

EXPLICATIO MOTVS OSCILLATORII

MIRABILIS IN LIBRA MAIORE
OBSERVATI.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Cum nuper in causam huius phaenomeni, quod illustris *Bernoullius* commemorat inquisissem, et solum librae iugum circa suum centrum mobile assumissem, luculenter demonstraui, hinc motum istum mirabilem nullo modo oriri potuisse. Nul- lum igitur plane est dubium, quin causa istius phaenomeni in motu oscillatorio totius librae ex scapo suspensae sit quaerendum, quandoquidem talis motus a rudi illa concussione totae librae imprimi debuit. Quoniam igitur agitationes solius iugi vix quicquam in motu oscillatorio lancium immutare valent, vti in superiore dissertatione ostendi, hic iugum cum trutina firmiter connexum assumo, vt totum librae systema exceptis lancibus tanquam corpus rigidum spectari possit.

§. 2. Sit igitur *O* punctum suspensionis, circa Tab. III. quod tota libra est mobilis, per quod ducatur recta Fig. 5. horizontalis *a O b*, tum vero etiam verticalis *O o*;

S s 3

atque

atque elapso post initium tempore $\equiv t$, quod semper in minutis secundis exprimo, teneat corpus librae situm utcumque inclinatum OAB , ubi A et B sunt puncta ex quibus lances suspenduntur; ita ut recta AB situ aequilibrii foret horizontalis, recta vero OC , ad eam perpendiculariter ducta, verticalis, in qua ergo dabitur centrum gravitatis totius librae G . Ductae concipiuntur etiam rectae OA et OB , quae vocentur $OA = OB = a$, et anguli $OAB = OBA = \alpha$; ita ut sit $OC = a \sin. \alpha$ et $AC = BC = a \cos. \alpha$; distantia autem centri gravitatis G a puncto suspensionis O ponatur $OG = e$. Praeterea sit massa seu pondus totius librae, lancibus exceptis $\equiv M$, eiusque momentum inertiae Mkk , ita ut $\frac{kk}{c}$ foret longitudo penduli simplicis isochroni, si sola libra circa punctum O oscillaret. Ad commoditatem autem calculi vocemus insuper $OC = e = a \sin. \alpha$ et $AC = BC = f = a \cos. \alpha$. Denique lances ut pondera simplicia ex punctis A et B suspensa spectemus, quorum massa sit $\equiv L$; filorum autem longitudo $AP = BQ = b$.

§. 3. Praesenti autem statu ponatur declinatio librae seu angulus $GOo = \Phi$, eruntque anguli $AOa = \alpha - \Phi$ et $BOb = \alpha + \Phi$; ubi rectae Aa et Bb intelligendae sunt verticales. Hinc igitur erit

$$Aa = a \sin. (\alpha - \Phi) = e \cos. \Phi - f \sin. \Phi \text{ et}$$

$$Oa = a \cos. (\alpha - \Phi) = f \cos. \Phi + e \sin. \Phi;$$

ex altera autem parte

$$Bb = a \sin. (\alpha + \Phi) = e \cos. \Phi + f \sin. \Phi \text{ et}$$

$$Ob = a \cos. (\alpha + \Phi) = f \cos. \Phi - e \sin. \Phi.$$

§. 4.

§. 4. Porro pro praesenti statu declinet altera lance P a situ verticali angulo $PA \alpha = \eta$; altera vero lance Q angulo $QB \beta = \vartheta$; unde, si ex punctis P et Q verticales agantur Pp et Qq , ob utramque longitudinem $AP = BQ = b$ habebimus

$$ap = b \sin. \eta \text{ et } Pp = Aa + b \cos. \eta = e \cos. \Phi - f \sin. \Phi + b \cos. \eta,$$

et ex altera parte

$$bq = b \sin. \vartheta \text{ et } Qq = Bb + b \cos. \vartheta = e \cos. \Phi + f \sin. \Phi + b \cos. \vartheta.$$

