DE MOTV OSCILLATORIO BINARVM LANCIVM EX LIBRA SVSPENSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Omnino singulare atque maxima attentione dignum videtur illud oscillationum genus, cuius nuper mentionem fecit Illustrissimus *Bernoullius*, his verbis:

Cum aliquando in libra, maiori eaque subpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem, promoxque rursus dimitterem, accidit vtique, vt protinus hinc inde oscillaret, nec ab initio lanx opposita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari sensimque maiores oscillationes formare, dum e contrario lanx prior motum suum oscillatorium gradatim perderet tandemque vere quiesceret; Hoc ipso momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis sociae fere aequalem, attingebat; tunc ordine contrario, eaedem mutationes repetebantur, vsque, dum prima lanx motum suum primitiuum integrum resumeret sociaque quieti ad momentum redderetur: haec autem oscillationum communicatio ac reciprocatio diu satis sese manifestabat:

Non

Non dubito quin determinatio motus iſtius oſcillatorii omnibus geometris maxime ardua videatur, neque enim video, quemadmodum ſubſidia quibus hactenus ad alia oſcillationum genera euoluenda feliciter vſi ſunt, ad genus hocce expediendum, cum ſucceſſu adhiberi queant; quamobrem ad prima motus principia confugiendum eſſe; cenſeo, vt omnia commemorata motus Phaenomena, quae vtique ſummopere admirabilia videntur rite explicari queant. Hanc igitur inueſtigationem hic ſuſcipere conſtitui, operam imprimis daturus, ne vllam circumſtantiam quae quicquam ad hunc motum conferre valeant ſim praetermiſſurus.

§. 2. Ac primo quidem libra ſeu bilanx, in qua illuſtris Auctor motus illos mirabiles obſeruauit, ſubpigra perhibetur; vnde perſpicuum eſt, centrum grauitatis iugi infra punctum ſuſpenſionis ſeu centrum motus ſitum fuiſſe. Deinde etiam facile intelligitur, motum ab vna lance cum altera communicari non potuiſſe, niſi iugum aliquam inclinationem fuerit paſſum, quam ob rem, vt in motus tam ipſius iugi quam binarum lancium rite inquiram, ad quodcunque tempus ab initio elapſum, quod ſit $= k$, et in minutus ſecundis exprimatur, conſiderabo ſitum tam iugi quam lancium.

§. 3. Sit igitur C punctum ſuſpenſionis, ſeu centrum motus, circa quod iugum in plano verticali eſt mobile, et per hoc punctum C ducatur recta horizontalis $p\,q$, itemque verticalis $C\,c$. Hoc autem Tab. III. Fig. 2.

autem inſtanti iugum reperiatur in ſitu inclinato A C B, ac ponatur angulus inclinationis A C p = B C q = ω: ipſum vero iugum hic tanquam lineam rectam A C B repraeſento, ex cuius extremitatibus A et B lances ſint ſuſpenſae. Vocemus igitur longitudinem brachiorum C A = C B = a et maſſam ſeu pondus ipſius iugi cum trutina, examine, et omnibus partibus quae cum eo firmiter ſunt connexae = M; eius autem centrum grauitatis cadat in punctum G infra C ſitum ad interuallum C G = c, quod ergo a verticali C c declinabit angulo G C c = ω. Praeterea vero ſit momentum inertiae totius iugi reſpectu centri grauitatis G = M $k\,k$, quod ſcilicet reperitur, ſi ſingulae iugi particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum a centro grauitatis G multiplicentur et in vnam ſummam colligantur; vnde momentum inertiae reſpectu centri motus C erit = M $(k\,k + c\,c)$.

§. 4. Nunc porro aſſumamus ambas lances ex ipſis iugi extremitatibus A et B eſſe ſuſpenſas, quare ducantur inde verticales A a et B b, quem ſitum lances tenerent, ſi nullam haberent inclinationem; hic autem ambas lances, tanquam ſimplicia pondera, ope filorum grauitatis expertium ex punctis A et B ſuſpenſa, conſidero, et longitudinem vtriusque fili A P = B Q vocemus = b, pondus autem lancis vtriusque = L. Nunc autem porro lanx A P declinet a verticali A a angulo P A a = η et angulo Q B b = ϑ.

§ 5.

§. 5. Nunc ex punctis P et Q ad axem nostrum horizontalem per C ductum ducamus perpendicula Pp et Qq, atque vt horum locorum P et Q rationem in calculum introducamus, vocemus pro vtroque quasi coordinatas $Cp = x$ et $pP = y$; tum vero $Cq = x'$ et $qQ = y'$, quas autem per elementa iam ante introducta determinari oportet.

