curuaturam in Y non ſuſtinerent, ſed adeo ad extenſionem in directum deducerent, ex quo manifeſtum eſt, accelerationem illam $(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$ neceſſario valorem negatiuum habere debere, quod etiam ipſa rei natura manifeſto declarat, nam dum lamina A F a ſtatu naturali digreditur, eius motus certe non accelerabitur, ſed potius retardabitur, quo obſeruato ſequentem aequationem nanciſcimur:

$$-\frac{K}{2\,b\,k}\int d\,x \int d\,x \,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = K\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2});\ \text{ſiue}$$

$$-\int d\,x \int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = 2\,b\,k\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}),$$

qui coefficiens poſtremus quum neceſſario ſit poſitiuus, ponamus breuitatis gratia $2\,b\,k\,c\,c = b^4$, vt habeamus hanc aequationem:

$$-\int d\,x \int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2})$$

et quia in illa integratione ſola x vt variabilis ſpectatur, ſumtis vtrinque differentialibus, habebimus

$-\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^3\,y}{d\,x^3})$ ac denuo differentiando

$-(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^4\,y}{d\,x^4})$, a cuius formulae ſatis concinnae integratione tota ſolutio noſtri Problematis pendet.

X. Hic igitur quaeritur, cuiusmodi functio applicata y debeat eſſe binarum variabilium x et t, vt aequationi differentiali quarti ordinis, quam modo elicuimus, ſatisfiat. Ante autem quam hoc negotium ſuſcipiamus, omnes conditiones perpendiſſe iuuabit, quibus quadruplex integratio iſtius aequationis

tionis, determinari atque ad noſtrum caſum accommodari debebit. Ac primo quidem iam vidimus, ſumta abſciſſa $x = o$, hoc eſt pro ipſo termino extremo F, tam $\int p\,dx$ quam $\int dx \int p\,dx$ euaneſcere debere, quare quum fuerit

$$\int p\,dx = -Kcc\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) \text{ et } \int dx \int p\,dx = -Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

ante omnia his conditionibus ſatisfieri debet

I°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = o$

II°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = o$.

Duae reliquae conditiones ex ſtatu laminae in ipſo puncto A ſunt petendae, ad quem peruenimus ſtatuendo $x = a$, quandoquidem longitudinem laminae vibrantis iam ſupra poſuimus $AB = a$, vnde per ſe patet applicatam y ſemper euaneſcere debere. Altera conditio aeque eſt euidens, quod tangens in puncto A debeat incidere in axem AB, ex quo tertia et quarta conditio poſtulant, vt fiat ſumto $x = a$

III^{io} $y = o$ et IV°. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$

haeque quatuor conditiones ſemper adimpleri debent, quicunque valor tempori t tribuatur.

XI. Quod autem ad ipſam integrationem inventae aequationis

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -b^4\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right),$$

attinet; ſtatim fateri cogor, me nullo adhuc modo eius integrale completum, quod quidem quatuor functiones arbitrarias inuoluere deberet, inuenire potuiſſe; quam ob cauſſam etiam completa ſolutio huius problematis, quae ſcilicet ad ſtatum quemcunque initialem laminae accommodari poſſet, prouti hoc negotium in chordis vibrantibus ſucceſſit, nullo adhuc modo exſpectari poteſt, interim per ſeries infinitas quodammodo hunc defectum ſupplere licet. Denotent enim hae quatuor litterae P, Q, R, S functiones quascunque temporis t, ac ſtatuatur per ſeriem infinitam:

$$y = P + \frac{Qx}{b} + \frac{Rx^2}{b^2} + \frac{Sx^3}{b^3} + \frac{P'x^4}{b^4} + \frac{Q'x^5}{b^5} + \frac{R'x^6}{b^6} + \frac{S'x^7}{b^7} + \frac{P''x^8}{b^8} + \frac{Q''x^9}{b^9} + \frac{R''x^{10}}{b^{10}} + \frac{S''x^{11}}{b^{11}} \text{ etc.}$$

hinc colligimus

$$-\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{ddP}{dt^2} - \frac{x}{b} \cdot \frac{ddQ}{dt^2} - \frac{x^2}{b^2}\frac{ddR}{dt^2} - \frac{x^3}{b^3}\frac{ddS}{dt^2} - \frac{x^4}{b^4}\frac{ddP'}{dt^2} - \frac{x^5}{b^5}\frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{x^6}{b^6}\frac{ddR'}{dt^2} - \frac{x^7}{b^7}\frac{ddS'}{dt^2} - \frac{x^8}{b^8}\frac{ddP''}{dt^2} - \frac{x^9}{b^9}\frac{ddQ''}{dt^2} - \frac{x^{10}}{b^{10}}\frac{ddR''}{dt^2} \text{ etc.}$$

ſimilique modo ſumto tantum x variabili

$$b^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = +1.2.3.4\,P' + 2.3.4.5\,Q'\frac{x}{b} + 3.4.5.6\,R'\frac{x^2}{b^2} + 4.5.6.7\,S'\frac{x^3}{b^3} + 5.6.7.8\,P''\frac{x^4}{b^4} + 6.7.8.9\,Q''\frac{x^5}{b^5} + 7.8.9.10\,R''\frac{b^6}{x^6} + 8.9.10.11\,S''\frac{x^7}{b^7} \text{ etc.}$$

quae ſeries quum illi aequalis eſſe debeat, ſequentes ſponte ſe produnt determinationes

$$P' = -\frac{ddP}{1.2.3.4\,dt^2};\quad Q' = -\frac{ddQ}{2.3.4.5\,dt^2};\quad R' = -\frac{ddR}{3.4.5.6\,dt^2}$$

$$S' = -\frac{ddS}{4.5.6.7\,dt^2};\quad P'' = -\frac{ddP'}{5.6.7.8\,dt^2};\ = +\frac{d^4P}{1.2.3.4.5.6.7.8\,dt^2}$$

$$Q'' = +\frac{d^4Q}{2\ldots\ldots 9.\,dt^2};\quad R'' = +\frac{d^4R}{3.4\ldots 10\,dt^2};\quad S'' = \frac{d^4S}{4.5\ldots 11\,dt^2} \text{ etc.}$$

XII. His determinationibus inuentis, valor applicatae y ex quatuor ſequentibus ſeriebus infinitis reperietur compoſitus:

$y = +$

$$
\begin{aligned}
y = {}& + P - \frac{x^4\, ddP}{1\cdot 2 \ldots 4\, b^4\, dt^2} + \frac{x^8\, d^4 P}{1\cdot 2 \ldots 8\, b^8\, dt^2} - \frac{x^{12}\, d^6 P}{1\cdot 2 \ldots 12\, b^{12}\, dt^2} + \text{etc.} \\
& + Qx - \frac{x^5\, ddQ}{2 \ldots 5\, b^5\, dt^2} + \frac{x^9\, d^4 Q}{2 \ldots 9\, b^9\, dt^2} - \frac{x^{13}\, d^6 Q}{2 \ldots 13\, b^{13}\, dt^2} + \text{etc.} \\
& + Rx^2 - \frac{x^6\, ddR}{3 \ldots 6\, b^6\, dt^2} + \frac{x^{10}\, d^4 R}{3 \ldots 10\, b^{10}\, dt^2} - \frac{x^{14}\, d^6 R}{3 \ldots 14\, b^{14}\, dt^2} + \text{etc.} \\
& + Sx^3 - \frac{x^7\, ddS}{4 \ldots 7\, b^7\, dt^2} + \frac{x^{11}\, d^4 S}{4 \ldots 11\, b^{11}\, dt^2} + \frac{x^{15}\, d^6 S}{4 \ldots 15\, b^{15}\, dt^2} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

quae quatuor ſeries non ſolum coniunctim, ſed etiam vnaquaeque ſeorſim aequationi noſtrae differentiali quarti ordinis ſatisfaciunt. Interim tamen hinc parum lucri ad ipſam ſolutionem noſtri problematis redundat.