§. 5. Nunc pro motu determinando statuantur pro binis punctis P et Q coordinatae orthogonales

$$Op = x = e \sin. \Phi + f \cos. \Phi + b \sin. \eta \text{ et}$$

$$Pp = y = e \cos. \Phi - f \sin. \Phi + b \cos. \eta;$$

et ex altera parte

$$Oq = x' = f \cos. \Phi - e \sin. \Phi - b \sin. \vartheta \text{ et}$$

$$Qq = y' = e \cos. \Phi + f \sin. \Phi + b \cos. \vartheta.$$

His positis ponatur tensio fili $AP = P$ et fili $BQ = Q$; quibus lances P et Q propemodum sursum trahuntur, dum ob propriam gravitatem deorsum vrgentur vi $= L$. At tensio P praebet vim directe sursum trahentem $= P \cos. \eta$, et vim horizontalem dextrorsum $= P \sin. \eta$; pro altera vero lance tensio Q praebet vim verticalem sursum vrgentem $= Q \cos. \vartheta$ et horizontalem dextrorsum $= Q \sin. \vartheta$.

§. 6. Definitis istis viribus, quibus lances sollicitantur, principia motus pro lance P suppeditant has duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{g dt^2} = \frac{P \sin. \eta}{L} \text{ et II. } \frac{ddy}{g dt^2} = \frac{L - P \cos. \eta}{L}$$

pro

pro altera autem lance Q habebimus has :

$$\text{III. } \frac{d d x'}{g d t^2} = \frac{Q \sin. \vartheta}{L} \text{ et IV. } \frac{d d y'}{g d t^2} = \frac{L - Q \cos. \vartheta}{L}$$

atque ex his quatuor aequationibus motus vtriusque lancis determinari debet.

§. 7. Iam motum angularem ipsius librae agrediamur ; ac primo quidem momenta omnium virium quibus sollicitatur respectu puncti suspensionis O colligi debent. Hic igitur primo occurrit proprium librae pondus M, quod in centro grauitatis G unitum producit momentum = M O G sin. Φ = M e sin. Φ . Deinde vero tensio P momentum producit = P a sin. O A P. Est vero hic angulus O A P = $90^\circ + \alpha - \Phi + \eta$ cuius sinus = cos. ($\alpha - \Phi + \eta$), ita vt hoc momentum fit

$$P a \cos (\alpha - \Phi + \eta) = P (f \cos. (\eta - \Phi) - e \sin. (\eta - \Phi)).$$

Quod momentum pariter ac primum tendit ad angulum Φ imminuendum. Ex altera parte tensio Q in momentum exerit = Q. O B sin. O B Q : est vero angulus O B Q = $90^\circ + \alpha + \Phi - \vartheta$, cuius sinus est cos. ($\alpha + \Phi - \vartheta$) = cos. α cos. ($\Phi - \vartheta$) - sin. α sin. ($\Phi - \vartheta$) vnde istud momentum erit

$$Q. (f \cos. (\Phi - \vartheta) - e \sin. (\Phi - \vartheta)),$$

quod ad declinationem Φ augendam tendit. Hinc igitur per principia motus deducitur haec aequatio:

$$\text{V. } \frac{d d \Phi}{g d t^2} = - \frac{M e \sin. \Phi - P (f \cos. (\eta - \Phi) - e \sin. (\eta - \Phi)) + Q (f \cos. (\Phi - \vartheta) - e \sin. (\Phi - \vartheta))}{M k k}$$

§. 8. Nunc igitur ternos nostros angulos declinationis η , ϑ et Φ tanquam infimite paruos spectemus

stemus, ut eorum cosinus unitati, sinus vero ipsis
angulis aequales reputari queant; tum igitur erit

$$x = e \Phi + f + b \eta; \quad y = e - f \Phi + b$$

$$x' = f - e \Phi - b \vartheta; \quad y' = e + f \Phi + b$$

et nunc quinque nostrae aequationes induent sequen-
tes formas:

$$\text{I. } \frac{edd\Phi + bdd\eta}{2gd^2} = -\frac{P\eta}{L}; \quad \text{II. } \frac{-fdd\Phi}{2gd^2} = 1 - \frac{P}{L}$$

$$\text{III. } \frac{-edd\Phi - bdd\vartheta}{2gd^2} = \frac{Q\vartheta}{L}; \quad \text{IV. } \frac{+fdd\Phi}{2gd^2} = 1 - \frac{Q}{L}$$

$$\text{V. } \frac{dd\Phi}{2gd^2} = -\frac{Mc\Phi - P(f - e(\eta - \vartheta) + Q(f - e(\Phi - \vartheta)))}{Mkk}$$

