RESOLVTIO AEQVATIONIS

$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$

PER NVMEROS TAM RATIONALES, QVAM INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Haec forma latiſſime patens, quae inſignem partem Analyſeos Diophanteae complectitur, pro varia indole numerorum A, B, C, D, E, F plures in ſe continet caſus, qui vulgo diuerſis methodis tractari ſolent. Hic autem ſingulari modo eius reſolutionem ſine radicis extractione ita docebo, vt ſolutio non ſolum ad numeros rationales, ſed etiam integros accommodari poſſit.

1. In genere quidem reſolutionem huius aequationis tradere non licet, quia ſaepe vſu venire poteſt, vt ea ſit impoſſibilis, certiſſimum autem criterium poſſibilitatis ſolutionis ſine dubio eſt, ſi vnicus ſaltem caſus, quo huic aequationi ſatisfiat, fuerit cognitus. Ponamus igitur hoc contingere caſu quo $x = a$ et $y = b$, ita vt reuera ſit:

$$A a^2 + 2 B a b + C b^2 + 2 D a + 2 E b + F = 0$$

et quemadmodum ex hoc caſu cognito, alii ſiue

 nume-

numero finiti, siue infiniti, erui queant, hic sum ostensurus.

2. Subtrahatur ista aequatio ab ipsa proposita generali, vt obtineatur haec:

$$A(x^2-a^2)+2B(xy-ab)+C(y^2-b^2)+2D(x-a)+2E(y-b)=0$$

cuius singula membra praeter secundum factorem habent vel $x-a$, vel $y-b$, at membrum secundum pluribus modis in duas partes resolui potest, quarum altera habeat factorem $x-a$, altera $y-b$,

$$xy-ab=x(y-b)+b(x-a)=y(x-a)+a(y-b)$$

vt autem ambae litterae x et y, parem rationem ineant, hac resolutione vtamur:

$$2(xy-ab)=(x-a)(y+b)+(x+a)(y-b);$$

quo facto aequatio nostra sequentem induet formam

$$A(x-a)(x+a)+B(x-a)(y+b)+B(x+a)(y-b)+C(y-b)(y+b)+2D(x-a)+2E(y-b)=0.$$

3. Consideretur nunc ratio quantitatum $x-a$ et $y-b$ tamquam data, ac statuatur

$\frac{x-a}{y-b}=\frac{p}{q}$, ita vt sit: $qx-aq=py-bp$,

qua ratione introducta nostra aequatio euadet:

$$Ap(x+a)+Bp(y+b)+Bq(x+a)+Cq(y+b)+2Dp+2Eq=0$$

ex quibus binis aequationibus vtramque quantitatem quaesitam x et y definire licebit. Quum enim posterior sit

$$(x+a)(Ap+Bq)+(y+b)(Bp+Cq)+2Dp+2Eq=0,$$

prior

prior vero praebeat:

$$y = \frac{qx - aq + bp}{p};$$

hic valor in illa ſubſtitutus dat:

$$(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)x + Aap^2 + 2Cbpq - Caq^2 + 2Dp^2 + 2Epq = 0$$
$$+ 2Bbp^2$$

vnde colligitur

$$x = -\frac{a(Ap^2 - Cq^2) - 2b(Bpp + Cpq) - 2Dp^2 - 2Epq}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}$$

hincque

$$y = +\frac{b(Ap^2 - Cq^2) - 2a(Bqq + Apq) - 2Dpq - 2Eq^2}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}.$$

4. Ecce ergo iam ſumus aſſecuti ſolutionem generaliſſimam aequationis propoſitae in numeris rationalibus, quia enim ambos numeros p et q pro arbitrio aſſumere licet, euidens eſt, omnes plane ſolutiones in his formulis contineri debere. Quod autem ſolutiones in numeris integris attinet, manifeſtum eſt tales exhiberi non poſſe niſi ambo numeratores illarum fractionum diuiſionem admittant per communem denominatorem $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, id quod fieri nequit niſi hic denominator ad numerum ſatis exiguum ſe reduci patiatur. Statim ergo hinc excludi oportet caſus, quibus $B^2 < AC$, ſiue quibus $AC - B^2$ eſt numerus poſitiuus, tum enim quicunque valores loco p et q accipiantur; formulam $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, non infra certum valorem deprimere licebit.

