DE MOTV TVRBINATORIO CHORDARVM MVSICARVM;

VBI SIMVL VNIVERSA THEORIA TAM AEQVILIBRII QVAM MOTVS CORPORVM FLEXIBILIVM SIMVLQVE ETIAM ELASTICORVM BREVITER EXPLICATVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Etsi Geometrae in chordis infinitam motus varietatem num quidem agnouerunt, atque adeo felici cum successu determinauerunt: omnes tamen istos motus perpetuo in eodem plano fieri assumserunt; ita vt non solum tota chorda quouis momento in eodem plano sit sita, sed etiam singula eius puncta per lineas rectas in eodem plano motum suum peragant. Fieri autem vtique potest, vt chorda quouis momento non tota in eodem plano reperiatur, neque etiam singula eius puncta in directum moueantur, sed per lineas curuas vtcunque circa axem reuoluantur, cuiusmodi motum adeo in chordis grassioribus oculis percipere licet. Talem igitur motum hic *turbinatorium* vocabo, eiusque symptomata ex primis motus principiis determinabo; vbi quidem commo-

commode eueniet, vt omnes huius generis motus, quantumuis abstrusi et complicati videantur, aeque facile definiri queant atque ii, qui in eodem plano absoluuntur. Quin etiam veritas principii *Bernoulliani* hinc elucebit: dum etiam omnes isti motus ex pluribus simplicibus compositi deprehenduntur, ita vt hoc principium adhuc multo latius pateat quam Illustriss. Inuentor illud extendit.

§. 2. Etiamsi autem prima motus principia statim ad hos casus euoluendos applicari queant, quatenus scilicet omnes istiusmodi motus tanquam infinite parui spectantur: tamen plurimum ad augmentum scientiae conferet, si quaestionem in latiori sensu accipiamus, atque in genere, primo quidem in statum aequilibrii fili perfecte flexilis, quod a viribus quibuscunque in singulis elementis sollicitetur inquiramus, hincque deinceps formulas pro eius motu quocunque eliciamus, quemadmodum haec inuestigatio pro casu quo totum filum perpetuo in eodem plano versatur duplici modo a me iam dudum est praestitum. Hic autem istud problema multo latius sum extensurus, vt etiam ad fila non in eodem plano constituta, simulque ad vires quascunque non in eodem plano agentes, pateat; quod quidem a nemine adhuc, quantum mihi constat, est factum.

Problema generale prius.

Si filo perfecte flexili in singulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, determinare statum aequilibrii, in quo istud filum conquiescet.

 Solutio.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. §. 3. Quoniam igitur neque filum neque vires follicitantes in eodem verfantur plano, conftituamus ternos axes fixos O A, O B et O C inter fe normales, quorum duo priores O A et O B in plano tabulae iaceant, tertius vero O C ad eos fit perpendicularis. Sit iam Z punctum quodcunque fili E Z z F, vnde primo ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, tum vero ex Y ad axem O A agatur normalis, et vocentur pro ifto fili puncto Z ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Tum vero fit elementum fili $Zz = ds$, eritque $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, atque omnes vires, quibus hoc elementum follicitatur, refoluantur fecundum directiones trium axium noftrorum fixorum: fitque vis fecundum directionem Z P axi O A parallelam agens $= P\,ds$; deinde vis fecundum directionem Z Q axi O B parallelam agens $= Q\,ds$; ac tertio vis fecundum directionem Z R axi O C parallelam agens $= R\,ds$. Sicque erit fumma omnium virium elementarium portioni fili E Z applicatarum $= \int P\,ds$; fimilique modo fumma omnium virium elementarium $Q\,ds = \int Q\,ds$, viriumque elementarium $R\,ds$ fumma $= \int R\,ds$.

§. 4. Cum nunc totum filum fit in aequilibrio, fimulque perfecte flexile, neceffe eft vt omnia harum virium momenta, quae filum E Z circa punctum Z gyrari conarentur fe mutuo deftruant. Quare, cum filum in omnes plagas gyrari poffit, notum

notum eſt, omnes iſtos motus gyratorios etiam ad ternos axes ZP, ZQ, ZR reduci poſſe, ac pro ſtatu aequilibrii ſufficere, vt ſingula momenta reſpectu cuiusque horum axium ſe deſtruant. Conſideremus ergo primo axem ZP; eiusque reſpectu tantum vires $Q\,ds$ et $R\,ds$ momenta producere valent; ad quae inuenienda, ſi ratiocinium eodem modo inſtituatur, vti in caſu pro eodem plano feci, totum momentum ex viribus $Q\,ds$ reſultans erit $\int dz \int Q\,ds$: momentum vero ex viribus $R\,ds$ reſultans erit $\int dy \int R\,ds$. Haec autem momenta, vti ſtatum figurae attente perpendenti facile patebit, in plagas contrarias ſunt directa, vnde pro ſtatu aequilibrii requiritur vt ſit $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$. Eodem modo, vt momenta reſpectu axis ZQ ſe deſtruant, neceſſe eſt vt ſit $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$. Ac denique deſtructio momentorum reſpectu tertii axis ZR poſtulabit hanc aequationem: $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$; quibus colligendis ſtatus aequilibrii tres ſequentes poſtulat conditiones:

I. $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$; II. $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$
III. $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$.

