DEMONSTRATIO THEOREMATIS NEVTONIANI DE EVOLVTIONE POTESTATVM BINOMII PRO CASIBVS QVIBVS EXPONENTES NON SVNT NVMERI INTEGRI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Theorema hoc, ita repraesentari solitum

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}\, a^{n-1} b + \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2}\, a^{n-2} b^2 + \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3}\, a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

quatenus latissime patere, et sub exponente n, omnes plane numeros possibiles complecti censetur, fundamentum constituit vniuersae analyseos sublimioris; vnde eius veritatem solidissime demonstrari necesse est. Modus autem, quo ad hoc theorema est perventum, dum quantitas $a+b$ aliquoties in se inuicem multiplicari solet, ita est comparatus, vt pro exponente n alii numeri non prodeant, nisi qui sint integri positiui, siquidem continuo multiplicando per eandem quantitatem $a+b$ aliae potestates oriri nequeunt, nisi quarum exponentes indicent factorum numerum, qui non numerus integer omnino esse nequit. Interim tamen vix quisquam dubitasse videtur,

detur, quin, ſi haec formula vera fuerit pro omni-
bus numeris integris loco n aſſumtis, eadem quoque
vera ſit futura pro omnibus plane numeris ſiue fra-
ctis, ſiue adeo irrationalibus; quae concluſio quan-
quam hoc caſu locum habet, id tamen ob alias ra-
tiones vſu venit, quandoquidem eiusmodi caſus ex-
hiberi poſſunt, quibus formula quaepiam vera de-
prehenditur, quoties exponens n fuerit numerus in-
teger poſitiuus, eadem autem neutiquam locum
habere poſſit, ſimulac eidem exponenti valores fra-
cti tribuantur.

§. 2. Quo hoc exemplo illuſtremus, propo-
ſita ſit ſequens ſeries

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2}).(1-a^{n-3})}{1-a^4}+\text{etc.}$$

cuius valor quoties exponens n fuerit numerus integer
poſitiuus, ſemper huic ipſi exponenti n aequalis de-
prehenditur, neque tamen hinc concludere licet, hanc
aequalitatem ſubſiſtere, dum pro n alii numeri ac-
cipiuntur; haec autem proprietas locum quoque ha-
bet ſumendo $n=0$, tum enim ob $a^n=1$ ſtatim
primus terminus euaneſcit, vna cum omnibus ſequen-
tibus, quippe qui factorem habent $1-a^n=0$ ita vt
hoc caſu noſtra ſeries fiat $=0$, hoc eſt ipſi expo-
nenti $n=0$ aequalis; tum vero ſumto $n=1$ pri-
mus terminus fit $\frac{1-a}{1-a}=1$ at ſecundus terminus ob
$1-a^{n-1}=0$ euaneſcit vna cum omnibus ſequen-
tibus

tibus, ita vt hoc casu $n=1$ ipsa series fiat $=1$. Consideremus adhuc casum $n=2$, quo primus terminus fit $\frac{1-a^2}{1-a}=1+a$, at secundus terminus praebet $\frac{(1-a^2).(1-a)}{1-a^2}=1-a$, tertius vero cum omnibus sequentibus, ob factorem $1-a^{n-2}=0$ euanescet, ex quo summa nostra seriei erit $=2$ hoc est ipsi n aequalis. Statuamus adhuc $n=3$ et primus terminus dabit $\frac{1-a^3}{1-a}=1+a+a^2$ secundus vero terminus praebet

$$\frac{(1-a^3).(1-a^2).(1-a)}{1-a^3}=1-a-aa+a^3,$$

quartus autem terminus et sequentes omnes quia continent factorem $1-a^{n-3}=0$ euanescunt, vnde nostra series hoc casu $n=3$ euadit $=3$. Similique modo ostendi potest, quicunque numerus integer loco n accipiatur, seriem nostram eidem numero aequalem esse prodituram, quilibet autem facile perspiciet, si caperetur $n=\frac{1}{2}$ hanc seriem maxime esse discrepaturam a valore $\frac{1}{2}$.