§. 6. Hunc infinem pro lance P in verticalem Pp productam ex A ducamus normalem Ar, et quia $AP = b$ et angulus $APr = \eta$ erit Tab. III. Fig. 3.

$$Ar = b \text{ fin. } \eta \text{ et } Pr = b \text{ cof. } \eta.$$

Deinde ex triangulo $AC\alpha$ vbi $CA = a$ et angulus

$$AC\alpha = \omega \text{ erit } A\alpha = a \text{ fin. } \omega \text{ et } C\alpha = a \text{ cof. } \omega,$$

vnde pro puncto P binae coordinatae erunt

$$Cp = x = C\alpha + Ar = a \text{ cof. } \omega + b \text{ fin. } \eta \text{ et}$$
$$Pp = y = Pr - A\alpha = b \text{ cof. } \eta - a \text{ fin. } \omega.$$

Eodem modo pro altera lance, si ex C agantur verticalis $B\beta$ et horizontalis Bs, erit $B\beta = a \text{ fin. } \omega$ Fig. 4.
et $C\beta = a \text{ cof. } \omega$, deinde $Bs = b \text{ fin. } \vartheta$ et $Qs = b \text{ cof. } \vartheta$ vnde colligimus

$$Cq = x' = C\beta - \beta q = a \text{ cof. } \omega - b \text{ fin. } \vartheta \text{ et}$$
$$Qq = y' = Qs + B\beta = b \text{ cof. } \vartheta + a \text{ fin. } \omega.$$

§ 7. Iam pro motu determinando considerentur vires quibus ambae lances sollicitantur, quae quidem primo a grauitate deorsum vrgentur vi $= L$; praeterea vero sustinent tensionem filorum AP et BQ. Sit igitur pro lance P tensio fili $AP = P$, quae resoluta dat vim verticalem secundum $Pp = P \text{ cof. } \eta$

et vim horizontalem secundum $pC = P$ sin. η; ita vt lanx P sursum vrgeatur secundum Pp vi $= P$ cos $\eta - L$, ex quibus viribus motus huius lancis per sequentes duas aequationes differentio differentiales definitur:

I. $\frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{P\,\text{sin.}\,\eta}{L}$ et II. $\frac{ddy}{2gdt^2} = \frac{L - P\,\text{cos.}\,\eta}{L}$.

§. 8. Simili modo altera lanx ob tensionem Q sursum vrgetur vi $= Q$ cos. ϑ, secundem directionem horizontalem vero Cq vi $= Q$ sin. ϑ; sicque deorsum vrgebitur vi $= L - Q$ cos. ϑ; vnde principia motus iterum duas aequationes nobis suppeditant

III. $\frac{ddx'}{2gdt^2} = \frac{Q\,\text{sin.}\,\theta}{L}$ et IV. $\frac{ddy'}{2gdt^2} = \frac{L - Q\,\text{cos.}\,\theta}{L}$

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur.

§. 9. Cum igitur motum vtriusque lancis expediuerimus, contemplemur nunc etiam motum ipsius iugi, qui cum sit gyratorius, quaeramus vires acceleratrices, quae tendant ad angulum $PCA = \omega$ augendum; vbi primo occurrit proprium iugi pondus $= M$, quod, quia in centro grauitatis G collectum est putandum, producet momentum ad angulum ω imminuendum, eritque propterea $= -Mc$ sin. ω. Deinde vero iugum vrgetur a tensione vtriusque fili, et a tensione A P oritur momentum ad angulum ω diminuendum tendens, pro quo inueniendo notetur esse angulum $CAa = 90° - \omega$; ergo quia $PAa = \eta$ erit totus angulus $CAP = 90° - \omega + \eta$, cuius sinus est $=$ cos. $(\omega - \eta)$, ex quo momentum hinc oriundum erit $-Pa$ cos. $(\omega - \eta)$. Ab altera autem parte,

parte, quia eſt angulus $CB\beta = 90° + \omega$ et $QBb = \vartheta$ erit $CBQ = 90° + \omega - \vartheta$, cuius ſinus $= \text{coſ.}(\vartheta - \omega)$. Momentum igitur hinc natum, quia tendit ad angulum ω augendum, erit $= + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)$; ſicque omnia momenta in iugum agentia iunctim erunt

$$-Mc\,\text{ſin.}\,\omega - Pa\,\text{coſ.}(\omega - \eta) + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)$$

quod momentum per momentum inertiae $= M(kk + cc)$ diuiſum praebet accelerationem angularem, quae ſecundum principia motus hanc aequationem ſuppeditat:

$$\text{V.} \quad \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = - \frac{Mc\,\text{ſin.}\,\omega - Pa\,\text{coſ.}(\omega - \eta) + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)}{M(kk + cc)}.$$

Quae quinque aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur.

§. 10. Quo autem pateat, quasnam res ex quinque his aequationibus determinare opporteat, primum ſtatim apparet, ante omnia ambas tenſiones P et Q definiri debere; tum vero ex tribus aequationibus quae relinquentur tantum opus eſt vt noſtros angulos η, ϑ et ω eliciamus. His enim inventis, ad datum quoduis tempus t verum ſitum tam iugi quam ambarum lancium poterimus aſſignare. Sicque tota iſta ſublimis quaeſtio perfecte erit ſoluta; ſaltem ſi quae obſtacula occurrant, id non mechanicae ſed ſoli analyſi erit tribuendum.