§. 5. Praeterea vero pro noſtro inſtituto imprimis etiam neceſſe eſt, vt tenſionem, qua filum noſtrum in puncto Z tenditur cognoſcamus. Quam quaeſtionem ſi eodem modo tractemus, quo pro caſu in eodem plano ſumus vſi, facile perſpiciemus, totam tenſionem per ſequentem formulam exprimi debere:

$$\frac{dx}{ds}\int P\,ds + \frac{dy}{ds}\int Q\,ds + \frac{dz}{ds}\int R\,ds$$

hic

Hic quidem nostram figuram iam satis lineis et litteris onustam nolui pluribus lineis ducendis magis perplexam reddere: sed potius conducet eam dissertationem, qua consensum geminae methodi pro statu aequilibrii corporum flexibilium adhibitae demonstraui, debita attentione perlegere: hoc enim modo facile erit, omnia ratiocinia, quibus ibi sum vsus ad praesentem casum accommodare. Quin etiam haud difficulter nostra solutio ad fila vtcunque elastica extendi poterit, quod, etiamsi non ad praesens institutum nostrum pertineat: tamen maxime dignum videtur, vt hic breuiter doceatur.

§. 6. Quando scilicet nostro filo elasticitas quaecunque tribuitur, non amplius illa momenta virium, quae pro singulis axibus ZP, ZQ et ZR inuenimus, nihilo aequalia sunt statuenda, sed vi elasticae, qua filum inflexioni circa quemque horum axium resistit aequari debebit. Hunc in finem pro axe ZP consideretur fili EZ proiectio in planum QZR facta, quod scilicet axi ZP erit normale; eiusque quaeratur curuatura in puncto Z, quippe cui elasticitas proportionalis erit censenda. Quia igitur indoles huius proiectionis per binas coordinatas y et z exprimitur, erit radius osculi in puncto Z

$$= \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddz - dz\,ddy},$$

cui, cum curuatura sit reciproce proportionalis, pro inflexione circa axem ZP habebimus huiusmodi aequationem:

$\int dz$

$$\int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{D(dyddz - dzddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

similique modo pro binis reliquis axibus habebimus tales aequationes:

$$\int dz \int P\,ds - \int dx \int R\,ds = \frac{E(dxddz - dzddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$\int dx \int Q\,ds - \int dy \int P\,ds = \frac{F(dyddx - dxddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vbi litterae D, E, F exprimunt vires elasticas absolutas, quibus filum cuique inflexioni reluctatur; quae ergo litterae tam quantitates variabiles quam constantes denotare possunt, si quidem filum non vbique habeat eundem elasticitatis gradum. Hoc igitur modo quasi praeter opinionem istud argumentum de statu aequilibrii filorum tam perfecte flexibilium quam elasticorum ad summum perfectionis gradum perduximus.

Problema generale alterum.

Si filo perfecte flexili in singulis elementis vires quaecunquae fuerint applicatae, determinare motum, quem istud filum, vtcunque fuerit impulsum, deinceps prosequetur.

Solutio.

§. 7. Maneant omnia vti in praecedente problemate sunt constituta, vbi $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$

referunt omnes vires elementares ſingulis fili elementis applicatas, et quomodocunque hoc filum initio fuerit ad motum concitatum, elapſo tempore t habeat ſitum in figura repraeſentatum. Quo poſito ſi longitudo fili indefinita E Z ponatur $= s$, euidens eſt ternas coordinatas x, y et z puncto Z reſpondentes vt functiones ſpectari debere binarum variabilium s et t. Porro quemcunque motum elementum Zz habuerit, eum reſolui conueniet ſecundum ternas directiones Z P, Z Q et Z R: ac tum celeritas ſecundum Z P erit $= \left(\frac{dx}{dt}\right)$, et celeritates pro duabus reliquis directionibus Z Q et Z R erunt ſimili modo

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{dz}{dt}\right)$$ vnde deducuntur accelerationes

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

ad quas producendas requiruntur vires acceleratrices ſecundum easdem directiones Z P, Z Q et Z R quae, denotante g altitudinem lapſus in vno minuto ſecundo, erunt

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\quad \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\quad \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

§. 8 Quod ſi iam maſſula elementi $Zz = ds$ deſignetur $= S\,ds$, vbi S vel eſt quantitas conſtans, ſi ſcilicet filum fuerit vbique aeque craſſum, vel quantitas variabilis, et quidem functio quaepiam ipſius s tantum, ſi craſſities fili fuerit variabilis, vires motrices quibus elementum Zz ſecundum easdem directiones ſollicitari debet erunt

$$\frac{S\,ds}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right),\quad \frac{S\,ds}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \frac{S\,ds}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

quam

quam ob rem necesse est, vt istae vires motrices producuntur a viribus supra memoratis, quibus totum filum actu vrgeri ponimus, ita, vt summa omnium illarum virium aequiualens esse debeat summae istarum. Cum autem, si corpori cuicunque duplicis generis vires fuerint applicatae, quae sibi aequiualeant, manifestum est, si vires vnius generis corpori modo contrario applicentur, tum corpus fore in aequilibrio. Hoc igitur principio vtentes nostro filo in singulis elementis vires illas motrices secundum directiones contrarias applicemus, quod fiet si loco litterarum P, Q et R scribamus istas, P', Q' et R', existentibus

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\; Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\; R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

hocque modo totum filum in aequilibrio erit constitutum.

§. 9. His igitur notatis pro motu quaesito nostri fili habebimus sequentes tres aequationes

$$\text{I. } \int dz \int Q'ds = \int dy \int R'ds$$
$$\text{II. } \int dz \int P'ds = \int dx \int R'ds$$
$$\text{III. } \int dx \int Q'ds = \int dy \int P'ds.$$

Praeterea vero si tensio fili ponatur $= T$, erit etiam pro hoc casu

$$T = \left(\frac{dx}{ds}\right)\int P'ds + \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'ds + \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R'ds$$

sicque omnia quae ad motum filorum perfecte flexibilium pertinent succincte hic sunt comprehensa.