§. 9. Ex his aequationibus primo tensiones P
et Q definiri oportet, id quod commodissime fit
ex aequatione secunda et quarta, unde, quia mem-
bra priora $\frac{fdd\Phi}{2gd^2}$ sunt quasi infinite parua erit $P=L$
et $Q=L$, qui valores proxime veri pro reliquis
aequationibus sufficient, ita ut nobis relinquatur tres
sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{edd\Phi + bdd\eta}{2gd^2} = -\eta; \quad \text{III. } \frac{-edd\Phi - bdd\vartheta}{2gd^2} = \vartheta \text{ et}$$

$$\text{V. } \frac{dd\Phi}{2gd^2} = -\frac{Mc\Phi - 2L\vartheta\Phi + L\vartheta(\Phi + \vartheta)}{Mkk}$$

hic ergo ternae nostrae variables η , ϑ et Φ maxi-
me inter se sunt permixtae, ita ut non parum
difficultatis in earum separatione occurrat.

§. 10. Quoniam autem in his aequationibus
ternae variables ubique unicum dimensionem habent,
recurramus ad eam methodum, qua iam saepius opti-
mo cum successu sum usus, scilicet, constituatur

talis aequatio differentialis secundi gradus $\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{b}$,
 qua motus penduli simplicis longitudinis $= b$ exprimitur, ac statuamus $\eta = Az$; $\vartheta = Bz$ et $\phi = Cz$
 fietque

$$\frac{dd\eta}{2gdt^2} = -\frac{Az}{b}; \frac{dd\vartheta}{2gdt^2} = -\frac{Bz}{b} \text{ et } \frac{dd\phi}{2gdt^2} = -\frac{Cz}{b},$$

quibus valoribus in nostris aequationibus substitutis et
 littera z per diuisionem sublata nasciscimur sequentes
 aequationes:

$$\text{I. } -\frac{Ce}{b} - \frac{Ab}{b} = -A; \text{ III. } \frac{Ce}{b} + \frac{Bb}{b} = B$$

$$\text{V. } -\frac{C}{b} = -\frac{Mcc - 2Lce + Le(A+B)}{Mkk}$$

§. 11. Ex harum aequationum duabus prioribus statim elicimus

$$A = \frac{-Ce}{b-b} \text{ et } B = \frac{-Ce}{b-b};$$

qui valores in quinta substituti praebent

$$-\frac{CMkk}{b} = -C(Mc + 2Le) - \frac{2CLEe}{b-b}$$

quae reducitur ad hanc

$$+bb(Mc + 2Le) - b(Mbc + 2Lbe + 2Lee + Mkk) + Mbkk = 0$$

cuius binas radices ponamus breuitatis gratia esse
 vnam $b = p$ et alteram $b = q$, ita vt p vel q sequenti
 forma fit expressum

$$\frac{\frac{1}{2}b(Mc + 2Le) + Lee + \frac{1}{2}Mkk}{Mc + 2Le}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{1}{2}bb(Mc + 2Le)^2 + b(Mc + 2Le)Lee - \frac{1}{2}b(Mc + 2Le)Mkk + LLe^2 + LMee + \frac{1}{4}M^2k^4\right)} \\ Mc + 2Le$$

§. 12. Cum igitur fit $\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{b}$, erit vti
 constat

$$z = \sin. \left(\gamma + t \sqrt{\frac{2g}{b}} \right),$$

vnde

vnde quia prodit $A = B = \frac{ce}{b-b}$ solutio ita se habebit:

$$\Phi = C \sin.(\gamma + tV \frac{2g}{b}) \text{ et } \eta = \vartheta = \frac{ce}{b-b} \sin.(\gamma + tV \frac{2g}{b}).$$

Nunc autem si loco b scribamus binos valores inventos p et q , motus inde oriundos etiam coniungere licet, ut motus prodeat oscillatorius ex binis simplicibus mixtus, qui ut fiat generalis; pro altero loco constantium C et γ scribamus D et δ ; sicque obtinebitur sequens solutio generalior

$$\Phi = C \sin.(\gamma + tV \frac{2g}{p}) + D \sin.(\delta + tV \frac{2g}{q}) \text{ et}$$

$$\eta = \vartheta = \frac{ce}{p-b} \sin.(\gamma + tV \frac{2g}{p}) + \frac{Dce}{q-b} \sin.(\delta + tV \frac{2g}{q}).$$