5. Quod ſi ergo numeri A, B et C ita fuerint comparati, vt per certos numeros p et q for-

mula $A p^2 + 2 B p q + C q^2$ ad exiguum numerum, siue vnitatem, siue binarium tam positiue quam negatiue sumtum redigi queat, omnes partes binarum formularum pro x et y inuentarum abibunt in numeros integros. Posito autem isto numero $= \omega$, ita vt his casibus sit ω vel ± 1; vel ± 2, ob $A p^2 + 2 B p q + C q^2 = \omega$, reperitur

$$p = -\frac{Bq \pm \sqrt{((BB - AC) q^2 + A\omega)}}{A};$$

sic formula

$$(BB - AC) q^2 + A\omega$$

debebit esse quadratum, quod quidem plerumque fieri poterit, quia pro ω sumi potest vel $+1$, vel -1, vel $+2$, vel -2, dummodo $BB - AC$ fuerit numerus positiuus non quadratus, etiamsi sine dubio dantur casus, quibus ω maiorem sortitur valorem. Tum vero habebitur:

$$x = \tfrac{a}{\omega}((q^2 - Ap^2) - \tfrac{2b}{\omega}(Bpp + Cpq) - \tfrac{2D}{\omega}p^2 - \tfrac{2E}{\omega}pq$$
$$y = \tfrac{b}{\omega}(Aq^2 - Cp^2 - \tfrac{2c}{\omega}(Bqq + Cpq) - \tfrac{2D}{\omega}pq - \tfrac{2E}{\omega}q^2.$$

6. Vtrum igitur nostra aequatio admittat solutiones in numeris integris, nec ne? iudicium facillime instituitur; consideretur enim formula $BB-AC$, quae si fuerit numerus positiuus non quadratus, semper adeo infinitis modis numerum q assignare licebit, vt formula illa radicalis abeat in numerum rationalem, indeque definietur alter numerus p, quibus adhibitis impetrabimus binos numeros satisfacientes x et y. Sufficiet autem pro q vnicum valorem idoneum inuenisse, dum ex eo pro x et y successi-

fucceffiue innumerabiles valores fatisfacientes deduci poffunt, id quod operae pretium erit clarius oftendiffe. Ponamus fcilicet ex numeris primo fatisfacientibus a et b, hoc modo prodiiffe fequentes:

$$x = \zeta a + \eta b + \theta \quad \text{et} \quad y = \lambda a + \mu b + \nu$$

atque fi iam hi pro a et b adhibeantur, per easdem formulas nouos deducemus valores pro x et y, qui denuo loco a et b affumti praebebunt iterum alios idoneos valores pro x et y, et ita porro.

7. Sint numeri qui hoc modo fucceffiue pro x reperiuntur,

a, a', a'', a''', a'''' etc.

numeri autem pro y refpondentes fint:

b, b', b'', b''', b'''' etc.

atque habebimus fequentes aequationes:

$$\begin{array}{ll}
a' = \zeta a + \eta b + \theta; & b' = \lambda a + \mu b + \nu \\
a'' = \zeta a' + \eta b' + \theta; & b'' = \lambda a' + \mu b' + \nu \\
a''' = \zeta a'' + \eta b'' + \theta; & b''' = \lambda a'' + \mu b'' + \nu \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Ex his relationibus eliminando litteras b, b', fatis fimplex relatio concluditur, inter valores continuos, a, a', a'', quae ita fe habet:

$$a'' = (\mu + \zeta) a' + (\eta \lambda - \mu \zeta) a + \theta (1 - \mu) + \eta \nu.$$

Simili modo eliminando litteras a, a'

$$b'' = (\mu + \zeta) b' + (\eta \lambda - \zeta \mu) b + \lambda \theta + \nu (1 - \zeta),$$

 vnde

vnde patet vtramque feriem effe recurrentem fecundi ordinis, fecundum eandem fcalam relationis:

$$\zeta+\mu\,,\quad \eta\lambda-\zeta\mu$$

vtrinque autem infuper numerum quendam abfolutum addi oportet.