§. 10. Quin etiam, si filum non fuerit perfecte flexile, sed inflexioni circa ternos axes vtcunque reluctetur, maneant vt ante elasticitates absolutae circa hos axes, litteris D, E, F expressae, siue eae sint constantes siue vtcunque variabiles a sola scilicet variabili s pendentes, et formulae pro motu erunt

$$\int dz \int Q' ds - \int dy \int R' ds = \frac{D(dyddz - dzddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dz \int P' ds - \int dx \int R' ds = \frac{E(dxddz - dzddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dx \int Q' ds - \int dy \int P' ds = \frac{F(dyddx - dxddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vbi quidem monendum est, cuique radio osculi id signum $\pm$ tribui oportere, prout vires sollicitantes postulant. Atque hoc modo vniuersa theoria de aequilibrio et motu filorum tam perfecte flexibilium quum elasticorum, quae quidem adhuc desiderabatur, ad summum perfectionis gradum est euecta.

§. 11. Mirum hic merito videtur, quod istae solutiones tribus aequationibus contineantur, dum in eodem plano totum negotium vnica aequatione conficitur. Cum enim hic tres occurrunt coordinatae x, y, z, dum in eodem plano duae tantum adsunt, plus vna aequatione insuper adiicienda non opus est ad solutionem determinandam. At si rem accuratius perpendamus, facile reperiemus, tres aequationes inuentas ita a se inuic[illegible]pendere, vt quaelibet in duabus reliquis iam contineatur, ita vt reuera tota solutio ſutio tantum duabus conſiſtat aequationibus: ad quod oſtendendum ternas aequationes inuentas differentiemus atque ſequente ordine diſponamus

$$\text{I. } dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = 0$$

$$\text{II. } dz\int Q\,ds - dy\int R\,ds = 0$$

$$\text{III. } dx\int R\,ds - dz\int P\,ds = 0$$

atque iam euidens eſt, ſi prima multiplicetur per dz, ſecunda per dx, ac tertia per dy, tum productorum iſtorum ſummam fore

$$\text{I}\,dz + \text{II}\,dx + \text{III}\,dy = 0$$

ſicque manifeſtum eſt, quamlibet harum aequationum iam in duabus reliquis contineri, ita vt tota ſolutio duabus tantum aequationibus abſoluatur, quemadmodum rei natura poſtulat.

§. 12. Quodſi autem hoc idem criterium ad ternas aequationes noſtras pro filis elaſticis datas accommodemus, id neutiquam locum habere reperiemus. Quare, cum iſtud criterium in ipſa rei natura ſit fundatum, recte concludimus, in illis vitium quoddam latere, neque effectum vis elaſticae ita ſecundum ternas noſtras directiones reſolui poſſe, vti fecimus, dum pro quolibet plano tantum curuaturam proiectionis verae curuae ſumus contemplati. Neque vero etiam theoria elaſticitatis in huiusmodi filis ita eſt explorata, vt hypotheſis qua ſumus vſi certis principiis inniti cenſeri queat; quin potius cogimur eam penitus reiicere atque in veram conſtitutionem ſuperiorum aequationum accuratius inquirere. Quae inueſtigatio, cum non parum ardua videatur, maximum ſubſidium nobis ſuppeditabit illud ipſum criterium, quod iam nouimus in illis aequationibus locum habere debere.

Emendatio formularum tam pro aequilibrio quam motu filorum elaſticorum datarum.

Tab. IV. Fig. 2. §. 13. Hic igitur ante omnia ad veram curvaturam quae filo in M inducitur eſt reſpiciendum, vbi imprimis planum, in quo duo elementa proxima fili erunt ſita conſiderare debemus, quandoquidem duo elementa non in directum poſita certum planum determinant, in quo ſitus erit radius oſculi; tum autem diſpiciendum erit, ſubquonam angulo iſtud planum ad terna noſtra plana principalia AOB, AOC et BOC ſit inclinatum. Primum igitur attendamus ad verum radium oſculi, qui curuaturam fili in puncto M metitur, et qui per analyſin non parum taedioſam ſequenti formula expreſſus reperitur:

$$\frac{ds^3}{\sqrt{(dyddx - dxddy)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dxddz - dzddx)^2}}$$

cuius formulae denominator ſi breuitatis gratia ponatur $= \omega$, coſinus angulorum, ſub quibus planum curuaturae ad terna plana principalia inclinatur erunt

Pro plano A O B coſinus $= \frac{dyddx - dxddy}{\omega}$

Pro plano B O C coſinus $= \frac{dzddy - dyddz}{\omega}$

Pro plano A O C coſinus $= \frac{dxddz - dzddx}{\omega}$

quo-

quorum cosinuum quadrata in vnam summam collecta faciunt vnitatem, vti natura rei postulat.

§. 14. Quod si iam fili, dum ad inuentam curuaturam cogitur, elasticitas absoluta designetur littera G, ita vt elasticitas qua huic inflexioni reluctatur sit G, denotante r ipsum radium osculi, tum ternae aequationes pro aequilibrio nostri fili elastici erunt sequentes, quas ergo in locum earum quae supra sunt datae substitui oportebit.

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Pro motu autem tantum opus est loco litterarum P, Q, R scribi P', Q', R'. Quod autem ad tensionem fili attinet, si T denotet vim qua punctum M secundum tangentem versus E tenditur, ea erit

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds - \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R\,ds$$

vbi iterum loco P, Q, R, scribendo P', Q', R' tensio in statu motus obtinetur.