§. 11. Statim autem perſpicitur, omnem operam nequicquam impedi et inutiliter collocari, quamdiu tres noſtri anguli η, ϑ, ω ad quantitates notabiles exſurgere poſſent; quam ob rem, vti in plerisque aliis oſcillationum generibus, hos angulos quaſi infinite paruos ſtatuere conuenict, vt eorum ſinus ipsis angulis, cosinus vero vnitati aequales reputari queant; sicque nostra inuestigatio tantum ad oscillationes quam minimas restringetur. Tum vero coordinatae x et y, item x' et y' sequenti modo exprimentur:

$$x = a + b\eta \qquad x' = a - b\vartheta$$
$$y = b - a\omega \quad \text{et} \quad y' = b + a\omega.$$

§. 12. His obseruatis quinque nostrae aequationes sequentes induent formas:

$$\text{I.}\ \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{P\eta}{L}; \quad \text{II.}\ -\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{L}$$
$$\text{III.}\ -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = +\frac{Q\vartheta}{L}; \quad \text{IV.}\ +\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{L}$$
$$\text{V.}\ \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\omega - Pa + Qa}{M(kk+cc)}$$

ex quarum aequationum secunda et quarta statim colligimus ambas tensiones P et Q; erit enim

$$P = \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2} + L \quad \text{et} \quad Q = L - \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2}.$$

§. 13. Substituamus igitur hos valores in tribus reliquis aequationibus, quae euadent

$$\text{I.}\ \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^3} = -\eta - \frac{a\eta\,dd\omega}{2g\,dt^2} \quad \text{III.}\ -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \vartheta - \frac{a\vartheta\,dd\omega}{2g\,dt^2}$$
$$\text{V.}\ \frac{M(kk+cc)\,dd\omega + 2Laa\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -Mc\omega$$

ex quibus iam tres angulos η, ϑ et ω determinare oportet.

§. 14. Quia postrema aequatio solam variabilem ω cum tempore t inuoluit, ab ea resolutione inchoëmus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia

$$\frac{M(kk+cc) + 2Laa}{Mc} = f \text{ vt fiat } \frac{f\,dd\omega}{2g\,dt^2} + \omega = 0,$$

vnde

vnde patet oscillationes iugi similes fore pendulo simplici cuius longitudo $= f$, vnde ista aequatio integrata dabit $\omega = \mathfrak{C}\, \text{sin.}\, (\gamma + t \sqrt{\frac{2g}{f}})$, vbi $\mathfrak{C}$ et γ sunt constantes per duplicem integrationem ingressae; quam ob rem tempus singularum osciliationum quibus iugum agitabitur in minutis secundis expressum erit $= \pi \sqrt{\frac{f}{2g}}$. Cum igitur sit $f = c + \frac{kk}{c} + \frac{2Laa}{Mc}$, patet, si libra non esset subpigra, seu si centrum grauitatis G in ipso centro motus C esset situm, ob $c = 0$ fore $f = \infty$, ideoque iugum nullum motum oscillatorium esse recepturum.

§. 15. Cum igitur sit $\frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{\omega}{f}$ iste valor duas reliquas aequationes ita transformabit

I. $\frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\omega}{f}$; III. $\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\omega}{f}$.

Quia autem angulus ω est quasi infinite paruus, postrema harum aequationum membra saltem in principio praetermittere licebit; vnde vtriusque lancis motus pariter congruet cum oscillationibus penduli simplicis cuius longitudo $= b$. Hincque per quantitates finitas reperietur

I. $\eta = \mathfrak{A}\, \text{sin.}\, (\alpha + t \sqrt{\frac{2g}{b}})$ II. $\vartheta = \mathfrak{B}\, \text{sin.}\, (\beta + t \sqrt{\frac{2g}{b}})$

hi autem valores tantum vt vero proximi sunt spectandi.

§. 16. Quo igitur hos binos motus accuratius definiamus, loco ω in ipsis aequationibus differentialibus suum valorem substituamus; quod quo facilius fieri possit, sit breuitatis gratia

$\sqrt{\frac{2g}{f}} = \lambda$ vt fiat $\omega = \mathfrak{C}\, \text{sin.}\, (\gamma + \lambda t)$, et habebimus has aequationes:

$$\frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

$$\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

atque hic etiam faciamus $\sqrt{\frac{2g}{b}} = \mu$, vt prima membra harum aequationum fiant

$$\frac{dd\eta}{\mu\mu\,dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{dd\vartheta}{\mu\mu\,dt^2}.$$

§. 17. Iam pro priore aequatione ponamus reuera esse

$\eta = \mathfrak{A}\,\text{fin}(\alpha+\mu t)+p$, eritque $d\eta = \mathfrak{A}\mu\,dt\,\text{cof.}(\alpha+\mu t)+dp$ et
$dd\eta = -\mathfrak{A}\mu\mu\,dt^2\,\text{fin.}(\alpha+\mu t)+ddp$,

quo valore substituto erit

$$\frac{ddp}{\mu\mu\,dt^2} = -p + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\alpha+\mu t)\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}.$$

Nunc autem notetur esse

$$\text{fin.}(\alpha+\mu t)\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{cof}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda)).$$

Ponatur

$$p = \tfrac{1}{2}M\,\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) + \tfrac{1}{2}N\,\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

et facta substitutione prodibit sequens aequatio

$$-\frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$= -\tfrac{1}{2}M\,\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}N\,\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$+\frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