XIII. Quocirca coactus ſum, in integrali particulari noſtrae aequationis acquieſcere, ſtatim autem talis forma non parum generalis ſeſe offert, in quam quidem iam prima mea inueſtigatione incideram, nunc autem clarius et diſtinctius ſum expoſiturus. Satisfacit ſcilicet ſequens forma:

$$y = \text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A \,\text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B \,\text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

vbi notandum coefficientes A, B, C, D eſſe quantitates lineares; quam formam aequationi differentiali ſatisfacere, tentanti patebit, fit enim

$$-\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = +\theta^4 \,\text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A \,\text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B \,\text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right) = +\frac{\theta^4}{b^4} \,\text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A \,\text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B \,\text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right).$$

XIV. Accommodemus nunc hunc valorem ad quatuor illas conditiones ſupra memoratas, ac primo mo quidem valor $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$ posito $x = o$, hanc praebet aequationem:

I°. $-A + C + D = o$; siue $A = C + D$

secunda autem conditio $\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right)$ facto $x = o$ praebet

II°. $-B + C - D = o$ siue $B = C - D$.

Tertia vero conditio postulans $y = o$, sumto $x = a$ suppeditat hanc aequationem

III^{io} $A \operatorname{cos.} \frac{\theta a}{b} + B \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{b} + C e^{\frac{\theta a}{b}} + D e^{-\frac{\theta a}{b}}) = o$.

Quarta denique conditio, qua esse oportet $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) = o$ posito $x = a$ dat

IV°. $-A \operatorname{sin.} \frac{\theta a}{b} + B \operatorname{cos.} \frac{\theta a}{b} + C e^{\frac{\theta a}{b}} - D e^{-\frac{\theta a}{b}} = o$.

XV. Ad has aequationes resoluendas, ponamus breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b} = \Phi$, atque ob valores inventos $A = C + D$ et $B = C - D$, binae vltimae aequationes fient

III. $(C+D) \operatorname{cos.} \Phi + (C-D) \operatorname{sin.} \Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi} = o$

IV. $-(C+D) \operatorname{sin.} \Phi + (C-D) \operatorname{cos.} \Phi + C e^{\Phi} - D e^{-\Phi} = o$

vnde duplici modo elicitur

$$\frac{C}{D} = \frac{\operatorname{sin.} \Phi - \operatorname{cos.} \Phi - e^{-\Phi}}{\operatorname{cos.} \Phi + \operatorname{sin.} \Phi + e^{\Phi}} = \frac{\operatorname{cos.} \Phi + \operatorname{sin.} \Phi + e^{-\Phi}}{\operatorname{cos.} \Phi - \operatorname{sin.} \Phi + e^{\Phi}}$$

quorum valorum aequalitas producit hanc aequationem

$$2 = -\operatorname{cos.} \Phi \,(e^{\Phi} + e^{-\Phi})$$

ex qua aequatione numerum seu angulum θ elici oportet, quo inuento statim erit $\theta = \frac{b\,\Phi}{a}$, et quum initio

initio fuiſſet $t = 0$, ſi faciamus $\theta\theta t = \pi$, lamina interea vnam vibrationem abſoluiſſe cenſetur, ita vt tempus vnius vibrationis ſit $\frac{\pi}{\theta\theta}$.

XVI. Proponitur igitur haec aequatio:

$$2 = -\operatorname{cof.} \Phi \, (e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$

vnde valores ipſius Φ eruere oportet, cuiusmodi ſine dubio dantur infiniti, tam poſitiui, quam negatiui. In poſitiuis igitur primum inquiramus ac ſtatim quidem obſeruo, angulum Φ neceſſario recto maiorem eſſe debere, vt eius coſinus fiat negatiuus, hunc in finem ſit ϱ nota anguli recti, ſiue

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\pi = 1,570796326,$$

et ſtatuamus $\Phi = \varrho + \omega$, vt noſtra aequatio fiat

$$2 = +\operatorname{fin.} \omega \, (e^{\varrho} e^{\omega} + e^{-\varrho} e^{-\omega})$$

vbi manifeſtum eſt, dari valorem ipſius ω, eumque ſatis exiguum, qui quaeſito ſatisfaciat, quem deinceps accurate ſumus definituri. Deinde vero etiam valor Φ aliquanto dari poterit minor, quam 3ϱ, poſito enim $\Phi = 3\varrho - \omega$, prodit iſta aequatio

$$2 = +\operatorname{fin.} \omega \, (e^{3\varrho} e^{-\omega} + e^{-3\varrho} e^{\omega}).$$

Simili modo intelligimus, dari valores alternatim minores et maiores quam 5ϱ, 7ϱ, 11ϱ etc. quos ex ſequentibus aequalitatibus eruere debemus, quas cum praecedentibus ſimul conſpectui exponamus:

I.	$\Phi = \varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.} \omega (e^{\varrho} e^{\omega} + e^{-\varrho} e^{-\omega})$
II.	$\Phi = 3\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{fin} \omega (e^{3\varrho} e^{-\omega} + e^{-3\varrho} e^{+\omega})$
III.	$\Phi = 5\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.} \omega (e^{5\varrho} e^{\omega} + e^{-5\varrho} e^{-\omega})$
IV.	$\Phi = 7\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{fin.} \omega (e^{7\varrho} e^{-\omega} + e^{-7\varrho} e^{+\omega})$
V.	$\Phi = 9\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{fin.} \omega (e^{9\varrho} e^{+\omega} + e^{-9\varrho} e^{-\omega})$

 vbi

vbi manifeſtum eſt, valores ipſius ω continue fieri minores. Pro valoribus negatiuis faciamus ſtatim $\Phi = -\psi$, vt habeamus:

$$2 = -\text{cof.}\,\psi\,(e^{-\psi} + e^{+\psi})$$

vnde eaedem prorſus reperiuntur ſolutiones ac ſupra.