8. Cognita hac fcala relationis formetur haec aequatio quadratica

$$z^2=(\zeta+\mu)z+(\eta\zeta-\zeta\mu)$$

cuius binae radices funt:

$$z=\frac{\zeta+\mu}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{2}\right)^2+\eta\lambda\right)}$$

quarum poteftatibus exprimi poffunt termini generales vtriusque feriei. Quo hoc clarius reddatur, fit prioris feriei

$$a,\ a',\ a'',\ a''' \text{ etc.}$$

terminus quotuscunque $=x$, alterius vero feriei:

$$b,\ b',\ b'',\ b''' \text{ etc.}$$

terminus generalis y, et pofito breuitatis gratia

$$\frac{\zeta+\mu}{2}=r \quad\text{et}\quad \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta-\mu}{4}\right)^2+\eta\lambda\right)}=\sqrt{s}\,,$$

pro priori ferie ftatuatur

$$x=f(r+\sqrt{s})^n+g\,\overline{(r-\sqrt{s})}^n+b,$$

eritque valor fequens

$$x'=f(r+\sqrt{s})\overline{(r+\sqrt{s})}+g(r-\sqrt{s})\overline{(r-\sqrt{s})}^n+b$$

hunccque fequens

$$x''=f(r+\sqrt{s})^2(r+\sqrt{s})^n+g(r-\sqrt{s})^2(r-\sqrt{s})^n+b.$$

Quare cum ex lege progreffionis effe debeat;

$$x''=(\zeta+\mu)x'+(\eta\lambda-\zeta\mu)x+\theta(1-\mu)+\eta\nu$$

vbi

ſi illi valores ſubſtituantur, poteſtates ſponte ſe deſtruunt, ac reſultat

$$b = \frac{\theta(1-\mu)+\eta\nu}{(1-\mu)(1-\zeta)-\zeta\lambda}.$$

Pro coëfficientibus autem f et g conſiderentur termini initiales ante definiti, et facto quidem $n=0$, prodeat $x=a$, hincque erit

$$a = f + g + b,$$

tum vero ponatur $n = 1$ vt prodeat

$$x = a' = \zeta a + \eta b + \theta$$

fiatque ea

$$= f(r + \sqrt{s}) + g(r - \sqrt{s}) + b,$$

et quia

$f + g = a - b$, erit $a' = (a-b)r + (f-g)\sqrt{s} + b)$,

hincque

$$f - g = \frac{a'}{\sqrt{s}} - \frac{(a-b)r}{\sqrt{s}} - \frac{b}{\sqrt{s}} = \frac{a' - ar - b(1-r)}{\sqrt{s}}.$$

Eodem modo pro altera ſerie recurrente terminus generalis y reperietur, ita vt in genere nihil amplius deſiderari poſſit.

9. Caeterum vti iam innuimus, dantur caſus, quibus formula $App + 2Bpq + Cqq$, neque ad vnitatem, neque ad binarium deprimi poteſt, conveniet igitur litteras p et q ita aſſumi, vt huic formulae minimus valor concilietur, vnde non parum egregium naſcitur Problema, quo datis numeris A, B, C quaeruntur valores litterarum p et q in integris, vt formula $App + 2Bpq + Cqq$ minimum omnium accipiat valorem.

Alia

Alia Resolutio eiusdem aequationis.

10. Quum tres termini initiales per A multiplicati, factores habeant

$$(Ax+By+y\sqrt{(C^2-AC)})\ ;\ (Ax+By-y\sqrt{(B^2-AC)})$$

totam aequationem sub tali forma repraesentare licebit:

$$(Ax+By+M+(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})(Ax+By)+M$$
$$-(y+N)\sqrt{(B^2-AC)})=O,$$

quae euoluta praebet

$$A^2x^2+2ABxy+ACy^2+2AMx+(2MB-2NB^2+2ACN)y$$
$$+M^2-B^2N^2+ACN^2-O=0$$

qua cum forma proposita comparata assequimur:

$$2AD=2AM\ ;\ D=M$$
$$2AE=2MB-2N(B^2-AC)$$
$$AF=M^2-N^2(B^2-AC)-O,\ \text{hincque}$$
$$M=D;\ N=\frac{BD-AE}{B^2-AC};\ O=D^2-AF-\frac{(BD-AE)}{B^2-AC}.$$