Aequentur nunc seorsim tam cosinus differentiae quam cosinus summae, ac obtinebuntur hae aequalitates:

$$0 = \frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}M + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}$$
$$0 = \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}N - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}$$

ex

ex quibus reperietur

$$M = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{\lambda(2\mu - \lambda) f} \quad \text{et} \quad N = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{\lambda(2\mu + \lambda) f}$$

quocirca angulus η ita accuratius exprimetur vt fit,

$$\eta = \mathfrak{A} \sin.(\alpha + \mu t) + \frac{\mu\mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda) f} \cos.(\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\mu\mu a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu + \lambda) f} \cos.(\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda).$$

§. 18. Eodem modo tractemus alteram aequationem, quae eſt

$$\frac{d d \vartheta}{\mu\mu\, dt^2} = -\vartheta - a \vartheta \mathfrak{C} \sin.(\gamma + \lambda t)$$

quae aequatio a praecedente non differt, niſi quod ibi erat $+a$ hic eſt $-a$, ita vt tantum loco a nunc ſcribendum ſit $-a$. Deinde vero, quia hic agitur de angulo ϑ, loco litterarum $\mathfrak{A}$ et α hic ſcribere debemus $\mathfrak{B}$ et β, vnde huius anguli valor correctus erit

$$\vartheta = \mathfrak{B} \sin.(\beta + \mu t) - \frac{\mu\mu a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda) f} \cos.(\beta - \gamma + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\mu\mu a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu + \lambda) f} \cos.(\beta + \gamma) + t(\mu + \lambda)).$$

Erat vero $\omega = \mathfrak{C} \sin.(\gamma + \lambda t)$.

§. 19. In his formulis probe diſtingui conueniet quantitates cognitas et incognitas; cognitae autem ſunt, praeter diſtantias a, b et c vna cum ponderibus L et M quantitates inde formatae f et numeri λ et μ: incognitae igitur erunt ſequentes ſex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et α, β, γ; tot ſcilicet conſtantes arbitrariae ob duplicem integrationem trium aequationum differentio-differentialium introduci debebant, vt ſolutio generalis prodiret; quod etiam natura rei poſtulat. Nam ſi ſtatus initialis quomodocunque fuerit datus, is non

non ſolum per tres angulos η, ϑ et ω determinatur, ſed etiam ad motum, qui ſiue iugo ſiue vtrique lanci imprimi potuit eſt attendendum, vnde ſex conditionibus pro quouis caſu erit ſatisfaciendum.

§. 20. Hunc infinem neceſſe eſt, vt etiam celeritates angulares, quae tribus noſtris angulis praeſenti tempore t conueniunt exprimamus; quae ita ſe habebunt

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \mathfrak{A} \operatorname{cof.} (\alpha + \mu t) - \frac{\mu\mu(\mu - \lambda) a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda)f} \operatorname{fin.} (\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\mu\mu(\mu + \lambda) a \mathfrak{A} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda)f} \operatorname{fin.} (\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda))$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu \mathfrak{B} \operatorname{cof} (\beta + \mu t) + \frac{\mu\mu(\mu - \lambda) a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda)f} \operatorname{fin.} (\beta - \gamma + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\mu\mu(\mu + \lambda) a \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu + \lambda)f} \operatorname{fin.} (\beta + \gamma + t(\mu + \lambda))$$

ac denique

$$\frac{d\omega}{dt} = \lambda \mathfrak{C} \operatorname{cof.} (\gamma + \lambda t)$$

hocque modo tota ſolutio huius problematis difficillimi feliciter ad finem eſt perducta.

§. 21. Iam obſeruauimus, ſi centrum motus C in ipſo centro grauitatis exiſteret, tum fore $f = \infty$ hincque $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}} = 0$, ſicque iugum nullum plane motum oſcillatorium recipere poſſe; quandoquidem in omni ſitu foret in aequilibrio. Vnde etiam ambae lances ita ſeorſim oſcillare poſſent, vt neutrius motus ab altera perturbetur, id quod etiam noſtrae formulae manifeſto declarant; quoniam partes poſteriores, quae ob motum iugi ſunt adiectae euaneſcerent; tum enim anguli η et ϑ ſimpliciter per formulas $\mathfrak{A}$ fin. $(\alpha + \mu t)$ et $\mathfrak{B}$ fin. $(\beta + \mu t)$ exprimerentur,

rentur, ſicque vtriusque motus admodum penduli ſimplicis oſcillationes peragere poſſet, neque earum motus vllo modo in ſe inuicem influeret; hoc autem intelligendum eſt quamdiu iugum maneret in quiete, etſi in ſtatu inclinato. Vt primum autem motum acceperit, quia nullae vires adſunt eum reprimentes, angulus ω mox tantopere increſceret, vt non amplius pro minimo haberi poſſet; hoc igitur caſu ne formulae quidem quas inuenimus locum habere poſſent. At ſi centrum grauitatis G adeo ſupra centrum motus C eſſet poſitum, ita vt interuallum $GC = c$ foret negatiuum, etiam quantitas z negatiua euaderet, numerus autem λ imaginarius; quam ob cauſam omnis motus oſcillatorius penitus excluderetur, quandoquidem iugum a minima inclinatione prorſus prolaberetur.