§. 13. Quanquam autem ob quatuor constantes arbitrarias C , γ et D , δ infinita varietas motuum, quos libra cum lancibus recipere potest, contineatur: tamen alia motuum genera non complectitur, nisi in quibus ambae lances aequali motu cientur. Haec igitur solutio nequaquam pro completa haberi potest, tamen utique usu venire potest ut ambae lances motu diverso agitentur, quemadmodum in phaenomeno observato reuera accidit. Quin etiam ipsa analysis declarat, hanc solutionem non esse generalem, ob id ipsum quod tantum quatuor constantes arbitrarias contineat. Quia enim tres habebamus aequationes differentiales secundi gradus, integratio completa adeo sex quantitates arbitrarias inoluere debet, ad quam eliciendam novis artificiis erit opus; quod igitur negotium omni cura suscipiamus.

DE MOTV OSCILLATORIO
RESOLVTIO GENERALIS
problematis propositi.

§. 14. Omni attentione igitur perpendamus tres aequationes differentiales secundi gradus, quibus solutio continetur

$$I. \frac{edd\Phi + bdd\eta}{2gd^2} + \eta = 0$$

$$III. \frac{edd\Phi + bdd\vartheta}{2gd^2} + \vartheta = 0$$

$$V. \frac{Mkkdd\Phi}{2gd^2} + (Mc + 2Le)\Phi - Le(\eta + \vartheta) = 0$$

vbi, quia in duabus prioribus anguli η et ϑ tantum permutantur, statuamus $\eta = s + u$ et $\vartheta = s - u$, ut prodeat summa $\eta + \vartheta = 2s$ et $\eta - \vartheta = 2u$, vnde conficietur

$$I + III. \frac{edd\Phi + bdds}{2gd^2} + s = 0 \text{ et}$$

$$I - III. \frac{bdu}{2gd^2} + u = 0$$

quae postrema aequatio, quia vnicam variabilem u cum tempore t inuoluit, statim praebet integrale

$$u = E \sin. \left(e + t \sqrt{\frac{g}{b}} \right);$$

quod in praecedente solutione erat praetermissum.

§. 15. Pro duabus reliquis aequationibus fiat vt supra $\Phi = Cz$ et $s = Az$ existente

$$\frac{ddz}{2gd^2} = -\frac{z}{b} \text{ ideoque } z = \sin. \left(\gamma + t \sqrt{\frac{g}{b}} \right) \text{ eritque}$$

$$\frac{dd\Phi}{2gd^2} = -\frac{Cz}{b} \text{ et } \frac{dds}{2gd^2} = -\frac{Az}{b}$$

quibus substitutis nanciscemur sequentes duas aequationes

$$-\frac{Ce}{b} - \frac{Az}{b} + A = 0 \text{ et}$$

$$-\frac{CMk}{b} + C(Mc + 2Le) - 2ALe = 0$$

ex quarum priore fit $A = \frac{ce}{b-b}$. Sicque restabit haec unica aequatio

$$-\frac{Mkk}{b} + Mc + 2Le - \frac{2Lee}{b-b} = 0.$$

§. 16. Quo hanc aequationem commodiorem reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$\frac{Mkk}{Mc + 2Le} = m \text{ et } \frac{2Lee}{Mc + 2Le} = l.$$

et nostra aequatio hanc induet formam:

$$-\frac{m}{b} + 1 - \frac{l}{b-b} = 0$$

quae reducitur ad hanc formam quadraticam

$$bb - b(b + l + m) + bm = 0$$

cuius binae radices erunt

$$b = \frac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b + l + m)^2 - bm}$$

quae etiam ita exprimi possunt

$$b = \frac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(l + m - b)^2 + bl}$$

vnde patet quantitatem post signum radicale positam semper esse positivam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{2}(l + m - b)^2$; quare si hanc radicem quadratam ponamus $= \frac{1}{2}(l + m - b) + \omega$, erunt bini valores ipsius b , quos iterum designemus literis p et q isti

$$p = l + m + \omega \text{ et } q = b - \omega.$$

§. 17. Quod si iam istos valores inuentos retenta primo littera b substituamus reperiemus hos valores

$$\Phi = C \sin.(\gamma + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \text{ et } s = \frac{ce}{b-b} \sin.(\gamma + t \sqrt{\frac{2g}{b}}).$$