§. 15. Quo autem certiores simus, has formulas recte se habere, eas secundum criterium supra datum examinemus; hunc in finem eas differentiemus et obtinebimus sequentes tres aequationes

$$\text{I. } dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,d^3x - dx\,d^3y)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^4}$$

$$\text{II. } dz \int Q\,ds - dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,d^3y - dy\,d^3z)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^4}$$

$$\text{III. } dx \int R\,ds - dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,d^3z - dz\,d^3x)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^4}.$$

Quod

Quod si iam prima ducatur in dz, secunda in dx et tertia in dy, et producta in vnam summam colligantur, tam ex parte sinistra quam dextra omnia membra se mutuo destruere deprehenduntur. Hoc igitur criterium, quoniam locum non esset habiturum, si vllae aliae formulae in loco dextro collocarentur, nobis firmissimum praebet documentum, formulas nostras iam veritati prorsus esse consentaneas, etiamsi fortasse difficile fuerit rationem harum formularum a priori perspicere.

Applicatio horum principiorum ad chordas motu turbinatorio agitatas.

§. 16. Sit igitur proposita chorda E F in punctis E et F fixa, cuius longitudo sit $EF = a$; chorda autem ipsa eius sit generis, cuius si longitudo $= b$ pondus seu massa sit B; ita vt nostrae chordae massa sit $\frac{Ba}{b}$. Tum vero corda haec tensa sit a vi $ET = T$, cui ergo tensio chordae in puncto E erit aequalis. Iam quicunque motus chordae initio fuerit impressus, elapso tempore $= t$ chorda figuram habeat E Z F, vtcunque extra planum tabulae existens, cuius sumta portione quacunque $EZ = s$, ex puncto Z in planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, hincque ad axem E F ducatur normalis Y X, et curua per omnia puncta Y ducta erit proiectio chordae in planum tabulae facta; at ex X erigatur perpendiculum $XV = YZ$, eritque punctum V in proiectione ad planum, quod per

per lineam E F plano tabulae perpendiculariter insistit, facta; tum vero pro puncto Z vocentur ternae coordinatae $EX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, eritque etiam $XV = z$, ita vt x et y sint coordinatae pro proiectione E Y F, atque x et z coordinatae pro proiectione E V F. Vbi notetur, quemadmodum ex ipsa chordae figura E Z F dantur binae proiectiones E Y F et E V F, ita viciſſim ex binis proiectionibus veram chordae figuram E Z F determinari, sicque ad quoduis tempus sufficiet vtramque proiectionem assignasse.

§. 17. Nunc quia calculum nostrum expedire non licet, nisi pro oscillationibus quam minimis, binae coordinatae y et z tanquam infinite paruae sunt spectandae, vtut refragari videatur. Hinc ergo, quia etiam differentialia dy et dz prae dx quasi euanescunt, elementum chordae erit $ds = dx$, atque adeo abscissa $EX = x$ ipsi arcui $EZ = s$ aequalis est censenda. Quoniam hanc chordam vbique eiusdem crassitiei assumimus erit elementi ds massula $= \frac{B\,ds}{b}$, quae cum supra designata fuerit per $S\,ds$ erit hic $s = \frac{B}{b}$. Praeterea vero hic quoque, quia ab ipsa grauitate chordae mentem abstrahere conuenit, ternae illae vires P, Q, R erunt nullae: interim tamen formula $\int P\,ds$, quoniam omnes vires secundum directionem E F sollicitantes designat, tensionem in se complectitur, quae, quia in partem contrariam vergit, erit $\int P\,ds = -T$; bina autem reliqua integralia $\int Q\,ds$ et $\int R\,ds$ reuera erunt ni-

 hilo

hilo aequalia. Quod autem ad accelerationes attinet, quoniam durante motu punctum Z eandem perpetuo seruat distantiam a puncto E, pro eo abscissa $EX = x$ constans manebit, vnde erit $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$ tum vero etiam $\left(\frac{ddx}{ds^2}\right) = 0$, quod inde patet, quod sit $dx = ds$, ideoque $\frac{dx}{ds} = 1$, consequenter $\left(\frac{ddx}{ds^2}\right) = 0$. Sicque solae vires acceleratrices secundum binas reliquas directiones y et z relinquuntur, ex quibus pro motu nostrae chordae colligimus

$$P' = 0;\ Q' = -\frac{B}{2bg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } R' = -\frac{B}{2bg}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

quibus valoribus substitutis sequentes impetrabimus aequationes ex §. 11. si modo loco P, Q, R intelligantur P', Q', R'

$$\text{I. } -T\,dy + \frac{B}{2bg}\,ds\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{B}{2bg}\,dz\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{B}{2bg}\,dy\int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$$

$$\text{III. } -\frac{B}{2bg}\,ds\int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + T\,dz = 0$$

quarum sufficit sumsisse primam ac tertiam, siquidem secunda in his iam continetur; atque hinc ob $dx = ds$ binas sequentes nanciscimur aequationes:

$$\frac{2Tbg}{B}\frac{dy}{ds} = \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et}$$

$$\frac{2Tbg}{B}\frac{dz}{ds} = \int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

§. 18. Ponamus nunc breuitatis gratia coefficientem constantem $\frac{2Tbg}{B} = cc$, vt habeamus istas aequationes:

$$\frac{cc\,dy}{ds} = \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \frac{cc\,dz}{ds} = \int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

quae

quae denuo differentiatae per ds diuidendo largiuntur nobis has aequationes

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } cc\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

in quibus determinatio omnium plane motuum quos chorda recipere valet continetur. Vtraque autem earum eandem resolutionem admittit, quam pro motu chordae in eodem plano dedimus. Atque hic manifestum est determinationem binarum variabilium y et z a se inuicem neutiquam pendere, ita vt vtraque seorsim sine vllo respectu ad alterum habito definiri queat; quae circumstantia sine dubio maximi est momenti, dum omnes motus turbinatorios aeque facile definire licebit, atque eos qui in eodem plano absoluuntur.