§. 3. Cum igitur de hac formula

$$n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\text{etc.}$$

affirmare liceat, eam semper veram esse, quoties n fuerit numerus integer positiuus; neque vero haec aequalitas pro aliis numeris locum habeat, merito quoque dubitare licebit, an nostrum theorema

$$(a+b)^n=a^n+\tfrac{n}{1}.a^{n-1}b+\tfrac{n}{1}.\tfrac{n-1}{2}.a^{n-2}b^2+\tfrac{n}{1}.\tfrac{n-1}{2}.\tfrac{n-2}{3}.a^{n-3}b^3 \text{ etc.}$$

generalissime veritati sit consentaneum, etiamsi certi simus, id verum esse, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus. Quamobrem eo magis vtique necesse est, vt ista veritas rigorosa demonstratione corroboretur. Equidem olim demonstrationem ex analysi infinitorum petitam tradideram; sed quia ipsa haec analysis nostro theoremate innititur, eam tanquam petitionem principii penitus reiiciendam nunc agnosco; ab hoc vitio autem immunem demonstrationem dedit Illustr. Academiae nostrae Socius *Aepinus* in Tomo VIII. Nouor. Commentar., vbi pro formula $(x+1)^n$ assumens seriem generalem:

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.}$$

methodo maxime ingeniosa elicuit valores aliquot coefficientium A, B, C, D etc. et ex eorum consensu cum serie *Neutoniana*, sine dubio rite concludere potuit, etiam reliquos omnes regulae fore conformes; interim tamen egregia ista demonstratio plurimum inductione innititur, praeterea vero etiam notari conuenit secundum coefficientem B ex hac methodo determinationem non accepisse, sed ex aliis conditionibus haud parum absconditis et abstrusis repetiisse. Vnde meam demonstrationem Geometris eo gratiorem fore confido, quod in ea nihil plane inductioni tribuitur.

§. 4. Ante omnia autem cum sit $a+b=a(1+\frac{b}{a})$ eritque quoque $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$ sicque totum negotium reducitur ad euolutionem huius potestatis

$(1+\frac{b}{a})$

$(1+\frac{b}{a})^n$, quae porro ponendo $\frac{b}{a}=x$ redit ad hanc $(1+x)^n$, quam nouimus, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus, aequalem fore huic seriei

$$1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.x^4 \text{ etc.}$$

verum si n non fuerit numerus integer positiuus, valorem huius seriei tanquam incognitum spectemus, eiusque loco hoc signo $[n]$ vtamur, ita vt iam in genere habeamus.

$$[n]=1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2 \text{ etc.}$$

de qua etiam nunc plus non nouimus, quam casu, quo n est numerus integer positiuus, fore $[n]=(1+x)^n$ reliquis autem casibus quinam valores huic signo $[n]$ conueniant, sequenti modo inuestigemus: Vnde demum patebit, etiam in genere fore $[n]=(1+x)^n$ quicunque numeri pro exponente n accipiantur, quo pacto proposito nostro plene satisfecerimus.

§. 5. Ad hanc inuestigationem instituendam duas huiusmodi series seu duo talia signa $[n]$ et $[m]$ in se inuicem multiplicemus vt seriem obtineamus huic producto $[m].[n]$ aequalem, quam facile patet huiusmodi forma expressum iri:

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5 \text{ etc.}$$

Cuius coefficientes A, B, C, D, E etc. quemadmodum per binas litteras m et n determinentur vt pateat; ipsam multiplicationem saltem inchoemus

$$[m] = 1 + \tfrac{m}{1} . x + \tfrac{m}{1} . \tfrac{m-1}{2} . x^2 + \text{etc.}$$

$$[n] = 1 + \tfrac{n}{1} . x + \tfrac{n}{1} . \tfrac{n-1}{2} . x^2 + \text{etc.}$$

$$[m] . [n] = 1 + \tfrac{m}{1} . x + \tfrac{m}{1} . \tfrac{m-1}{2} . xx \text{ etc.}$$

$$+ \tfrac{n}{1} . x + \tfrac{m}{1} . \tfrac{n}{1} . xx \text{ etc.}$$

$$+ \tfrac{n}{1} . \tfrac{n-1}{2} . xx \text{ etc.}$$

Quod ſi iam hoc productum inchoatum cum forma aſſumta:

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 \text{ etc.}$$

qua idem productum exprimi ponimus, comparemus, ſtatim intelligitur, fore:

$$A = m + n \text{ et } B = \tfrac{m}{1} . \tfrac{m-1}{2} + \tfrac{m}{1} . \tfrac{n}{1} + \tfrac{n}{1} . \tfrac{n-1}{2} \text{ ſiue:}$$

$$B = \tfrac{mm - m}{2} + m n + \tfrac{nn - 1}{2} \text{ vnde fit:}$$

$$B = \tfrac{m+n}{1} . \tfrac{m+n-1}{2} .$$

§. 6. Quemadmodum hic duos primos coeffi-
cientes A et B, per literas m et n determinare li-
cuit, ita manifeſtum eſt, ſi ſuperior multiplicatio
vlterius continuaretur, inde etiam ſequentes coeffi-
cientes C, D, E etc. per easdem literas m et n de-
finiri poſſe, quamuis calculus mox ita fieret mole-
ſtus, vt maximum laborem requireret. Interim ta-
men hinc tuto concludere poſſumus omnes plane
coefficientes A, B, C, D, E etc. certo modo per
binas literas m et n determinari debere; etiamſi [illegible] ad
rationem, qua quisque per has literas [illegible]nitur, ad
huc ignoremus, hic autem imprimis obſeruari con-
venit, hanc compoſitionis rationem non ab indole li-
tera-

terarum m et n pendere, sed perinde se esse habituram, siue hae literae m et n denotent numeros integros siue alios numeros quoscunque. Hoc ratiocinium non vulgare probe notetur, quoniam ei tota vis nostrae demonstrationis innititur.