Erat vero $u = E \sin.(\epsilon + t \sqrt{\frac{2g}{b}})$ vnde porro colligimus

$$\eta = \frac{ce}{b-b} \sin.(\gamma + t\sqrt{\frac{g}{b}}) + E \sin.(\varepsilon + t\sqrt{\frac{g}{b}})$$

$$\vartheta = \frac{ce}{p-b} \sin.(\gamma + t\sqrt{\frac{g}{b}}) - E \sin.(\varepsilon + t\sqrt{\frac{g}{b}})$$

§. 18. Hinc igitur solutionem completam obtinebimus, si loco b successiue scribamus tam p quam q , et valores inde resultantes in vnum summam colligamus. Dum autem pro b scribimus q , loco constantium C et γ scribamus D et δ ; quo facto solutio completa ita se habebit

$$\text{I. } \Phi = C \sin.(\gamma + t\sqrt{\frac{g}{p}}) + D \sin.(\delta + t\sqrt{\frac{g}{q}})$$

$$\text{II. } \eta = \frac{ce}{p-b} \sin.(\gamma + t\sqrt{\frac{g}{p}}) + \frac{de}{q-b} \sin.(\delta + t\sqrt{\frac{g}{q}}) + E \sin.(\varepsilon + t\sqrt{\frac{g}{b}})$$

$$\text{III. } \vartheta = \frac{ce}{p-b} \sin.(\gamma + t\sqrt{\frac{g}{p}}) + \frac{de}{q-b} \sin.(\delta + t\sqrt{\frac{g}{q}}) - E \sin.(\varepsilon + t\sqrt{\frac{g}{b}})$$

quae formulae sex constantes arbitrarias inuoluunt, scilicet C , γ ; D , δ ; E , ε ; in quo character veritatis conspicitur.

§. 19. Ex his valoribus iam satis est perspicuum, mirandum illud phaenomenon, quo ambae lances alternatim quiescere et moueri sunt obseruatae, utique euenire posse. Cum enim ambo anguli η et ϑ talibus formulis definiantur $\eta = P + Q$ et $\vartheta = P - Q$, ubi literae P et Q cum tempore certo modo variantur, si eueniat ut quodam tempore fiat $Q = P$ angulus η maximum obtineret valorem, ϑ vero ad nihilum redigeretur, vnde prior lanx notabilem habebit motum gyratorium, posterior vero quasi quiescet. Deinceps vero veniet tempus quo erit $Q = -P$, ac tum prior lanx ad quietem redigetur, posterior vero maximas peraget oscillationes: quae vicissitudo saepius occurret stans temporibus, donec motus fuerit profusus

sus extinctus. Omnes autem circumstantiae talis motus reciproci a constantibus arbitrariis pendebunt, ita ut etiam hic infinita varietas locum habere possit.

§. 20. Accuratius autem hanc solutionem perpendamus, simulque mutationem momentaneam singulorum angulorum Φ , η et \mathfrak{S} siue eorum celeritates angulares definiamus; quod, quo facilius fieri possit ponamus breuitatis gratia

$$\sqrt{\frac{g}{p}} = \mu; \sqrt{\frac{g}{q}} = \nu \text{ et } \sqrt{\frac{g}{b}} = \lambda \text{ ut habeamus}$$

$$\Phi = C \sin. (\gamma + \mu t) + D \sin. (\delta + \nu t)$$

$$\eta = \frac{C e}{p-b} \sin. (\gamma + \mu t) + \frac{D e}{q-b} \sin. (\delta + \nu t) + E \sin. (\varepsilon + \lambda t)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{C e}{p-b} \sin. (\gamma + \mu t) + \frac{D e}{q-b} \sin. (\delta + \nu t) - E \sin. (\varepsilon + \lambda t)$$

unde pro celeritatibus reperiemus

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu C \cos. (\gamma + \mu t) + \nu D \cos. (\delta + \nu t)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\mu C e}{p-b} \cos. (\gamma + \mu t) + \frac{\nu D e}{q-b} \cos. (\delta + \nu t) + \lambda E \cos. (\varepsilon + \lambda t)$$

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \frac{\mu C e}{p-b} \cos. (\gamma + \mu t) + \frac{\nu D e}{q-b} \cos. (\delta + \nu t) - \lambda E \cos. (\varepsilon + \lambda t)$$