§. 22. Vt igitur ea Phaenomena quae ab Illuſtri *Bernoulli* commemorantur ſe manifeſtare posſent, omnino requiritur, vt centrum grauitatis G infra centrum motus C cadat, hoc eſt vt libra ſit *ſubpigra*. Interim tamen, quoniam interuallum $CG = c$ ſemper valde exiguum eſſe ſolet, euidens eſt, longitudinem f ſemper fore praegrandem, hincque numerum λ valde paruum; dum contra numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque eſt valde notabilis, niſi forte lances P et Q per breuiſſima fila ſuſpendantur quod autem nunquam fieri ſolet, hanc ob rem in genere hic aſſumere licet, numerum λ ſemper multo minorem eſſe quam μ.

 §. 23.

§. 23. Vt iam in phaenomena motus accura-
tius inquiramus, primum obseruo, qualiscumque si-
tus et motus ambabus lancibus fuerit impressus; si
ipsum iugum in quiete relinquitur, idque in si-
tu suo horizontali, ita vt initio fuerit tam $\omega = 0$
quam $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ob $t = 0$, fore tam $\mathfrak{C}$ sin. $\gamma = 0$ quam
$\lambda\,\mathfrak{C}$ cos. $\gamma = 0$, id quod fieri nequit, nisi sit $\mathfrak{C} = 0$;
posito autem $\mathfrak{C} = 0$, prodiret $\eta = \mathfrak{A}$ sin. $(\alpha + \mu t)$ et
$\vartheta = \mathfrak{B}$ sin. $(\varepsilon + \mu t)$, existente $\omega = \mathfrak{C}$ sin. $(\gamma + \lambda t)$
quae tres formulae nullo modo in se inuicem in-
fluunt. Hoc igitur casu tam iugum quam vtra-
que lanx seorsim motu oscillatorio regulari ferretur,
neque vllius motus a reliquis perturbaretur; quod
cum in phaenomenis memoratis non vsu venerit, id
manifesto est indicio, iugum primo motus initio
vel non fuisse in quiete, vel quandam inclinationem
accepisse, id quod etiam ab impulsu, quem altera
lanx initio accepisse fertur necessario euenire debuit.

§. 24. Ponamus igitur primo initio iugum ita
de situ suo naturali fuisse depulsum, vt tum fuerit
angulus $\omega = m$, neque vero praeterea vllum mo-
tum accepisse; quo posito primo initio vbi $t = 0$
erat $m = \mathfrak{C}$ sin. γ, tum vero $\frac{d\omega}{dt} = \lambda\,\mathfrak{C}$ cos. $\gamma = 0$,
vnde colligimus $\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ et $\mathfrak{C} = m$. Ipsum au-
tem iugum deinceps oscillationes peraget regulares et
conformes pendulo simplici, cuius longitudo $f = c$
$+ \frac{kk}{c} + \frac{2Laa}{Mc}$, vnde fit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ita vt etiam sit
$f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$.

§. 25. Nunc igitur hos valores $\mathfrak{C} = m$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et $f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$ in formulis pro angulis η et ϑ inuentis substituamus, eritque

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{sin.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}(\alpha - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cos.}(\alpha + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{sin.}(\beta + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}(\beta - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cos.}\,\beta + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda)$$

Cum autem sit

$$\text{cos.}(\alpha + t(\mu - \lambda) - 90^\circ) = \text{sin.}(\alpha + t(\mu - \lambda)) \text{ et}$$
$$\text{cos.}\,\alpha + t(\mu + \lambda) + 90^\circ = -\text{sin.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

erit aliquanto concinnius

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{sin.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{sin.}(\alpha + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{sin.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{sin.}(\beta + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{sin.}(\beta + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{sin.}(\beta + t(\mu + \lambda))$$

vnde porro pro vtroque motu angulari deducimus

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\mathfrak{A}\,\text{cos.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}(\alpha + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cos.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\mathfrak{B}\,\text{cos.}(\beta + \mu t) - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}(\beta + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}(\beta + t(\mu + \lambda)).$$

EVOLVTIO CASVS

quo primo initio ambae lances in situ verticali quieuerunt, dum iugum ad angulum ACP $= m$ fuit inclinatum.

§. 26. Cum igitur initio fuerit tam $\eta = 0$ et $\vartheta = 0$ quam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, posito $t = 0$ pro determinatione constantium habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad 0 = \sin.\alpha + \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\sin.\alpha - \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\sin.\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \sin.\beta - \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\sin.\beta + \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\sin.\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \cos.\alpha + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\cos.\alpha - \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\cos.\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \cos.\beta - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\cos.\beta + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\cos.\beta$$

quae ad sequentes formas simpliciores reducuntur

$$\text{I.}\quad 0 = \sin.\alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\sin.\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \sin.\beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\sin.\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \cos.\alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\cos.\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \cos.\beta + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\cos.\beta$$

quibus aequationibus pluribus modis satisfieri posse videtur: aliquos igitur percurramus.