§. 19. Antequam autem solutionem generalem tradamus, haud incongruum erit, omnes motus regulares et simplices euoluere, qui in nostram chordam cadere possunt, et quoniam resolutio pro vtraque plane est eadem, sufficiet calculum pro altera instituisse. Sit igitur f longitudo penduli simplicis, cuius motui variationes ipsius y respondent, eritque vti constat $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-\frac{y}{f}$, quae bis integrata praebet $y=E\sin.(\alpha+t\sqrt{\frac{2g}{f}})$, vbi, quia arcus s pro constante est habitus, is quomodocunque in constante E contineri poterit. Cum autem sit $\frac{ddy}{dt^2}=-\frac{2gy}{f}$ erit etiam

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right)=-\frac{2gy}{f}; \text{ erat autem}$$

$$cc=\frac{2Tbg}{B}, \text{ vnde fit } \frac{ddy}{ds^2}=-\frac{By}{Tbf}.$$

Poſito igitur

$$\frac{Tbf}{B} = ee, \text{ vt habeamus } \frac{ddy}{ds^2} = -\frac{y}{ee}$$

eritque integrale completum

$$y = F \text{ ſin. } (\beta + \tfrac{s}{e}),$$

vbi littera F ob tempus t hic conſtans ſumtum tanquam functio ipſius t ſpectari poteſt. Quare vt ambae expreſſiones ad identitatem reuocentur ſumamus

$$E = C \text{ ſin. } (\beta + \tfrac{s}{e}) \text{ et } F = C \text{ ſin. } (\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}})$$

eritque ex binis valoribus coniunctis

$$y = C \text{ ſin. } (\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}) \text{ ſin. } (\beta + \tfrac{s}{e}).$$

§. 20. Hac aequatione integrali inuenta eam ad caſum noſtrae chordae accommodemus; ac primo quidem neceſſe eſt, vt poſito $s = 0$, hoc eſt in termino E fiat pro omni tempore $y = 0$, cui ergo aequationi vt ſatisfiat ſtatui opportet $\beta = 0$. Porro vero etiam in altero termino F vbi $s = a$ ſemper eſſe opportet $y = 0$, vnde fieri neceſſe eſt ſin. $\frac{a}{e} = 0$, id quod infinitis modis euenire poteſt, ſcilicet ſi $\frac{a}{e} = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, vnde colligimus $e = \frac{a}{i\pi}$. Erat vero $e = \sqrt{\frac{Tbf}{B}}$ quocirca hinc colligitur longitudo penduli ſimplicis $f = \frac{Baa}{ii\pi\pi Tb}$, hinc erit $\sqrt{\frac{2g}{f}} = \frac{i\pi}{a}\sqrt{\frac{2Tbg}{B}} = \frac{i\pi c}{a}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$y = C \text{ ſin. } (\alpha + \tfrac{i\pi c}{a} t) \text{ ſin. } \tfrac{i\pi s}{a}.$$

§. 20. Primo initio ergo vbi erat $t = 0$ habebimus $y = C$ ſin. α ſin. $\frac{i\pi s}{a}$, quare ſi hinc elabatur

tantum

tantum tempus t, vt ſit $\frac{i\pi ct}{a} = 2\pi$ ideoque $t = \frac{2a}{ic}$, tum chorda in priſtinum ſtatum reſtituitur, hocque tempore chorda binas vibrationes peregiſſe cenſetur, vnde ſequitur tempus vnius $= \frac{a}{ic}$ in minutis ſecundis expreſſum; vnde patet, eandem chordam innumerabiles motus regulares recipere poſſe, dum ſcilicet loco i omnes numeri integri ſubſtituuntur. Numerus autem vibrationum, quas chorda ſingulis minutis ſecundis edet erit $= \frac{ic}{a}$, qui ergo numerus ſonum muſicum deſignat. Sicque eadem chorda innumerabiles ſonos edere valet, inter quos maxime eminet fundamentalis, caſui $i = 1$ reſpondens, qui ergo erit $= \frac{c}{a}$: reliqui vero ſoni his numeris exprimentur $\frac{2c}{a}$, $\frac{3c}{a}$, $\frac{4c}{a}$, $\frac{5a}{a}$, quemadmodum quidem iam inuulgus conſtat.

§. 22. Pari prorſus modo pro eodem tempore t eademque abſciſſae x reperitur, altera ordinata

$$z = C' \text{ſin.} (\alpha' + \frac{i'\pi ct}{a}) \text{ſin.} \frac{i'\pi x}{a}$$

pro qua tempus vnius vibrationis erit $\frac{a}{i'c}$, et ſonus inde oriundus $= \frac{i'c}{a}$; ſicque vtraque ordinata y et z ſeorſim motu regulari cietur. Ex ambabus autem coniunctis naſcetur duplex ſonus, ſiquidem numeri i et i' fuerint inaequales, quorum alter altero praeualebit, prouti coëfficientes C et C' plus vel minus a ſe inuicem diſcrepant. At ſi ambo numeri i et i' fuerint aequales ſonus tantum ſimplex audietur, qui erit $= \frac{ic}{a}$, ex quo hic motus chordae etiam merito pro ſimplici haberi poteſt, circa quem ſequentia