§. 7. Hinc facilis nobis via aperitur, veros valores omnium coefficientium A, B, C, D, E etc. inueniendi, dum scilicet literas m et n tanquam numeros integros spectamus, quandoquidem hinc eaedem determinationes oriuntur ac si quoscunque alios numeros denotarent. Spectatis autem literis m et n vt numeris integris vtique habebimus $[m] = (1+x)^m$ et $[n] = (1+x)^n$, vnde harum formularum productum erit $[m].[n] = (1+x)^{m+n}$ iam vero haec potestas euoluitur in hanc seriem:

$$1 + \frac{m+n}{1}.x + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n}{2}.x^2 + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.\frac{m+n-2}{3}.x^3$$

nunc igitur si literas m et n in genere spectemus hanc seriem isto signo $[m+n]$ indicari oportet, vnde hanc insignem veritatem nanciscimur, semper esse $[m].[n] = [m+n]$ quicunque etiam numeri loco illarum literarum adhibeantur.

§. 8. Cum igitur binae huiusmodi formulae $[m]$ et $[n]$ in se inuicem ductae praebeant simplicem formulam eiusdem indolis, ita etiam plures eiusmodi formulae in se inuicem ductae ad simplicem reuocabuntur. habebimus scilicet sequentes reductiones.

$[m].[n] = [m+n]$

$[m].[n].[p] = [m+n+p]$

$[m].[n].[p].[q] = [m+n+p+q]$ etc.

 hinc

hinc si omnes isti numeri m, n, p, q etc. inter se capiantur aequales scilicet $= m$ obtinebimus sequentes reductiones potestatum

$$[m]^2 = [2\,m];\ [m]^3 = [3\,m];\ [m]^4 = [4\,m];\ \text{etc.}$$

vnde generaliter erit $[m]^a = [a\,m]$; denotante a numerum quemcunque integrum.

§. 9. His praenotatis denotet litera i numerum quemcunque integrum positiuum ac statuamus primo $2\,m = i$ vt sit $m = \frac{i}{2}$ ac postremarum formularum prima dabit $[\frac{i}{2}]^2 = [i]$ quia autem i est numerus integer, erit $[i] = (1 + x)^i$ (vide §. 4.) sicque erit $[\frac{i}{2}]^2 = (1 + x)^i$ vnde radicem quadratam extrahendo fit $[\frac{i}{2}] = (1 + x)^{\frac{i}{2}}$ sicque iam tantum sumus consecuti, vt theorema Neutonianum etiam verum sit casibus, quibus exponens n est huiusmodi fractio $\frac{i}{2}$.

§. 10. Simili modo si ponamus $3\,m = i$ vt sit $m = \frac{i}{3}$, altera formularum superiorum praebet $[\frac{i}{3}]^3 = [i] = (1 + x)^i$ hinc radicem extrahendo nanciscimur $[\frac{i}{3}] = (1 + x)^{\frac{i}{3}}$ sicque theorema nostrum etiam verum est si exponens n fuerit huiusmodi fractio $\frac{i}{3}$, atque hinc in genere manifestum fore $[\frac{i}{a}] = [1 + x]^{\frac{i}{a}}$ ita vt iam demonstratum sit, theorema nostrum verum esse, si pro exponente n fractio quaecunque $\frac{i}{a}$ accipiatur, vnde veritas iam est euicta pro omnibus numeris positiuis loco exponentis n accipiendis.

§. 11.

§. 11. Superest igitur tantum, vt veritas quoque ostendatur pro casibus, quibus exponens n est numerus negatiuus. Hunc in finem in subsidium vocemus reductionem primo inuentam $[m].[n]=[m+n]$ vbi denotet m, numerum positiuum siue integrum siue fractum ita vt sit vti modo ostendimus $[m]=(1+x)^m$, deinde vero statuatur $n=-m$ eritque $m+n=0$ ideoque $[0]=(1+x)^0=1$, quibus substitutis formula superior suppeditat $(1+x)^m$. $[-m]=1$ vnde colligimus $[-m]=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}$ sicque etiam demonstratum est theorema Neutonianum verum quoque esse, si exponens n fuerit numerus negatiuus quicunque atque adeo hoc theorema nunc quidem firmissimis rationibus est confirmatum.

PROBLE-