§. 27. Sumamus $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, vt binis prioribus satisfiat; ac posteriores erunt

$$\text{III.}\quad 0 = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{IV.}\quad 0 = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quibus nullo modo satisfieri potest, cum eorum summa

ſumma ſit $0 = 2$. Idem euenit ſi ſumamus $\alpha = 90^\circ$ et $\beta = 90^\circ$, quo binis poſterioribus ſatisfiat; ac priores euadent

$$\text{I. } 0 = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{II. } 0 = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quarum ſumma iterum daret $2 = 0$, id quod eſt abſurdum. Tale autem abſurdum etiam in genere occurrit, cum

$$\text{I fin. } \beta + \text{II fin. } \alpha = 0 = 2 \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } \beta;$$

eodemque modo

$$\text{III cof. } \beta + \text{IV cof. } \alpha = 0 = 2 \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } \beta$$

quod vtrumque ſimul fieri nequit.

§. 28. Verum, quoniam has aequationes ex principalibus vel per $\mathfrak{A}$ vel per $\mathfrak{B}$ diuidendo elicuimus, eos factores quibus totum negotium confici debet e medio ſuſtulimus. Nullo ſcilicet alio modo huic caſui ſatisfieri poteſt, niſi ſtatuendo tam $\mathfrak{A} = 0$ quam $\mathfrak{B} = 0$, vnde intelligimus, hoc caſu ambas lances perpetuo in quiete eſſe permanſuras, neque vllum motum eſſe recepturas, etiamſi interea iugum inclinationes ſuas perpertuo abſoluat.

EVOLVTIO CASVS

quo primo initio vna lanx P a ſitu verticali ad angulum $PAa = n$ diducitur, altera lance in quiete relicta, dum iugum ad angulum $ACP = m$ fuerit inclinatum.

§. 29. Hoc igitur caſu poſito $t = 0$ eſſe oportet $\eta = n$, $\vartheta = 0$, $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, vnde ſequenquentes quatuor obtinemus aequationes iam ad formam ſimpliciſſimam perductas:

$$\text{I.}\quad n = \mathfrak{A}\,\sin.\,\alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a\mathfrak{A}m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\sin.\,\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \mathfrak{B}\,\sin.\,\beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a\mathfrak{B}m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\sin.\,\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \cos.\,\alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu am}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\cos.\,\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \cos.\,\beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu am}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\cos.\,\beta$$

vbi quidem tertia per $\mathfrak{A}$ quarta autem per $\mathfrak{B}$ multiplicanda eſt intelligenda; vnde patet, ſi fuerit $\mathfrak{B}=0$, tam ſecundae quam quartae aequationi ſimul ſatisfieri; tum autem, quia ipſe angulus ϑ euaneſceret, vtcunque reliquis aequationibus ſatisfieret, et altera lanx Q nunquam ad motum eſſet peruentura, vnde concludimus, fieri poſſe, vt altera lanx perpetuo in quiete perſeueret. Pro motu autem lancis P aequationibus I et III ſatisfieri oportet.

§. 30. Tertiae autem aequationi, quoniam pars poſterior prae prima eſt quaſi infinite parua, ſatisfieri nequit, niſi ſit coſ. $\alpha = 0$, hoc eſt $\alpha = 90°$; tum autem pro prima erit

$$n = \mathfrak{A} + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a\mathfrak{A}m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}$$

vnde deducitur valor litterae $\mathfrak{A}$, qui proxime erit $= n$, ita vt pro motu primae lancis habeamus hanc aequationem:

$$\eta = n\,\sin.\,(90° + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu amn}{4g(2\mu-\lambda)}\sin.\,(90° + t(\mu-\lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu amn}{4g(2\mu+\lambda)}\sin.\,90° + t(\mu+\lambda)$$

$\frac{d\eta}{dt}$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu n \operatorname{cof.}(90^\circ \pm \mu t) + \frac{\lambda(\mu-\lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu-\lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu-\lambda))$$
$$- \frac{(\mu+\lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu+\lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu \mp \lambda))$$

vbi notetur esse

$$\operatorname{fin.}(90^\circ + \mu t) = \operatorname{cof.} \mu t \text{ et } \operatorname{fin.} 90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = \operatorname{cof.} t(\mu \pm \lambda);$$
$$\operatorname{cof.}(90^\circ + \mu t) = -\operatorname{fin.} \mu t \text{ et } \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = -\operatorname{fin.} t(\mu \pm \lambda).$$

Vnde patet, motum huius lancis non amplius esse regularem, sed eo magis a motu penduli simplicis esse recessurum, quo maiores fuerint coëfficientes binorum postremorum terminorum. Quin etiam iste motus perturbatus ita repraesentari poterit, secundum principium Celeberrimi *Bernoullii*, vt sit permistus ex triplici oscillationum genere, quorum primi tempus vnius oscillationis sit $= \frac{\pi}{\mu}$, secundi vero $= \frac{\pi}{\mu-\lambda}$ et tertii $= \frac{\pi}{\mu+\lambda}$; haec scilicet permixtio oritur ex motu oscillatorio iugi.