XVII. Quo facilius has formulas euoluere queamus, ante omnia indagare debemus valorem e^{π}, vbi Logarithmus hyperbolicus ipſius e eſt vnitas, quare Logarithmos vulgares adhibendo erit

$$\text{Log.}\, e = 0,43429,44819,$$

vnde colligimus

$$\text{L.}\, e^{\pi} = 0,4342944819 \cdot 3,1415926535 \text{ ſiue}$$
$$= 1,3643763,$$

hincque porro

$$\text{L.}\, e^{\frac{\pi}{2}} = 0,6821881$$

hincque reliqui termini, quibus indigemus, facile colliguntur, quare quum exiſtente ω fractione ſatis parua, ſit proxime

$$e^{\omega} = 1 + \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$e^{-\omega} = 1 - \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$\text{cof.}\,\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 \text{ etc. et fin.}\,\omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$

prima ſuperiorum formularum producit

$$2 = 5,01836.\omega + 4,60260.\omega^2 + 1,67275.\omega^3 - 0,37638.\omega^5$$

vnde ſatis exacte concluditur

$$\omega = 0,30432, \text{ ideoque } \Phi = 1,87511$$

neque

neque opus eſt ad maiorem praeciſionis gradum progredi. Secunda autem formula ſuppeditat ſequentem aequationem

$$2 = 111,32669 . \omega - 111,30871 . \omega^2 + 37,10890 . \omega^3$$

pro qua fit

$$\omega = 0,01829,$$

ita vt hinc fit

$$\Phi = 4,69408,$$

vnde liquet in reliquis formulis valorem ω penitus negligi poſſe ita vt fit

$$\Phi = 5\varrho,\ 7\varrho,\ 9\varrho \text{ etc.}$$

XVIII. Omnes iſtos valores ipſius Φ ordine magnitudinis, ſequens Tabella ſiſtit, vna cum temporibus vibrationum his valoribus congruentibus:

Φ	Tempora vibrat.	Soni editi
1, 87514	0, 89347. $\frac{aa}{bb}$	1, 1192 $\frac{bb}{aa}$
4, 69408	0, 14258	6, 9977
7, 85473	0, 05092	19, 6388
10, 99553	0, 02493	40, 1107
14, 13711	0, 01573	63, 5439

XIX. Inprimis autem ad tempora iſta vibrationum et ſonos iis editos perfecte cognoſcendos, praeter longitudinem laminae vibrantis $AB = a$ noſſe oportet valorem litterae b, erat autem $b^4 = 2hkcc$, vbi h denotat altitudinem lapſus grauium tempore vnius minuti ſecundi, ita vt fit $h = 15, \frac{5}{8}$ ped. Rhen. ideoque $2h = 31, \frac{1}{4}$ ped., tum vero k erat

longi-

longitudo laminae pro arbitrio fumta, cuius pondus experientia definitum fumfimus $= K$, at vero cc eam denotat quantitatem, qua elafticitas noftrae laminae determinatur, ita fcilicet vt fi alicubi fuerit radius curuaturae $= r$, momentum elafticitatis futurum fit $= \frac{Kcc}{r}$, vnde valorem huius quantitatis per experimenta explorari oportet, id quod commodiffime fequenti modo praeftari poterit. Infigatur ea lamina longitudinis k, cuius pondus exploratum fuit K, termino fuo Aa muro feu parieti immobili, vt fit $AK = k$, eique in termino K appendatur aliquod pondus I, quo terminus K normaliter ad AK follicitetur, et vsque in k detorqueatur, ita tamen, vt hoc fpatium Kk vehementer fit exiguum refpectu totius longitudinis AK, atque facile patet, fi per experimentum exploratum fuerit iftud fpatiolum Kk quod fit $= i$, ex eo ipfam quantitatem cc determinari poffe. Hic ergo fola vis feu pondus I in laminam noftram agit, vnde fi ponatur abfciffa $KX = x$ et applicata $XY = y$, momentum huius vis in punctum y eft $= Ix$ cui aequale effe debet momentum elafticitatis in puncto Y, quod vti ante vidimus eft

Tab. VII. Fig. 3.

$$= \frac{Kcc}{r} = Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

ficque pro figura huius laminae habebitur ifta aequatio,

$$Ix = Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right), \text{ vnde } \frac{Kcc}{I}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = x,$$

quae bis complete integrata praebet

$$\frac{Kcc}{I}y = \tfrac{1}{6}x^3 + \alpha x + \beta.$$

XX. Quum nunc in ipſo puncto K, vbi $x = o$, applicata y per hypotheſin aequetur interuallo $Kk = i$, euidens eſt fore:

$$\frac{Kcc.i}{I} = \beta.$$

Praeterea poſito $x = k$ fieri debet $y = o$, vnde colligimus

$$\tfrac{1}{6} k^3 + \alpha + \frac{cc.i}{I} = o, \text{ ideoque } \alpha = -\tfrac{1}{6} k^2 - \frac{Kcc.i}{kI},$$

denique in eodem puncto A fieri debet $\frac{dy}{dx} = o$, ex quo colligitur

$$o = \tfrac{1}{2} x^2 + \alpha = \tfrac{1}{2} k^2 + \alpha \text{ ſeu } \alpha = -\tfrac{1}{2} k^2,$$

qui valor praecedenti aequatus ſuppeditat:

$$cc = \tfrac{1}{3} \frac{Ik^2}{Ki}.$$

Sicque pro qualibet lamina valor huius conſtantis cc per vnicum experimentum facile exploratur, hincque pro noſtris formulis fit

$$b^4 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1bk^4}{Ki},$$

quo cognito, numeri illi vibrationum vno minuto ſecundo editarum perfecte innoteſcunt.

XXI. Eadem igitur lamina elaſtica diuerſas vibrationum ſpecies recipere poteſt, prouti ſine dubio initio aliam atque aliam impulſionem acceperit, prima ſcilicet ſpecies dat ſonum grauiſſimum, ſequentes continuo magis intenduntur fiuntque acutiores, ipſi autem vibrationum numeri mox poſt primam ſpeciem ſecundum quadrata numerorum naturalium increſcunt, praecipuum autem diſcrimen harum ſpecierum in eo eſt ſitum, quod quum in prima ſpecie lamina A F axem A B nusquam ſecet, ſiquidem in A tantum tangit, ita ſecunda ſpecies axem A B ſemel, tertia vero bis, quarta ter etc. interſecet, quemadmodum iam olim fuit oſtenſum; interim tamen tota haec ſolutio maxime eſt particularis, quia tantum ad certas curuarum ſpecies reſtringitur, atque à ſolutione generali, qualem de chordis dare licuit, longiſſime adhuc ſumus remoti. Reſtat igitur vt vires ſupra memoratas, quae ad laminam in muro continendam requiruntur, inueſtigemus. Hunc in finem conſideremus laminae punctum Y, quod a parte dextra viribus tantum elementaribus vrgetur, quarum effectum duplici modo ſpectari oportet, altero ſcilicet reſpectu ſummae virium elementarium a puncto Y vsque ad punctum F applicatarum, quae, vti ſupra vidimus, eſt $\int p\, d x$, altero vero modo reſpectu momenti harum virium, quod eſt $\int d x \int p\, d x$. Hoc momentum autem inuenimus eſſe

Tab. VII. Fig. 1.

$$= - K c c \left(\frac{d d y}{d x^2}\right),$$

hic ſcilicet iſtae vires tamquam deorſum trahentes ſpectantur, vnde ipſa virium illarum ſumma colligitur

$$\int p\, d x = - K c c \left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right),$$

vbi notetur breuitatis gratia ſupra poſitum eſſe

$$b^4 = 2 b k c c.$$

Contemplemur nunc ipſam aequationem integralem, ad quam ſupra peruenimus; inuenimus autem poſito fito breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b} = \Phi$ cuius valorem pro fingulis fpeciebus modo ante elicuimus, fequentes valores pro litteris A, B, C, D;

$$C = \text{fin.}\,\Phi - \text{cof.}\,\Phi - e^{-\Phi}; \quad D = \text{cof.}\,\Phi + \text{fin.}\,\Phi + e^{\Phi}$$

$$A = 2\,\text{fin.}\,\Phi + e^{\Phi} - e^{-\Phi}; \quad B = -2\,\text{cof.}\,\Phi - e^{\Phi} - e^{-\Phi}$$

quibus definitis prodierat:

$$y = \text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(A\,\text{cof.}\frac{\theta x}{b} + B\,\text{fin.}\frac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

vnde concludimus

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = + \frac{\theta\,\theta}{b\,b}.\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(-A\,\text{cof.}\frac{\theta x}{b} - B\,\text{fin.}\frac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

$$\left(\frac{d^3 y}{d\,x^3}\right) = \frac{\theta^3}{b^3}.\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(+A\,\text{fin.}\frac{\theta x}{b} - B\,\text{cof.}\frac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} - D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quibus formulis tam fumma, quam momentum virium elementarium a parte dextra pro puncto laminae Y exprimitur.