§. 21. In talibus igitur librae agitationibus tres motus oscillatorii simplices inter se permiscuntur, quorum primus respondet pendulo simplici longitudinis $= p$, quod singulas oscillationes suas peraget tempore $= \frac{\pi}{\mu}$ min. sec. Alter motus simplex respondet pendulo longitudinis $= q$, quod singulas oscillationes peragit tempore $\frac{\pi}{\nu}$ sec. tertius vero motus conuenit cum pendulo longitudinis b , quod singulas oscillationes facit tempore $= \frac{\pi}{\lambda}$ sec. Vbi quidem notandum, motum ipsius librae tantum ex duobus prioribus

ribus generibus componi, dum in lancibus omnes tres motus inter se permisceri possunt, unde sine dubio maxima irregularitas in his motibus, atque adeo admirabilia phaenomena locum habere possunt.

§. 22. Quoniam sex habemus constantes arbitrias, solutionem nostram ad omnes status initiales accommodare poterimus, quando scilicet pro tempore $t = 0$ tam ipsi anguli Φ , η et ϑ quam etiam eorum celeritates $\frac{d\Phi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\vartheta}{dt}$ utcumque dantur; tum igitur incunum erit singulos casus per experimenta comprobare. Quia autem in hac solutione iugo librae peculiarem motum non tribuimus, si experimenta instituire voluerimus, scapum seu trutinam cum lingula seu examine firmiter connectere debemus. Tales igitur aliquos casus pro statu initiali dato euoluamus.

EVOLVTIO CASVS

quo initio erat $\Phi = 0$; $\eta = \alpha$ et $\vartheta = 0$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0; \frac{d\eta}{dt} = 0 \text{ et } \frac{d\vartheta}{dt}$$

§. 23. Posito igitur $t = 0$ sequentibus sex conditionibus erit satisfaciendum

$$\text{I. } 0 = C \sin. \gamma + D \sin. \delta$$

$$\text{II. } \alpha = \frac{C e}{p-b} \sin. \gamma + \frac{D e}{q-b} \sin. \delta + E \sin. \varepsilon$$

$$\text{III. } 0 = \frac{C e}{p-b} \sin. \gamma + \frac{D e}{q-b} \sin. \delta - E \sin. \varepsilon$$

$$\text{IV. } 0 = \mu C \cos. \gamma + \nu D \cos. \delta$$

$$\text{V. } 0 = \frac{\mu C e}{p-b} \cos. \gamma + \frac{\nu D e}{q-b} \cos. \delta + \lambda E \cos. \varepsilon$$

$$\text{VI. } 0 = \frac{\mu C e}{p-b} \cos. \gamma + \frac{\nu D e}{q-b} \cos. \delta - \lambda E \cos. \varepsilon$$

§. 24. Hic evidens est, tribus posterioribus conditionibus satisfieri hinc tribus determinationibus:

$$1^{\circ}. \gamma = 90; \quad 2^{\circ}. \delta = 90; \quad 3^{\circ}. \epsilon = 90$$

hincque tres priores aequationes evadent

$$I. 0 = C + D$$

$$II. \alpha = \frac{ce}{p-b} + \frac{de}{q-b} + E \text{ et}$$

$$III. 0 = \frac{ce}{p-b} + \frac{de}{q-b} - E$$

ex quarum prima fit $D = -C$. Deinde, quia II + III dat

$$\alpha = \frac{2ce}{p-b} + \frac{2de}{q-b} = \frac{2ce}{p-b} - \frac{2ce}{q-b}$$

$$\text{inde fit } \alpha(p-b)(q-b) = 2ce(q-p)$$

unde colligitur

$$C = \frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)} \text{ et } D = -\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-b)}$$

Denique ob II - III seu $\alpha = 2E$ erit $E = \frac{1}{2}\alpha$.