11. Inuentis igitur valoribus M, N et O, ponatur breuitatis gratia $BB-AC=k$, vt aequatio nostra per factores irrationales expressa sit

$$(Ax+By+D+(y+N)\sqrt{k})(Ax+By+D-(y+N)\sqrt{k})=O.$$

Et quia assumimus vnam solutionem iam esse cognitam, qua sit $x=a$ et $y=b$, habebimus quoque

$$(Aa+Bb+D+(b+N)\sqrt{k})(Aa+Bb+D-(b+N)\sqrt{k})=O$$

quocirca bina haec producta inter se aequalia esse debebunt; statuamus hinc breuitatis gratia:

$$Ax+By+M=P\ ;\ (y+N)=Q$$
$$Aa+By+M=G;\ b+N=H$$

ita

ita vt nostra binorum productorum aequalitas fiat:

$$(P+Q\sqrt{k})(P-Q\sqrt{k})=O=(G+H\sqrt{k})(G-H\sqrt{k}),$$

vbi notandum, si prior factor illius producti, alterutri factori istius aequalis ponatur, tum quoque posteriorem factorem illius sponte alteri huius aequalem esse futurum, quoniam discrimen tantum in signo quantitatis radicalis $\sqrt{k}$ est situm. Manifestum autem est, si factores priores inter se aequales statuantur et partes tam rationales, quam irrationales seorsim aequentur, scilicet $F=G$ et $Q=H$, inde ipsum casum cognitum esse proditurum, nempe $x=a$ et $y=b$.

12. Sin autem hoc modo prior factor illius producti, posteriori huius aequetur, vt sit

$$P+Q\sqrt{k}=G-H\sqrt{k},$$

noua solutio hinc elicietur, aequalitas enim

$Q=-H$ dabit $y+N=-b-N$, siue $y=-b-2N$,

vnde altera conditio $P=G$ dabit

$$Ax-Bb-2NB+M=Aa+Bb+M \text{ seu}$$
$$Ax=Aa+2Bb+2NB, \text{ hincque } x=a+\frac{2B(b+N)}{A}.$$

Ergo ex qualibet solutione iam inuenta, puta $x=a$ et $y=b$, alia quasi sociata ex ea facillime concluditur; quippe quae si loco M et N valores assumti restituantur, praebebit

$$x=a+\frac{2B}{A}\left(b+\frac{BD-AE}{(B^2-AC)}\right) \quad y=-b-\frac{2(BD-AE)}{B^2-AC}.$$

Quae quidem solutio numeris fractis continetur, nisi forte numeratores fuerint per denominatores suos diuisibiles.

13. Quo autem hinc plures atque adeo infinitas ſolutiones eliciamus, in ſubſidium vocemus formulam $s = \sqrt{(k r^2 + 1)}$, quippe quae methodo Pelliana ſemper infinitis modis reſolui poteſt, dummodo k non fuerit vel numerus negatiuus, vel numerus quadratus. Quum enim hinc fiat $ss - kr^2 = 1$, noſtram aequationem hac forma repraeſentare poterimus:

$$P^2 - k Q^2 = (G^2 - k H^2)(s s - k r^2).$$

Hincque per factores irrationales ſtatuamus

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k}) = Gs + kHr + (Gr + Hs)\sqrt{k}$$

ſic enim ſimul toti aequationi ſatisfiet, ſi quidem partes rationales et irrationales ſeorſim aequantur. At irrationales praebent:

$$Q = Gr + Hs,\ y + N = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns;$$
$$y = Aar + Bbr + Mr + bs + Ns - N.$$

At partes rationales dant:

$$P = Gs + kHr;\ \text{ſeu}\ Ax + By + D = Aas + Abs + Ds + kr + kNr$$

vnde

$$x = s\left(a + \frac{D - BN}{A}\right) + r\left(\frac{kb + kN - B^2 b - BD}{A} - Ba\right) + \frac{BN - D}{A}.$$

14. Nunc igitur loco litterarum M et N reſtituantur valores ſupra inuenti, atque pro noſtris quantitatibus quaeſitis x et y ſequentes reperiuntur formulae, ſi ſcilicet loco k ſcribatur $B^2 - AC$:

$$x = \left(a + \frac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)s + Ba + Cb + E)(-r) + \frac{D - EB}{B^2 - AC}$$
$$y = \left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)s + (Bb + Aa + D)r + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

vbi

vbi permutatio, quae inter litteras x et y locum habet, manifesto elucet.