Promoueamus nunc punctum Y vsque ad terminum A, vbi $x = a$ et $\frac{\theta x}{b} = \Phi$ et fumma omnium virium arcui A F applicatarum erit:

$$\int p\,d\,x = \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(+A\,\text{fin.}\,\Phi - B\,\text{cof.}\,\Phi + C e^{\Phi} - D e^{-\Phi}\right)$$

$$= \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(2\,\text{fin.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})\right).$$

Similique modo earundem virium momentum refpectu puncti A erit:

$$\int d\,x \int p\,d\,x = \frac{\theta\,\theta}{b\,b}.\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(-A\,\text{cof.}\,\Phi - B\,\text{fin.}\,\Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi}\right)$$

$$= \frac{\theta\,\theta}{b\,b}\,\text{cof.}\,\theta\,\theta\,t\left(2\,\text{fin.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - 2\,\text{cof.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})\right).$$

Hoc duplici virium effectu inuento, manifeftum eft, portiunculam laminae muro infixam A *a* in puncto

 a tan-

a tanta vi vrgeri debere, vt eius momentum pro puncto A itidem fiat $= \int dx \int p\, dx$ ficque ex longitudine iftius portionis A *a* innotefcit ipfa vis puncto *a* applicanda, quam vocemus $= V$ et nunc facile vis, quam ipfum A fuftinet, definietur, quandoquidem ea aequalis et contraria effe debet fummae virium vtrinque applicatarum, fcilicet ifta vis erit $= V + \int p\, dx$, hocque modo omnia funt determinata, quae quidem fuper hac folutione particulari defiderari poffunt

XXII. Haec funt fere, quae iam olim de eodem hoc Problemate fum commentatus, nifi quod hic fint aliquanto clarius et vberius expofita; verum eadem lamina pluribus adhuc aliis modis tractata motum tremulum recipere poteft, dum enim hic lamina A B altero termino B prorfus libera eft affumta, altero vero termino A muro infixa, pluribus aliis modis lamina fiue in alterutro termino, fiue in vtroque defigi poteft, non enim abfolute opus eft, vt lamina in termino A muro infigatur, fed motus quoque tremulus oriri debet, etiamfi in puncto A tantum ftilo ita defigatur, vt libere circa eum gyrari poffit atque adeo vterque terminus A et B plane liber relinqui poffet; tum vero defixio ope ftyli in vtroque termino atque adeo etiam in locis intermediis admitti poffet, quod etiam de altero modo, quo lamina muro infigitur, eft intelligendum. Hinc igitur plura genera contremifcendi in lamina locum habere poffunt, quorum praecipua in fequentibus Problematibus fum euoluturus.

Pro-

Problema I.

XXIII. Si lamina prorſus fuerit libera ſeu incumbat plano horizontali; definire motum vibratorium, cuius eſt capax. Tab. VII. Fig. 4.

Solutio.

Sit longitudo laminae A B $= a$, quae elapſo tempore t figuram ceperit A Y B, quam minime ab axe A B diſcrepantem, ipſa autem lamina ita ſit comparata, quemadmodum ſupra deſcripſimus, ſcilicet longitudini k reſpondeat pondus K et pro curvatura, cuius radius oſculi $= r$, ſit momentum elaſticitatis $= \frac{Kcc}{r}$, vnde ponatur $b^4 = 2bkcc$, quadratum autem cc per experimentum ſupra allegatum inuentum ſit

$$cc = \frac{1}{2} \frac{I. k^3}{i K} \text{ hincque } b^4 = \frac{2}{2} \frac{I b. k^4}{i K},$$

quibus poſitis ſi abſciſſae cuicunque A X $= x$ reſpondeat applicata X Y $= y$; manifeſtum eſt, iterum perveniri ad hanc aequationem differentialem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = b^4 \left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)$$

eique idcirco ſatisfacere hanc integralem

$$y = \text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A \,\text{coſ.} \frac{\theta x}{b} + B \,\text{ſin.} \frac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quare quum extremitas F nullam ſuſtineat vim, hoc loco tam $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ quam $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)$ euaneſcet, vnde iam hae duae determinationes prodeunt

$$A = C + D; \quad \text{et } B = C - D.$$

Dein-

Deinde omnium virium elementarium per arcum F Y summa erat $\int p\,dx = -b^4 \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) =$

$$-\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{cof.}\theta\theta t\left(A\operatorname{fin.}\frac{\theta x}{b} - B\operatorname{cof.}\frac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

harum autem virium momentum pro puncto Y $= \int dx \int p\,dx =$

$$-\frac{\theta^2}{bb}\operatorname{cof.}\theta\theta t\left(-A\operatorname{cof.}\frac{\theta x}{b} - B\operatorname{fin.}\frac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quae duae quantitates a puncto Y ad alterum terminum G vsque translatae vbi $x = a$, denuo euanescere debent; et si breuitatis gratia ponamus $\frac{\theta a}{b} = \zeta$, has duas conditiones praebent:

$$A.\operatorname{fin.}\zeta - B.\operatorname{cof.}\zeta + C.e^{\zeta} - D.e^{-\zeta} = 0;$$
$$-A.\operatorname{cof.}\zeta - B.\operatorname{fin.}\zeta + C.e^{\zeta} + D.e^{-\zeta} = 0$$

fupra autem iam inuenimus

$$A = C + D \text{ et } B = C - D,$$

vnde duplicem fequentem valorem elicimus:

$$\frac{C}{D} = \frac{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta - e^{-\zeta}}{\operatorname{cof.}\zeta - \operatorname{fin.}\zeta - e^{\zeta}} = \frac{\operatorname{fin.}\zeta - \operatorname{cof.}\zeta + e^{-\zeta}}{\operatorname{fin.}\zeta + \operatorname{cof.}\zeta - e^{\zeta}}$$

vnde elicitur

$$2 = \operatorname{cof.}\zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

cui ftatim fatisfacit $\zeta = 0$, ideoque et $\theta = 0$, quo ipfo ftatus quietis continetur; pro aliis valoribus primum obferuo, fiue angulus ζ pofitiue fiue negatiue capiatur, perinde effe; deinde facile perfpicitur, hunc angulum ζ recto maiorem effe debere, quare ne cofinus cosinus ζ fiat negatiuus, tribus adeo rectis maior esse debet, statuamus ergo $\zeta = 3\,\varrho + \omega$, et esse oportebit:

$$2 = \text{sin.}\,\omega\,(e^{3\rho}\,e^{\omega} + e^{-3\rho}\,e^{-\omega}),$$

supra autem inuenimus esse,

$$e^{3\rho} = 111,31770; \text{ et } e^{-3\rho} = 0,00899$$

ita vt ω sit fractio vehementer parua, hincque tuto poni possit

$$\text{sin.}\,\omega = \omega \text{ et } e^{\omega} = 1 + \omega \text{ et } e^{-\omega} = 1 - \omega,$$