 notaſſe

notasse iuuabit. 1°. Si praeter $i' = i$ etiam fuerit $\alpha' = \alpha$ erit $y : z = C : C'$, hoc est vbique in eadem ratione; vnde patet singula chordae puncta z per lineas rectas moueri, totumque chordae motum in eodem plano ad tabulam sub certo angulo inclinato fieri, eumque idcirco non esse turbinatorium 2°. At si praeter $i' = i$ fuerit $C' = C$, sed anguli α et α' differant angulo recto, ita vt sit

$$\text{sin.}\,(\alpha' + \tfrac{i'\pi c}{a}\, t) = \text{cos.}\,(\alpha + \tfrac{i\pi c}{a}\, t)$$

tum erit $yy + zz$ quantitas constans. Vnde patet, hoc casu omnia chordae puncta in circulis circa axem E F reuolui, ac tempus vnius reuolutionis fore $= \frac{2ic}{a}$. 3°. Sin autem tam coëfficientes C et C' quam anguli α et α' fuerint inaequales, manente $i' = i$, tum singula chordae puncta in ellipsibus circa axem E F reuoluentur. His igitur duobus posterioribus casibus motus reuera erit turbinatorius, et quia sonus inde tantum simplex oritur recte inter motus simplices refertur 4°. Verum si etiam numeri i et i' fuerint inaequales, ita vt simul duo soni generentur, tum singula chordae puncta in aliis lineis curuis circa axem A M reuoluentur, quae pro inaequalitate horum numerorum magis minusue erunt complicatae, et ad altiores gradus linearum pertinebunt.

§. 23. Tribuamus nunc numeris i et i' successiue omnes valores 1, 2, 3, 4, 5 quos recipere possunt, et quia omnes formulae inde oriundae quomodocunque inter se coniungi possunt obtinebimus pro

pro vtraque ordinata y et z fequentes valores generales

$$y = A\,\text{fin.}(\alpha + \tfrac{\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{\pi s}{a} + B\,\text{fin.}(\beta + \tfrac{2\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C\,\text{fin.}(\gamma + \tfrac{3\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D\,\text{fin.}(\delta + \tfrac{4\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

et

$$z = A'\,\text{fin.}(\alpha' + \tfrac{\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{\pi s}{a} + B'\,\text{fin.}(\beta' + \tfrac{2\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C'\,\text{fin.}(\gamma' + \tfrac{3\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D'\,\text{fin.}(\delta' + \tfrac{4\pi c}{a}t)\,\text{fin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

Cum igitur hic duplo plures occurrant conftantes arbitrariae, quam fi motus fieret in eodem plano, etiam multo maior multiplicitas motus locum habere poteft, quam in eodem plano; inde autem perpetuo orientur foni ex pluribus fimplicibus mixti, prorfus vt Celeberr. *Bernoullius* in motibus qui in eodem plano peraguntur obferuauit; hinc igitur eius theoria maxime ingeniofa infinities ampliorem extenfionem adipifcitur, dum fimul etiam ad omnes plane motus turbinatorios accommodari poteft.

Conftructio generalis quibus chordae concitari poffunt.

§. 24. Quanquam formulae pro binis ordinatis y et z fupra datae, fi quidem in infinitum continuentur, omnes plane motus poffibiles in fe complecti cenferi queant: tamen inde neutiquam eos cafus refoluere licet, quibus chordae initio tam figura quam motus quicunque fuerit impreffus. Pro his igitur cafibus omnino neceffe eft, vt integralia completa

pleta binarum illarum aequationum differentio-differentialium scilicet

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,z}{d\,s^2}\right)$$

exhibeantur, id quod per functiones arbitrarias perinde praestari potest, ac pro motibus in eodem plano est factum. Denotent igitur characteres Γ et Δ functiones quascunque quantitatum ipsis subiunctarum atque habebimus sequentes determinationes

$$y = \Gamma:(c\,t+s) - \Gamma:(c\,t-s) \text{ et } z = \Delta:(c\,t+s) - \Delta:(c\,t-s)$$

vbi istae functiones per lineas curuas quascunque siue continuas siue vtcunque pro arbitrio ductas repraesentari possunt, dummodo per continuam replicationem super axe ita continuentur, vt omnibus abscissis interuallo $= 2\,a$ a se inuicem discrepantibus vbique aequales respondeant applicatae. Hoc modo pro vtraque functione liberum nobis relinquitur, super axe cuius longitudo $= 2\,a$ lineam quamcunque describere, dummodo applicatae in vtroque termino fuerint inter se aequales; quae conditio ideo est necessaria, vt, si super eodem axe continuato eaedem curuae replicentur, eae inter se cohaereant. Praeterea vero etiam in descriptione harum curuarum cauendum est, ne vsquam earum tangentes ad axem fiant normales, vel adeo in antecedentia vergant.

§. 25. His circa istas functiones praenotatis manifestum est, si tempus t augeatur portione $\frac{2\,a}{c}$, ita vt loco $c\,t$ scribendum sit $c\,t + 2\,a$, tum vtramque quantitatem y et z pristinum valorem esse recupecuperaturam, ita vt perpetuo post tempus $= \frac{2a}{c}$ tota chorda in eundem statum reuertatur. Quia igitur interea duas vibrationes peregisse est censenda, patet, cuiusque vibrationis tempus fore $= \frac{a}{c}$, vti supra iam inuenimus. Fieri quidem potest, vt hoc tempus euadat vel duplo vel triplo vel vtcunque aliquoties minus, quando scilicet ambae functiones ita fuerint comparatae, vt non solum pro abscissis interuallo $= 2a$ distantibus easdem ordinatas referant, sed eaedem iam reuertantur post interualla minora $\frac{2a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{2a}{4}$, $\frac{2a}{5}$ etc. Hocque modo intelligitur, quemadmodum eadem chorda ad plures sonos diuersos edendos concitari possit, qui autem semper secundum numeros 1, 2, 3, 4, 5 etc. progrediuntur, omnino vti praecedens euolutio declarauit.