15. Quod si hi valores pro x et y inuenti loco a et b substituantur in istis formulis, pro x et y inde noui valores eruentur, qui denuo loco a et b sumti alios nouos pro x et y praebebunt, et ita porro in infinitum. Verum omnes istos valores simul in formulis generalibus complecti licebit, vti iam supra fecimus. Sequenti autem modo idem negotium multo commodius et succinctius conficietur.

16. Quoniam $ss - krr = 1$, atque adeo omnes potestates ipsius $ss - krr$ etiam vnitati aequantur, ponere poterimus

$$P^2 - kQ^2 = (G^2 - kH^2)(ss - krr)^n,$$

hincque per factores irrationales

$$P + Q\sqrt{k} = (G + H\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

quia autem huius potestatis aliae partes sunt rationales, aliae irrationales per $\sqrt{k}$ affectae, statuamus

$$(s + r\sqrt{k})^n = S + R\sqrt{k}$$

atque vt ante hinc sequentes valores pro x et y eliciemus

$$x = \left(a + \tfrac{EB - CD}{B^2 - AC}\right)S + (Ba + Cb + E)(-R) + \tfrac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(b + \tfrac{BD - AE}{B^2 - AC}\right)S + (Bb + Aa + D)\,R \quad + \tfrac{AE - BD}{B^2 - AC}.$$

17. Quum autem sit $S + R\sqrt{k} = (s + r\sqrt{k})^n$ erit eodem modo $S - R\sqrt{k} = (s - r\sqrt{k})^n$

vnde deducimus

$$S = \tfrac{1}{2}(s + r\sqrt{k})^n + \tfrac{1}{2}(s - r\sqrt{k})^n \text{ et}$$

$$R = \tfrac{1}{2\sqrt{k}}(s + r\sqrt{k})^n - \tfrac{1}{2\sqrt{k}}(s - r\sqrt{k})^n$$

 quibus

quibus valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$x = \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC} + \frac{a\sqrt{k} - Ba - Cb - E}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{EB - CD}{2(B^2 - AC} + \frac{a\sqrt{k} + Ba + Cb + E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{CD - EB}{B^2 - AC}$$

$$y = \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC)} + \frac{b\sqrt{k} + Bb + Aa + D}{2\sqrt{k}}\right)(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \left(\frac{BD - AE}{2(B^2 - AC} + \frac{b\sqrt{k} - Bb - Aa - E}{2\sqrt{k}}\right)(s - r\sqrt{k})^n + \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

et quia $k = B^2 - AC$ hae formulae ita ſimpliciores euadent:

$$x = \frac{1}{2k}(EB - CD + ak - (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(EB - CD + ak + (Ba + Cb + E)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(CD - EB)$$

$$y = \frac{1}{2k}(BD - AE + bk + (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s + r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(BD - AE + bk - (Bb + Aa + D)\sqrt{k})(s - r\sqrt{k})^n$$

$$+ \frac{1}{2k}(AE - BD).$$

18. Ante iam vidimus, quamlibet ſolutionem $x = a$ et $y = b$ ſuppeditare aliam ſibi quaſi ſociam:

$$x = a + \frac{2B}{A}\left(b + \frac{BD - AE}{B^2 - AB}\right) \text{ et } y = -b - \frac{2(BD - AE)}{B^2 - AC},$$

quia autem ex ipſa indole noſtrae aequationis, litterae x et y inter ſe permutari poſſunt, dummodo 1°. litterae a et b, 2°. litterae A et C et 3^tio^ litterae D et E inter ſe permutentur, haec conſideratio nobis adhuc aliam ſolutionem ſuppeditabit, ſcilicet

$$x = -a - \frac{2(BE - CD)}{B^2 - AC}; \; y = +b + \frac{2B}{C}\left(a + \frac{BE - CD}{B^2 - AC}\right):$$

Sicque ex eadem ſolutione duae nouae ſociae obtinentur.

19. Haec methodus posterior aequationem nostram resoluendi eo magis est notatu digna, quod ex doctrina irrationalium est petita, cuius alioquin nullus videtur esse vsus in Analysi Diophantea. Eximium autem huius doctrinae vsum iam pridem in Algebra mea Ruthenice et Germanice edita fusius ostendi. Caeterum ad casus particulares nostrae aequationis propositae hic descendere non opus videtur, quum huiusmodi casus iam passim, satis superque sint pertractati.