quocirca aequatio nostra dabit:

$$2 = 111,32669.\omega + 111,30871.\omega^2 \text{ sicque } \omega = 0,01765,$$

quia igitur

$$3\varrho = 4,71237 \text{ erit } \zeta = 4,73002 = \frac{\theta a}{b},$$

ex quo valore concludimus tempus vnius vibrationis

$$\frac{\pi}{\theta\theta} = \frac{\pi}{\zeta\zeta}.\frac{aa}{bb} = 0,14042\,\frac{aa}{bb}$$

et sonus siue vibrationum vno minuto secundo editarum numerus

$$= 7,12146.\frac{bb}{aa},$$

haecque est simplicissima vibrationum species, quas lamina nostra edere potest, qui sonus binis octauis cum vna quinta superat illum, quem eadem chorda editura esset, si in A muro esset infixa, praeterea vero innumeros alios valores pro ζ inuenire licet, ponendo

$$\zeta = 5\varrho - \omega; \text{ vel } 7\varrho + \omega, \text{ vel } 9\varrho - \omega \text{ etc.}$$

vbi manifesto angulus ω pro euanescente haberi poterit, atque hinc eaedem vibrationes resultabunt, quae

supra

supra speciem tertiam, quartam, quintam etc. constituebant.

Problema II.

XXIV. Si eadem lamina elastica in termino A fuerit libera, in altero vero B ita stylo defixa, vt circa eum libere verti possit; inuenire motum vibratorium, cuius erit capax.

Solutio.

Pro hoc ergo casu eaedem aequationes locum habent, quas modo ante euoluimus, scilicet posita abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$ habebimus

$$y = \operatorname{cos.} \theta\theta t (A. \operatorname{cos.} \tfrac{\theta x}{b} + B. \operatorname{sin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}})$$

et quia extremitas E vbi $x = o$, nullas vires sustinet, habebimus vt ante

$$A = C + D \quad \text{et} \quad B = C - D$$

tum vero etiam pro arcu EY erit summa virium elementarium

$$\int p\,dx = -Kcc. \tfrac{\theta^3}{b^3} \operatorname{cos.} \theta\theta t (A \operatorname{sin.} \tfrac{\theta x}{b} - B \operatorname{cos.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} - D e^{-\frac{\theta x}{b}})$$

et momentum harum virium respectu Y

$$= + \tfrac{Kcc.\theta\theta}{bb} \operatorname{cos.} \theta\theta t (A \operatorname{cos.} \tfrac{\theta x}{b} + B \operatorname{sin.} \tfrac{\theta x}{b} - C e^{\frac{\theta x}{b}} - D e^{-\frac{\theta x}{b}})$$

quae formulae ad alterum terminum vsque B extendantur faciendo $x = a$, ac prior quidem cum vi, quam ipse stylus in B sustinet, in aequilibrio existere debet, quare si sumamus stylum in puncto B susti-

sustinere vim $B\beta = G$, positoque vt ante $\frac{\theta a}{b} = \zeta$, fieri oportet

$$-\frac{Kcc\theta^5}{b^3}(A\,\text{sin.}\,\zeta - B\,\text{cos.}\,\zeta + C.e^{\zeta} - D.e^{-\zeta}) + G = 0,$$

ita vt iam cognoscamus hanc vim $B\beta$ quae erit

$$G = Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cos.}\,\theta\,\theta\,t\,(A\,\text{sin.}\,\zeta - B\,\text{cos.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta}),$$

deinde autem momentum harum virium, necessario hic debet euanescere, quia enim lamina circa B libere mobilis est, nullum momentum incuruans hic statui potest, erit ergo:

$$A\,\text{cos.}\,\zeta + B\,\text{sin.}\,\zeta - Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

denique hic manifesto esse debet $y = 0$, vnde fit

$$A\,\text{cos.}\,\zeta + B\,\text{sin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$

ex quibus duabus postremis aequationibus statim fluit

$$A\,\text{cos.}\,\zeta + B\,\text{sin.}\,\zeta = 0 \quad \text{et} \quad Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0,$$

ex qua postrema fit

$$C = e^{-\zeta} \quad \text{et} \quad D = -e^{\zeta},$$

qui valores insuper in lineolam paruam sunt ducendi, vt applicatae y fiant lineares et simul infinite paruae, hinc ergo colligitur

$$A = e^{-\zeta} - e^{\zeta};\ B = e^{-\zeta} + e^{\zeta},$$

quibus valoribus substitutis prodibit sequens aequatio

$$0 = e^{-\zeta}(\text{cos.}\,\zeta + \text{sin.}\,\zeta) - e^{\zeta}(\text{cos.}\,\zeta - \text{sin.}\,\zeta) \ \text{siue}$$

$$\text{Tang.}\,\zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}};\ \text{vel}\ e^{2\zeta} = \frac{\text{cos.}\,\zeta + \text{sin.}\,\zeta}{\text{cos.}\,\zeta - \text{sin.}\,\zeta},$$

formula per reductiones notissimas redit ad hanc

$$e^{2\zeta} = \text{Tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varrho + \zeta).$$

Hinc ſtatim patet ſatisfacere $\zeta = 0$, quo ipſe ſtatus aequilibrii continetur. Deinde vero valores idonei pro ζ continuo propius accedent ad hos angulos

$\frac{5}{2}\varrho$; $\frac{9}{2}\varrho$; $\frac{13}{2}\varrho$; $\frac{17}{2}\varrho$ etc.

ſi enim ponamus $\zeta = \frac{5}{2}\varrho - \omega$ erit Tangens $\zeta = \frac{1-\omega}{1+\omega}$ proxime, cui aequalis eſſe debet formula

$$\frac{1 - e^{-5\varrho + 2\omega}}{1 + e^{-5\varrho + 2\omega}}, \text{ ita vt ſit } \omega = \frac{e^{2\omega}}{e^{5\varrho}}$$

ſicque propemodum

$$\omega = \frac{1}{e^{5\varrho}} = 0,0003882$$

atque propius

$$\omega = 0,0003885,$$

pro ſequentibus caſibus autem hanc correctionem ω penitus negligere licebit, ita vt iſti valores pro ζ ſint

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \zeta = \frac{5}{2}\varrho - \omega & = 3,92666 \\ \text{II.} & \zeta = \frac{9}{2}\varrho & = 7,06858 \\ \text{III.} & \zeta = \frac{13}{2}\varrho & = 10,21017 \\ \text{IV.} & \zeta = \frac{17}{2}\varrho & = 13,35176 \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

videamus autem an etiam dentur valores negatiui, quem in finem ponamus $\zeta = -\eta$ eſſeque oportebit

$$-\text{Tang.}\,\eta = \frac{e^{-\eta} - e^{+\eta}}{e^{-\eta} + e^{+\eta}}; \text{ ſiue Tang.}\,\eta = \frac{e^{+\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}},$$

quae aequatio cum praecedente conuenit, ita vt illi inuenti valores etiam pro η valeant, ſicque valores ipſius

ipſius ζ tam poſitiue quam negatiue capi queant. Quia autem vtrinque pro $\theta\,\theta$ idem valores prodeunt, variae ſpecies vibrationum, quas haec lamina recipere poteſt, erunt ſequentes:

Temp. vibrat.	Soni editi
I. $0,20375\,\frac{aa}{bb}$	$4,9079\,\frac{bb}{aa}$
II. $0,06288$ . .	$15,9044$
III. $0,03013$ . .	$33,1832$
IV. $0,01762$ . .	$56,7452$.