§. 26. Imprimis autem hic operae pretium erit, eam chordae figuram, quam post tempus $\frac{a}{c}$ accipiet inuestigare, quem in finem loco ct scribamus $ct + a$; tum autem ponamus ordinatas nostras euadere y' et z' eritque

$$y' = \Gamma:(ct + a + s) - \Gamma:(ct + a - s) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct + a + s) - \Delta:(ct + a - s).$$

Quia autem per conditionem generalem est

$$\Gamma:(ct+a+s) = \Gamma:(ct-a+s) = \Gamma:(ct-(a-s))$$

similique modo

$$\Delta:(ct + a + s) = \Delta:(ct - (a - s)) \text{ fiet}$$
$$y' = \Gamma:(ct - (a - s)) - \Gamma:(ct + (a - s)) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct - (a - s)) - \Delta:(ct + (a - s))$$

 Quod

Quod si autem hi valores negatiue capiantur, perfecte conuenient cum iis, quae casu priore abscissae $a - s$ respondebant. Vnde intelligimus, perpetuo elapso tempore $= \frac{a}{c}$ chordam recepturam esse figuram priori aequalem, sed contrario modo descriptam. Ita si nunc figura chordae fuerit E M N F, elapso tempore $= \frac{a}{c}$, quo vna vibratio contigisse censetur, eius figura erit F $m\,n\,e$ priori scilicet aequalis, sed duplici modo inuersa: non solum enim ad alteram axis partem cadit, sed etiam, quae figura termino E respondebat nunc termino F respondebit. Hanc igitur ob causam pro toto chordae motu determinando sufficiet, omnes figuras assignasse, quas ab initio vsque ad tempus $t = \frac{a}{c}$ recipiet, quoniam post hoc tempus pristinae figurae siue situ inuerso siue directo recurrent.

Tab. IV. Fig. 3.

Tab. IV. Fig. 4.

§. 27. Ad hanc igitur constructionem facillime expediendam in quopiam axe capiantur portiones D E, E F, F G, G H etc. longitudini chordae $= a$ aequales, et super binis D E F constituatur pro lubitu curua quaecunque $d\,q\,t\,f$, cuius applicatae extremae D d, F f sint inter se aequales. Tum vero eadem figura super sequente axis portione F, G, H repetatur; ob rationes autem modo expositas vna repetitio sufficere potest. Tum enim pro tempore quocunque elapso $= t$ (quod semper minus esse potest quam $\frac{2a}{c}$) a puncto E abscindatur spatium E F $= ct$, et a puncto T vtrinque rescindantur interualla T P et et $TQ = x$, atque in punctis P et Q ducantur applicatae Pp et Qq, quarum differentia $Pp - Qq$ dabit alterutram ordinatam y vel z: pro vtraque enim duplex huiusmodi ſcala pro lubitu conſtitui poteſt. Nihil quoque refert, quantumuis amplae hae ſcalae conſtituantur; ſi enim differentiae inter binas applicatas Pp et Qq nimis fiant magnae, eas per numerum ſatis grandem diuidi conueniet, quo ordinatae y et z intra iuſtos terminos contineantur: vt ſcilicet excurſiones chordae pro minimis haberi queant.

§. 28. Talibus igitur binis ſcalis pro lubitu delineatis, ex vna proiectio chordae in planum tabulae facta EYF (fig. 1.) ex altera vero proiectio in plano perpendiculari facta EVF (fig. 2.) conſtruetur; ex quibus coniunctis vera chordae figura ad tempus propoſitum innoteſcet. Hinc igitur ſimul figura chordae initialis deriuari poteſt; vbi quidem haud difficulter perſpicitur, eandem figuram initialem innumeris modis ex binis ſcalis reſultare poſſe: quaecunque enim forma vni ſemiſſi ef tribuatur, ſemper altera ſemiſſis ed ita deſcribi poteſt, vt inde data figura initialis conficiatur. Vnde patet, ſemper has geminas ſcalas ita formari poſſe, vt inde non ſolum data figura chordae initialis, ſed etiam motus qui ſingulis eius punctis imprimi potuerit obtineatur, prorſus vti circa motus chordae in eodem plano factos fuſius oſtendi. Quemadmodum enim omnes chordae figurae in binas proiectiones refolui poffunt, ita etiam eius motus per refolutionem in binas iftas proiectiones transferri poteft.

SVPPLEMENTVM

continens analyfin, pro incuruatione fili in fingulis punctis inuenienda.

Tab. IV. Fig. 5. §. 29. Confideretur fili elementum quodcunque Zz, pro cuius terminis Z et z fint vt fupra ternae coordinatae

$$OX = x,\ XY = y \text{ et } YZ = z;\ Ox = x + dx,$$
$$xy = y + dy \text{ et } yz = z + dz.$$

In plano autem tabulae fit elementum

$$Yy = du = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

cuius in plano tabulae ducantur tangentes proximae YT et yt, quibus ipfius fili tangentes ZT et zt occurrant in punctis T et t. Quo facto binae iftae tangentes ZT et zt definient planum, in quo bina fili elementa proxima incuruantur; vnde elementum tT productum defignabit interfectionem plani iftius cum plano tabulae. Quare fi ex Y in hanc rectam demittatur perpendiculum YS, iungaturque recta ZS, angulus ZSY metietur inclinationem vtriusque plani; tum vero bina fili elementa proxima a fe inuicem declinabunt angulo TZt, qui fi vocetur $= d\omega$, erit radius ofculi in puncto $Z = \frac{ds}{d\omega}$.