§. 31. Hinc igitur iterum discimus, quomodocunque tam ipsum iugum quam altera lanx initio ad motum fuerint concitati, nullum plane motum in altera lance generari posse, id quod memorato experimento aduersari videtur. Verum probe notandum est, nos hic tantum de oscillationibus minimis loqui, vnde neutiquam asseuerare possumus, talem communicationem in maioribus oscillationibus locum habere non posse. Quoniam enim angulos η, ϑ et ω tam paruos assumsimus, vt loco eorum sinuum ipsos angulos, loco cosinuum vero ipsam vnitatem scribere liceret, euidens est, si ipsos sinus et cosinus in calculum introducere voluissemus, inde vtique in-

gens

gens discrimen oriturum fuisse, neque vero etiam hunc motum ex theoria definire licuisset. Videamus igitur etiam, quales motus sint prodituri, si etiam alteri lanci initio motus quicunque fuerit impressus.

EVOLVTIO CASVS

quo initio praeter inclinationem iugi ad angulum $ACp = m$ vtraque lanx ad quandum inclinationem diducitur, scilicet lanx P ad angulum $PAa = n$ et lanx Q ad angulum $QBb = n'$.

§. 32. Hic scilicet assumimus, neutri lanci initio motum fuisse inpressum, ita vt fuerit tam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ quam $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, ad quod vtique calculus accommodabitur, statuendo tam $\alpha = 90°$ quam $\mathfrak{C} = 90°$. Tum vero ob inclinationes initiales erit vt ante vidimus $\mathfrak{A} = n$ et $\mathfrak{B} = n'$, vnde pro motu vtriusque lancis impetramus has aequationes:

$$\eta = n \operatorname{cos.} \mu t + \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{cos.} t(\mu - \lambda) - \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{cos.} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\vartheta = n' \operatorname{cos.} \mu t - \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{cos.} t(\mu - \lambda) + \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{cos.} t(\mu + \lambda).$$

§. 33. Quo has formulas magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $\lambda\mu\mu\frac{a}{4g} = i$; tum igitur habebimus tam pro motu lancium quam iugi

$$\eta = n \operatorname{cos.} \mu t + \frac{imn}{2\mu - \lambda} \operatorname{cos.} t(\mu - \lambda) - \frac{imn}{2\mu + \lambda} \operatorname{cos.} t(\mu + \lambda)$$

$$\vartheta = n' \operatorname{cos.} \mu t - \frac{imn'}{2\mu - \lambda} \operatorname{cos.} t(\mu - \lambda) + \frac{imn'}{2\mu + \lambda} \operatorname{cos.} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\omega = m \operatorname{cos.} \lambda t$$

hinc-

hincque pro celeritatibus angularibus habebimus

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu n \,\text{fin.}\, \mu t - \frac{(\mu-\lambda) i m n}{2\mu-\lambda} \,\text{fin.}\, t(\mu-\lambda) + \frac{(\mu+\lambda) i m n}{2\mu+\lambda} \,\text{fin.}\, t(\mu+\lambda)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\mu n' \,\text{fin.}\, \mu t + \frac{(\mu-\lambda) i m n'}{2\mu-\lambda} \,\text{fin.}\, t(\mu-\lambda) - \frac{(\mu+\lambda) i m n'}{2\mu+\lambda} \,\text{fin.}\, t(\mu+\lambda)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda m \lambda t.$$

§ 34. Hinc igitur patet, litteras m n et n' designare maximas digressiones, ad quas tam iugum quam ambae lances a statu aequilibrii diuagari possunt, quod quidem de ipso iugo omni rigore est verum. Pro lancibus autem vtique fieri potest, vt ob partes posteriores maxima digressio fiat modo aliquanto maior modo minor quam n et n', quae irregularitas eo erit maior, quo maior fuerit motus iugi seu angulus n; tum vero etiam potissimum pendebit a numero i, qui eo erit maior, quo longius fuerit iugum, cuius semissis est $= a$; quam ob causam in minoribus bilancibus irregularitas talis minus percipi poterit.

§. 35. Quo indolem harum formularum clarius illustremus, quoniam numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque multo maior est, quam $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, sumamus exempli gratia $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, vt tempus vnius oscillationis iugi fiat $= \pi''$, lancium vero, quatenus motus est regularis $= \frac{\pi''}{3}$; tum igitur erit $i = \frac{9a}{4g}$, vbi g est circiter 16 pedum anglicorum; vnde si esset $a = 2$ pedum, foret $i = \frac{9}{32}$. Sed vt calculus commodius reddatur, sumamus $i = \frac{1}{4}$; tum vero angulos m, n et n' ponamus circiter 10 graduum,

 seu

seu in partibus radii $m = n = n' = \frac{1}{6}$, quibus valoribus substitutis nostrae formulae erunt

$$\eta = \tfrac{1}{6}\,\text{cos.}\,3\,t + \tfrac{1}{720}\,\text{cos.}\,2\,t - \tfrac{1}{1008}\,\text{cos.}\,4\,t$$
$$\vartheta = \tfrac{1}{6}\,\text{cos.}\,3\,t - \tfrac{1}{720}\,\text{cos.}\,2\,t + \tfrac{1}{1008}\,\text{cos.}\,4\,t$$
$$\omega = \tfrac{1}{6}\,\text{cos.}\,t$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,3\,t - \tfrac{1}{360}\,\text{sin.}\,2\,t + \tfrac{1}{252}\,\text{sin.}\,4\,t$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,3\,t + \tfrac{1}{360}\,\text{sin.}\,2\,t - \tfrac{1}{252}\,\text{sin.}\,4\,t$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\tfrac{1}{6}\,\text{sin.}\,t.$$