Coroll.

XXV. Quum ſoni ab eadem lamina vtrinque libera editi, rationem horum numerorum ſequantur

$$7,1215;\ 19,6388;\ 40,1107$$

euidens eſt hos ſonos acutiores eſſe illis, quos hic inuenimus, ita vt ſtylus in termino B defixus ſonum laminae grauiorem reddat, quemadmodum etiam vidimus ſi lamina altero termino plane muro ſit infixa, ſonos adhuc multo grauiores prodire.

Problema III.

XXVI. Si lamina in vtroque termino A et B ope ſtylorum fuerit defixa, definire motus vibratorios, quos recipere poteſt. Tab. VII. Fig. 7.

Solutio.

Pro curuatura laminae habemus ſtatim eandem aequationem vt ante, quae poſito $\frac{\theta x}{b} = \Phi$, ſuccinctius ita exprimitur:

 $y =$ coſ.

$$y = \text{cof.}\,\theta\theta t\,(A\,\text{cof.}\,\Phi + B\,\text{fin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$

quia nunc lamina in termino A eſt fixa, ſtatim habemus $y = o$ ſi $x = o$, vnde haec emergit determinatio:

$$A + C + D = o;$$

deinde in hoc puncto A nulla datur vis incuruans, vnde formula $(\frac{d\,dy}{dx^2})$ euaneſcere debet, ex quo naſcitur haec ſecunda determinatio

$$-A + C + D = o,$$

ſicque habebimus has ſimpliciſſimas relationes

$$A = o \text{ et } C + D = o.$$

Conſideremus nunc etiam vim, quam ſtylus in A α ſuſtinet, quae ſit $A\,e = E$ et normalis ad axem A B, quae quum ſola in terminum A agat, aequalis erit vi illi ſupra definitae $\int p\,dx$ poſito $x = o$, ſicque erit

$$-Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cof.}\,\theta\theta t\,(-B + C - D) = E.$$

Nunc autem pro portione laminae A Y, maiori cura imprimis tam ſummam virium elementarium quam earum momentum reſpectu puncti Y aſſignare debemus. Hunc in finem integrale $\int p\,dx$ ita eſt ſumendum, vt euaneſcat poſito $x = o$, ex quo habebimus

$$\int p\,dx = -Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cof.}\,\theta\theta t\,(A\,\text{fin.}\,\Phi - B\,\text{cof.}\,\Phi + C\,e^{\Phi} - D\,e^{-\Phi})$$
$$+ Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\,\text{cof.}\,\theta\theta t \quad (-B + C - D)$$

quae formula per dx multiplicata et eadem lege integrata praebet momentum virium elementarium

$\int dx$

$$\int dx \int p dx = -Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\Phi - B\,\text{fin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$
$$+ Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A + C + D)$$
$$+ Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\text{cof.}\,\theta\theta t(-B + C - D)\,x$$

quibus formulis in fequentibus plurimum vtemur. Interim hic notaffe iuuabit, fi ad illud momentum addatur momentum vis E quod eft

$= Ex = -Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\text{cof.}\,\theta\theta t(-B + C - D)x$, tum ob

$-A + C + D = 0$

totum momentum fore

$$= -Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\Phi - B\,\text{fin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$

cui momentum elafticitatis negatiue fumtum praecife eft aequale, vti rei natura poftulat. Promoueamus nunc punctum Y vsque ad alterum terminum B, faciendo $x = a$ feu $\frac{\theta a}{b} = \zeta$ vti fupra et fumma omnium virium elementarium vna cum vi ftyli E erit

$$= -Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\zeta - B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

quae cum vi quam ftylus $B\beta$ fuftinet, quae fit $Bf = F$ euanefcere debet, propterea quod omnes has vires in aequilibrio confiftere oportet, vnde etiam vis ifta Bf innotefcit, erit enim

$$F = +Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\text{cof.}\,\theta\theta t(-A\,\text{cof.}\,\zeta - B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta}).$$

Porro quum terminus B a fola hac vi retineatur, cuius momentum pro puncto B eft nullum, hic etiam nulla curuatura locum habere poteft, vnde totum iftud momentum ad terminum B translatum,

 facien-

faciendo $\Phi = \zeta$ nihilo aequale esse debet, ex quo fiet

$$-A \operatorname{cos}. \zeta - B \operatorname{sin}. \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0.$$

Denique quum hoc loco etiam sit $y = 0$, habebimus insuper

$$A \operatorname{cos}. \zeta + B \operatorname{sin}. \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0$$

quae duae postremae aequationes cum binis illis initio inuentis problema nostrum penitus resoluent. Quare quum supra inuenissemus $A = 0$ et $D = -C$, hae duae posteriores aequationes dabunt

$$-B \operatorname{sin}. \zeta + C e^{\zeta} - C e^{-\zeta} = 0 \text{ et } B \operatorname{sin}. \zeta + C e^{\zeta} - C e^{-\zeta} = 0$$

vnde manifesto sequitur, fore $B \operatorname{sin}. \zeta = 0$, siue $\operatorname{sin}. \zeta = 0$, ideoque ζ vel π vel 2π vel 3π vel 4π etc. siue in genere $\zeta = i\pi = \frac{\theta a}{b}$ ita vt habeamus $\theta = \frac{ib\pi}{a}$, quare quum pro tempore vnius vibrationis sit $\theta \theta t = \pi$ erit hoc tempus $= \frac{aa}{iibb.\pi}$, vnde diuersas vibrationum species sequenti Tabella exhibemus:

	Tempus vnius vibrat.	Sonus seu num. vibrat.
$i = 1$	$0,3183 \frac{aa}{bb}$	$3,1416 \frac{bb}{aa}$
$i = 2$	$0,0796$	$12,5664 \frac{bb}{aa}$
$i = 3$	$0,0354$	$28,2744 \frac{bb}{aa}$
$i = 4$	$0,0199$	$50,2656 \frac{bb}{aa}$
	etc.	etc.

sicque hi diuersi soni secundum ipsos numeros quadratos intenduntur.

Coroll.

Coroll.

Quando ergo lamina vtroque termino A et B ſtylo eſt defixa ſoni diuerſi plane erunt regulares et inter ſe harmonici, ac ſi cum ſonis praecedentis problematis conferantur, aliquanto reperientur graviores, quam ſi lamina in vnico tantum termino ſtilo figeretur.

Problema IV.

Si lamina elaſtica priori termino A, vt ante fuerit ſtylo A α defixa, ſed altero termino B b muro infixa, definire motus vibratorios, quos haec lamina recipere poteſt.

Solutio.