§. 25. Si igitur pro $\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)}$ scribamus C , pro motu secuturo habebimus sex sequentes determinationes:

$$I. \Phi = C \cos. \mu t - C \cos. \nu t$$

$$II. \eta = \frac{ce}{p-b} \cos. \mu t - \frac{ce}{q-b} \cos. \nu t + \frac{1}{2}\alpha \cos. \lambda t$$

$$III. \vartheta = \frac{ce}{p-b} \cos. \mu t - \frac{ce}{q-b} \cos. \nu t - \frac{1}{2}\alpha \cos. \lambda t$$

$$IV. \frac{d\Phi}{dt} = -\mu C \sin. \mu t + \nu C \sin. \nu t$$

$$V. \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu ce}{p-b} \sin. \mu t + \frac{\nu ce}{q-b} \sin. \nu t - \frac{1}{2}\alpha \lambda \sin. \lambda t$$

$$VI. \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\mu ce}{p-b} \sin. \mu t + \frac{\nu ce}{q-b} \sin. \nu t + \frac{1}{2}\alpha \lambda \sin. \lambda t$$

Unde ad quodvis tempus t tam status librae cum
Tom. XIX, Nou. Comm. V v lanci-

lancibus, quam singuli motus angulares definiri poterunt.

§. 26. Ponamus exempli gratia $b = 4$, $l = 3$ et $m = 1$, fietque $p = 6$ et $q = 2$; tum vero sumamus $e = 2$, eritque

$$\mu = \sqrt{\frac{g}{3}}; \nu = \sqrt{g}; \lambda = \sqrt{\frac{g}{2}} \text{ et } C = \frac{a}{2}.$$

Pro hoc ergo casu determinationes nostrae erunt

$$\text{I. } \Phi = \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{g}$$

$$\text{II. } \eta = \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{g} + \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{\frac{g}{2}}$$

$$\text{III. } \vartheta = \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{g} - \frac{1}{2} a \cos. t \sqrt{\frac{g}{2}}$$

$$\text{IV. } \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t \sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{2} a \sqrt{g} \sin. t \sqrt{g}$$

$$\text{V. } \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t \sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{2} a \sqrt{g} \sin. t \sqrt{g} - \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{2}} \sin. t \sqrt{\frac{g}{2}}$$

$$\text{VI. } \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t \sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{2} a \sqrt{g} \sin. t \sqrt{g} + \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{g}{2}} \sin. t \sqrt{\frac{g}{2}}$$

EVOLVTIO CASVS quo initio erat

$$\Phi = a; \eta = 0; \vartheta = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0; \frac{d\eta}{dt} = 0; \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

§. 27. Quia hic iterum tres celeritates sunt nullae, habebimus ut ante $\gamma = \delta = \varepsilon = 90$, vnde tres priores condiciones dant

$$\text{I. } a = C + D$$

$$\text{II. } 0 = \frac{c e}{p-b} + \frac{d e}{q-b} + E$$

$$\text{III. } 0 = \frac{c e}{p-b} + \frac{d e}{q-b} - E.$$

Quia nunc II - III dat $0 = 2 E$ erit $E = 0$; tum vero

vero erit ex II^{da} $D = -\frac{c(q-b)}{p-b}$, qui valor in prima substitutus praebet

$$\alpha = C - \frac{c(q-b)}{p-b} = \frac{c(p-q)}{p-b}, \text{ ideoque } C = \frac{\alpha(p-b)}{p-q} \text{ et}$$

$$D = -\alpha \frac{q-b}{p-q},$$

sicque formulae nostrae fient

$$\text{I. } \Phi = \frac{\alpha(p-b)}{p-q} \cos. \mu t - \frac{c(q-b)}{p-q} \cos. \nu t$$

$$\text{II. } \eta = \frac{\alpha e}{p-q} \cos. \mu t - \frac{\alpha e}{p-q} \cos. \nu t$$

$$\text{III. } \vartheta = \frac{\alpha e}{p-q} \cos. \mu t - \frac{\alpha e}{p-q} \cos. \nu t$$

ex quibus celeritates angulares facile deducuntur.

§. 28. Hoc igitur casu quia $\eta = \vartheta$ ambae lances eundem motum oscillatorium recipient, quemadmodum in nostra prima solutione particulari vltu venit. Hoc igitur casu tam motus librae ipsius quam vtriusque lancis ex duplici motu simplici erit compositus, qui hic necessario certo quodam modo coniunctus deprehenditur; ita vt isse motus modo magis modo minus fiat irregularis: prouti tempora oscillationum vtriusque generis plus vel minus a se invicem discrepabunt. Superfluum autem foret plures huiusmodi casus evolvere, cum iam satis superque sit demonstratum, motus illos mirabiles, vtcunque primo aspectui inextricabiles videantur, cum nostra theoria ex primis mechanicae principiis deducta perfectissime convenire.