§. 36. Quia tempus t exprimitur in minutis secundis, hic autem vt angulus spectatur: patet, vnum minutum secundum aequiualere angulo 57° circiter. Vnde si statum librae cum lancibus per interualla semi-minuti secundi examinare velimus, loco t successiue scribamus angulos 0°, 30°, 60°, 90°, 120 etc. et ad quoduis momentum ternos angulos ω, η et ϑ in sequenti tabula referamus, vbi fractionem $\frac{1}{6}$ pro decem gradibus computemus, vnde fit $\frac{1}{720} = 5'$ et $\frac{1}{1008} = 3\frac{1}{2}''$

t	ω	η	ϑ
0	$10^\circ\ 0'$	$10^\circ\ 1\frac{1}{2}'$	$+\ 9^\circ\ 58\frac{1}{2}'$
$\frac{1}{2}$	$8^\circ\ 40'$	$+\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$	$-\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$
$1\frac{1}{2}$	$5^\circ\ 0'$	$-\ 10^\circ\ \frac{3}{4}'$	$-\ 9^\circ\ 59\frac{1}{4}'$
2	$0^\circ\ 0'$	$-\ 0^\circ\ 8\frac{1}{2}'$	$+\ 0^\circ\ 8\frac{1}{2}'$
$2\frac{1}{2}$	$-\ 5^\circ\ 0'$	$+\ 9^\circ\ 59\frac{1}{4}'$	$+\ 10^\circ\ \frac{3}{4}$
3	$-\ 8^\circ\ 40'$	$+\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$	$-\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$
$3\frac{1}{2}$	$10^\circ\ 0'$	$-\ 9^\circ\ 58\frac{1}{2}'$	$-\ 10^\circ\ 1\frac{1}{2}'$
4	$8^\circ\ 40'$	$+\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$	$-\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$
$4\frac{1}{2}$	$5^\circ\ 0'$	$+\ 9^\circ\ 59\frac{1}{4}'$	$+\ 10^\circ\ \frac{3}{4}'$
5	$0^\circ\ 0'$	$-\ 0^\circ\ 8\frac{1}{2}$	$+\ 0^\circ\ 8\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$-\ 5^\circ\ 0'$	$-\ 10^\circ\ \frac{3}{4}$	$-\ 9^\circ\ 59\frac{1}{4}'$
6	$-\ 8^\circ\ 40'$	$+\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$	$-\ 0^\circ\ 4\frac{1}{4}'$
$6\frac{1}{2}$	$10^\circ\ 0'$	$+\ 10^\circ\ 1\frac{1}{2}'$	$+\ 9^\circ\ 58\frac{1}{2}'$.

Ex hac autem tabula manifeſto apparet, irregularitatem motus lancium tam eſſe exiguam, vt in praxi vix percipi poſſe; neque enim vnquam numero i maior valor tribui poſſe videtur.

§. 37. Cum igitur nullum plane veſtigium appareat, vnde tam mirabilia phaenomena in motu lancium oriri potuiſſent, dum ambae lances alternatim motum oſcillatorium concepiſſe, tum vero iterum conquieuiſſe perhibentur, fateri cogimur, a longe alia cauſa illud phaenomenon memoratum productum fuiſſe, ſiue ea in maioribus motibus ſit quaerenda, ſiue in eo, quod puncta A et B, vnde lances ſuſpenduntur, in eadem recta cum centro motus C ſita aſſumſimus. Neque tamen apparet, quomodo ex tantilla mutatione, quam in his punctis

 conci-

concipere licet, tam enorme discrimen oriri potuerit; praecipue cum methodus, qua hic sumus vsi, nulli plane dubitationi locum relinquat.

§. 38. His omnibus accuratius perpensis, haud difficulter perspicere licet, a motu iugi ideo nullum motum oscillatorium lancibus induci posse, quia eius extremitates A et B tantum verticaliter moventur, vnde etiam lancibus nullus motus obliquus imprimi potest. Vera ergo causa, cur calculus noster a memoratis phaenomenis diffideat, in eo est sita, quod centrum motus C tanquam fixum spectauimus; statim autem atque ipsum hoc punctum C aliquem motum horizontalem conciperet, etiam puncta A et B pari motu ferrentur, vnde vtique lances ad motum gyratorium concitari deberent. Haec autem circumstantia manifesto in libris locum habet, quippe quae non ex ipso centro motus C, sed ex puncto multo altiori, scilicet ex scapo seu trutina suspendi solent; atque ex hoc iam perspicuum est, a rudi illa impulsione, qua altera lanx concitata perhibetur toti librae circa istud punctum suspensionis motum fuisse impressum, ob quem vtique extremitates iugi A et B non tantum verticaliter, sed etiam horizontaliter agitari debuerint, ita vt hoc motu posteriori lances vtique motum oscillatorium accipere debuerint. Quin etiam hinc iam ratio perspicitur, cur lances alternis vicibus modo quieuerint modo oscillarint. Pleniorem autem casus euolutionem alia occasione accuratius pertractare conabor.

EXPLI-