XXVII. Hic omnia perinde ſe habebunt vti in problemate praecedente donec ad terminum B vsque perueniatur, erit igitur quoque $A = 0$; et $D = -C$ et vis quam ſtylus A α ſuſtinet

$$A e = E = -Kcc.\frac{\theta^2}{b^3}\text{cof.}\,\theta\theta t(-B+C-D),$$

tum vero in ipſo puncto B vbi $x = a$ et $\Phi = \zeta$ erit 1°. $y = 0$ vnde fit

$$A\,\text{cof.}\,\zeta + B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0,$$

deinde vero quia lamina hic muro eſt infixa erit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ſiue

$$-A\,\text{fin.}\,\zeta + B\,\text{cof.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

vnde quum ſit $A = 0$ et $D = -C$, erit

$$B\,\text{fin.}\,\zeta + C(e^{\zeta} - e^{-\zeta}) = 0 \text{ et } B\,\text{cof.}\,\zeta + C(e^{\zeta} + e^{-\zeta}) = 0$$

et

et $\text{Tang.}\ \zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}} = \frac{e^{2\zeta} - 1}{e^{2\zeta} + 1}$,

quae aequatio quum plane conueniat cum ſolutione Problematis tertii manifeſtum eſt etiam easdem vibrationum ſpecies hic locum eſſe habituras, quas ergo in ſequente Tabella ſiſtimus:

Temp. vibrat.	Soni editi
I. $0,20375\,\frac{aa}{bb}$	$4,9079\,\frac{bb}{aa}$
II. $0,06288\,\frac{aa}{bb}$	$15,9044$
III. $0,03013\,\frac{aa}{bb}$	$33,1832$
IV. $0,01762\,\frac{aa}{bb}$	$56,7451.$

Quod autem ad vires ſpectat, quas ipſe murus ſuſtinet, conſideremus primo totum momentum virium ab A vsque ad B laminae applicatarum, quod erat

$$-Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

cui aequale eſſe debet momentum a muro ſuſtentatum, vnde ſi in b concipiatur vis tantum momentum producens, quae ſit $= G$, tum in puncto B ſuſtinebit tantam vim $Bf = F$ quae cum reliquis nimirum E, et $\int p\,dx$ in nihilum redigatur.

Coroll.

Omnino hic notatu dignum eſt, quod lamina altero termino ſtylo, altero vero muro infixa, eosdem plane ſonos edat, ac ſi altero termino eſſet libera, altero tantum ſtylo defixa, ex quo ſequitur terminum liberum perinde ſe habere ad terminum ſtylo

ſtylo defixum, vti terminus ſtylo defixus, ſe habet ad terminum muro infixum.

Problema V.

Si lamina vtroque termino A a et B b fuerit muro immobili infixa, definire motus vibratorios quos recipere poterit. Tab. VII. Fig. 8.

Solutio.

Poſita vt ante longitudine laminae $AB = a$, pro eius curuatura ſemper eadem aequatio valebit, qua hactenus ſumus vſi, ac pro hoc caſu ſolutio ſatis expedite euolui poteſt, propterea quod pro vtroque termino A et B, eſt tam $y = 0$, quam $(\frac{dy}{dx}) = 0$ hincque ſequentes quatuor aequationes obtinentur:

$$\text{I.}\quad A + C + D = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C - D = 0$$
$$\text{III.}\quad A\,\text{cof.}\,\zeta + B\,\text{fin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$
$$\text{IV.}\quad -A\,\text{fin.}\,\zeta + B\,\text{cof.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

quarum III. cof. ζ − IV. fin. ζ praebet

$$A = Ce^{\zeta}(\text{fin}\,\zeta - \text{cof.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{fin.}\,\zeta + \text{cof.}\,\zeta)$$

$$= -C - D, \text{ vnde } \frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{fin.}\,\zeta + \text{cof.}\,\zeta) - 1}{e^{\zeta}(\text{fin.}\,\zeta - \text{cof.}\,\zeta) + 1};$$ ſimili modo

III. fin. ζ + IV. cof. ζ dat

$$B = -Ce^{\zeta}(\text{cof.}\,\zeta + \text{fin.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{fin.}\,\zeta - \text{cof.}\,\zeta)$$

$$= -C + D, \text{ vnde } \frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{fin.}\,\zeta - \text{cof.}\,\zeta) + 1}{-e^{\zeta}(\text{cof.}\,\zeta + \text{fin.}\,\zeta) + 1}$$

 qui

qui valores inter se aequati producunt sequentem aequationem:

$$2 = \cos. \zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta}),$$

quae est eadem solutio ac ea ad quam Problema I^{mum} perduxerat, ita vt sequens Tabella iterum sit habitura locum:

	Temp. vibrat.	Soni editi
I.	$0,14042\,\frac{aa}{bb}$	$7,1214\,\frac{bb}{aa}$
II.	0,05092	19,6388
III.	0,02493	40,1107
IV.	0,01573	63,5438
	etc.	etc.

Coroll.

Maxime hic memoratu dignum occurrit, quod lamina vtrinque eosdem sonos edat, atque lamina vtrinque libera, idque eo magis quod modo ante vidimus, si alter terminus stylo sit defixus, eundem sonum oriri, siue alter terminus fuerit liber, siue muro infixus, ita vt hi duo status, quibus lamina vel est libera, vel muro infixa, quasi inter se conuenire videantur, interim tamen aliquod essentiale discrimen intercedit, quum casus principalis, quem initio tractauimus, vbi alter terminus liber, alter muro erat infixus, alias dederit vibrationes, quam casus vbi vterque terminus erat liber, affinitas certe insignis intercedit ratione formularum ex quibus angulum ζ elici oportet, quippe quae pro his casibus tantum signo differant.

Proble-

Problema VI.

Si lamina vtroque termino A et B fuerit libera sed circa medium alicubi in C stylo defixa, motus vibratorios definire, quos recipere potest.

Solutio.

Antequam solutionem huius problematis suscipiamus, sequentia praenotari oportet: 1°. in ipso puncto C vbi applicata perpetuo euanescere debet, euidens est vtrinque angulos A C E et B C F aequales esse debere propterea quod lamina nusquam inflexionem ad angulum finitum admittit, quum ergo hi duo anguli simul euanescant et simul maxime ab axe declinent perspicuum est, ambas portiones C E et C F paribus temporibus oscillationes suas esse absoluturas, interim tamen stylus in C defixus necessario saltum in lege continuitatis producere debet, quum portio C F certe alium motum sit receptura, quam si stylus abesset, tempore tamen vibrationis eodem manente, ita vt pro vtraque portione littera nostra θ, eundem habeat valorem. His igitur notatis, ponamus portionem $AC = \alpha$ et alteram $BC = \beta$, ita vt $\alpha + \beta$ aequetur toti longitudini a vocetur pro priori parte $AX = x$ et $XY = y$, pro altera vero parte $Bx' = x'$ et $Y'x' = y'$, et statuentur aequationes ponendo breuitatis gratia $\frac{\theta x}{b} = \Phi$ et $\frac{\theta x'}{b} = \Phi'$. Tab. VII. Fig. 9.

Pro portione E C

$$y = \text{cos.}\, \theta\, \theta t (A \,\text{cos.}\, \Phi + B \,\text{sin.}\, \Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi}$$

Pro altera portione F C

$$y' = \operatorname{cof.} \theta\theta t (A' \operatorname{cof.} \Phi' + B' \operatorname{fin.} \Phi' + C' e^{\Phi'} + D' e^{-\Phi'}).$$

Confideremus priorem portionem E C pro qua fi $x = 0$, debet effe tam $(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = 0$ quam $(\frac{d^3 y}{d\,x^3}) = 0$, vnde fequuntur hae duae determinationes:

$$-A + C + D = 0 \text{ et } -B + C - D = 0,$$

quod fi nunc a termino E vsque ad C progrediamur fumendo $x = \alpha$ et ponendo $\frac{\theta\alpha}{b} = \zeta$, pro hoc puncto C habemus 1°. $y = 0$ vnde fit

$$A \operatorname{cof.} \zeta + B \operatorname{fin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0,$$

praeterea notentur tres fequentes valores

$$(\tfrac{d\,y}{d\,x}) = + \tfrac{\theta}{b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A \operatorname{fin.} \zeta + B \operatorname{cof.} \zeta + C e^{\zeta} - D e^{-\zeta})$$

$$(\tfrac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = \tfrac{\theta\theta}{b\,b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A \operatorname{cof.} \zeta - B \operatorname{fin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta})$$

$$(\tfrac{d^3 y}{d\,x^3}) = \tfrac{\theta^3}{b^3} \operatorname{cof.} \theta\theta t (+A \operatorname{fin.} \zeta - B \operatorname{cof.} \zeta + C e^{\zeta} - D e^{-\zeta})$$

quibus formulis indoles curuae circa punctum C determinatur. Simili modo ex altera parte, fi fumamus $x' = \beta$ et ponamus $\frac{\theta\beta}{b} = \zeta'$ obtinebimus fequentes formulas:

$$-A' + C' + D' = 0, \quad -B' + C' - D' = 0;$$

$$A' \operatorname{cof.} \zeta' + B' \operatorname{fin.} \zeta' + C' e^{\zeta'} + D' e^{-\zeta'} = 0$$

$$(\tfrac{d\,y'}{d\,x'}) = \tfrac{\theta}{b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A' \operatorname{fin.} \zeta' + B \operatorname{cof.} \zeta' + C' e^{\zeta'} - D' e^{-\zeta'})$$

$$(\tfrac{d\,d\,y}{d\,x'^2}) = \tfrac{\theta\theta}{b\,b} \operatorname{cof.} \theta\theta t (-A' \operatorname{cof} \zeta' - B' \operatorname{fin.} \zeta' + C' e^{\zeta'} + D' e^{-\zeta'})$$

$$(\tfrac{d^3 y'}{d\,x'^3}) = \tfrac{\theta^3}{b^3} \operatorname{cof.} \theta\theta t (+A' \operatorname{fin.} \zeta' - B' \operatorname{cof.} \zeta' + C' e^{\zeta'} - D' e^{-\zeta'}).$$

Hic igitur habemus fex aequationes determinatas pro determinandis noftris octo coefficientibus A, B, C, D et et A', B', C', D'. Deinde quia vti iam notauimus debet esse $(\frac{dy}{dx}) = (\frac{dy'}{dx'})$; hinc nascitur septima aequatio

$$-A\,\text{sin.}\,\zeta + B\,\text{cos.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = -A'\,\text{sin.}\,\zeta' + B'\,\text{cos.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} - D'e^{-\zeta'}.$$

Octaua autem aequatio inde est petenda, quod ambae portiones in puncto C communi curuatura debent esse praeditae, vnde si formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ fuerit positiua, curuatura in C sursum verget, at si formula $(\frac{ddy'}{dx'^2})$ quoque esset positiua, curuatura deorsum vergeret, ideoque priori esset contraria, quare vt curuatura vtrinque fiat communis necesse est, vt summa istarum formularum euanescat, ex quo octaua nostra aequatio ita se habebit:

$$-A\,\text{cos.}\,\zeta - B\,\text{sin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} - A'\,\text{cos.}\,\zeta' - B'\,\text{sin.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} + D'e^{-\zeta'} = 0.$$

Reliquae autem formulae $(\frac{d^3y}{dx^3})$; $(\frac{d^3y'}{dx'^3})$ inseruiunt inuestigandae vi Cg quam stylus in C sustinet, quam inuestigationem, quum parui sit momenti, hic non respicimus. Ex octo autem illis aequationibus non solum relatio inter octo nostras incognitas A, B, C, D et A', B', C', D definietur; sed insuper ad aequationem peruenietur ab his litteris immunem, ex qua angulos ζ et ζ' erui oportebit, ad quod vtique vna aequatio sufficit, quum ratio istorum angulorum ζ et ζ' detur, quippe quae est vt α ad β. Elisis autem litteris A, B et A', B' sex priores aequationes reducuntur ad has relationes:

$\frac{C}{D} = \frac{-\text{cos}.\zeta + \text{sin}\,\zeta - e^{-\zeta}}{\text{cos}.\zeta + \text{sin}.\zeta + e^{\zeta}}$; $\frac{C'}{D'} = \frac{-\text{cos}.\zeta' + \text{sin}.\zeta' - e^{-\zeta'}}{\text{cos}.\zeta' + \text{sin}.\zeta' + e^{\zeta'}}$

Quoniam autem hic indefinita ratio angulorum ζ et ζ' calculi euolutionem difficillimam reddere debet, casum quo $\beta = \alpha$ ideoque angulus $\zeta = \zeta'$ accuratius expediamus:

Casus quo stylus C per ipsum punctum medium laminae transit, ita vt sit $\beta = \alpha$.

Quum igitur hic sit $\zeta = \zeta' = \frac{\theta\alpha}{b} = \frac{\theta\,l}{2\,b}$

$\frac{C}{D}$ et $\frac{C'}{D'}$ inter se fient aequales fractioni scilicet

$$\frac{-\text{cos}.\,\zeta + \text{sin}.\,\zeta - e^{-\zeta}}{\text{cos}.\,\zeta + \text{sin}.\,\zeta + e^{\zeta}},$$

ita vt iam sit

$$C = D\,V \text{ et } C' = D'\,V$$

hincque

$$A = D(1 + V) \text{ et } B = D(V - 1);\; A' = D'(V + 1)$$

et $B' = D'(V - 1)$,

qui valores in septima et octaua substituti praebent:

$$(D - D')(V + 1)\text{sin}.\zeta - (D - D')(V - 1)\text{cos}.\zeta - (D - D')Ve^{\zeta} + (D - D')e^{-\zeta} = 0$$

$$(D + D')(V + 1)\text{cos}.\zeta + (D + D')(V - 1)\text{sin}.\zeta - (D + D')Ve^{\zeta} - (D + D')e^{-\zeta} = 0$$

vnde patet esse vel $D' = -D$ vel $D' = +D$ ideoque geminam solutionem prodire

I. Sit igitur 1°. $D' = -D$ eritque

$$\overline{V + 1}.\,\text{sin}.\zeta - (V - 1)\text{cos}.\zeta - V e^{\zeta} + e^{-\zeta} = 0$$

et

et ſi loco V eius valor ſubſtituatur, reperietur

$$2 = -\operatorname{cof.}\zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

II. Sin autem ſumamus $D' = D$ debebit eſſe

$$(V+1)\operatorname{cof}\zeta + (V-1)\operatorname{fin.}\zeta - V e^{\zeta} - e^{-\zeta} = 0,$$

ex quo pro V ſubſtituto valore habebitur

$$e^{2\zeta} = \frac{\operatorname{cof.}\zeta + \operatorname{fin.}\zeta}{\operatorname{cof.}\zeta - \operatorname{fin.}\zeta}.$$

Vnde patet priori caſu laminam perinde contremiſcere, atque in noſtra euolutione principali, ſi longitudo laminae tantum ad ſemiſſin reduceretur, poſteriori vero caſu tremores conuenient cum Problemate ſecundo, ſi ibi etiam longitudo laminae duplo ſumatur minor, ſiue aequalis ſemiſſi noſtrae laminae A B. Atque hinc facile intelligere licet, quomodo calculus inſtitui deberet, ſi lamina adeo in pluribus punctis ſtylo figeretur.

DE