§. 30. Nunc primo ad pofitionem tangentium YT et yt in plano tabulae inueniendam fit angulus

XYT

$XYT = \Phi$, ita vt ſit tang $\Phi = \frac{dx}{dy}$, eiusque differentiale $d\Phi$ exprimet angl. TYt. Porro quia recta ZT tangit filum in puncto Z, erit YT ſubtangens $= \frac{zdu}{dz}$; ipſa vero tangens $ZT = \frac{zds}{dz}$. Hinc igitur pro ſitu proximo erit

$$yt = \frac{zdu}{dz} + d.\frac{zdu}{dz} = \frac{zdu}{dz} + du + zd.\frac{du}{dz},$$

vnde fit

$$Yt = \frac{zdu}{dz} + zd.\frac{du}{dz};$$

Eodem modo erit tangens proxima

$$zt = \frac{zds}{dz} + d.\frac{zds}{dz} = \frac{zds}{dz} + ds + zd.\frac{ds}{dz},$$

vnde fit

$$Zt = \frac{zds}{dz} + zd.\frac{ds}{dz}.$$

Quare ſi in plano tabulae ex T in Yt agatur normalis Tu, erit

$$tu = zd.\frac{du}{dz};$$

ſimilique modo ſi ex T in tangentem Zt agatur normalis Tv, erit

$$vt = zd.\frac{ds}{dz}.$$

At vero ad hanc normalem Tv ducendum, cum iam ducta ſit Tu in Yt, ex hoc puncto u demitti debet in Zt perpendiculum uv, vt habeatur triangulum Tuv ad u rectangulum, ex quo colligetur

$$Tv^2 = Tu^2 + uv^2.$$

§. 31. Vt haec elementa facilius inueniri queant, statuamus

$$dx = p\,dz \text{ et } dy = q\,dz, \text{ eritque}$$

$$du = dz\sqrt{pp+qq} \text{ et } ds = dz\sqrt{1+pp+qq}.$$

His positis in plano tabulae habebimus

$$YT = z\sqrt{pp+qq},$$

et cum sit tang. $\Phi = \frac{p}{q}$, erit angulus elementaris

$$TYt = d\Phi = \frac{q\,dp - p\,dq}{pp+qq},$$

vnde fit lineola

$$Tu = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

Tum vero erit

$$tu = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

hincque colligitur spatiolum

$$Tt = z\sqrt{dp^2 + dq^2}.$$

Nunc quia triangulum Ttu simile est triangulo YTS ob

$$YT = z\sqrt{pp+qq}$$

reperietur perpendiculum

$$YS = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}.$$

§. 32. Nunc ad elementa extra planum tabulae geminas flectamus acies: et quia est

$$ZT = z\sqrt{1+pp+qq},$$

eius-

eiusque incrementum

$$v\,t = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{1 + pp + qq}};$$

Quoniam iam inuenimus

$$T\,t = z\sqrt{dp^2 + dq^2},$$

ex triangulo rectangulo $T\,v\,t$ erit

$$T\,v = z\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}{1 + pp + qq}}.$$

Hinc igitur cum radius oſculi noſtri fili pro elemento $Z\,z$, quem vocemus $= r$ ſit $r = \frac{ds}{d\omega}$, hic vero ſit $d\omega = \frac{T\,v}{Z\,T}$, erit $r = \frac{ZT.\,ds}{T\,v}$; vnde valoribus ſubſtitutis colligimus

$$r = \frac{dz(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 33. Vt autem ipſum planum in quo ſit iſta fili incuruatio, quod ſimpliciter planum curuaturae vocemus, accuratius cognoſcamus, iam nouimus, eius interſectionem cum plano tabulae eſſe rectam $t\,T\,S$, ad quam ſi ex S perpendicularis ducatur $Z\,S$, triangula $t\,T\,v$ et $T\,Z\,S$ manifeſto ſunt ſimilia, vnde fiet $T\,t : T\,v = T\,Z : Z\,S$, hincque

$$Z\,S = \frac{T\,v.\,T\,Z}{T\,t} = \frac{z\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

Ante autem iam inuenimus rectam

$$Y\,S = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

quare ſi ϑ denotet inclinationem plani curuaturae

ad

ad planum tabulae, quia vt vidimus eſt $\vartheta = ZSY$, erit

$$\operatorname{cof.} \vartheta = \frac{YS}{ZS} = \frac{q\,dp - p\,dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 34. Nunc igitur tantum ſupereſt, vt loco litterarum p et q aſſumtos valores

$$p = \frac{dx}{dz} \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz}$$

reſtituamus: atque ſi nullum horum differentialium pro conſtante aſſumamus habebimus

$$1^\circ.\ dp = \frac{dz\,ddx - dx\,ddz}{dz^2} \quad 2^\circ.\ dq = \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{dz^2}.$$

Tum vero quia eſt $\frac{p}{q} = \frac{dx}{dy}$

erit differentiando

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{qq} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^2},$$

hincque

$$q\,dp - p\,dq = \frac{(dy\,ddx - dx\,ddy)}{dz^2};$$

quibus valoribus ſubſtitutis obtinebimus

$$\sqrt{\frac{dz^2}{1 + pp + qq}} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dz}} = \frac{ds}{dz}$$

atque

$$\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}{dz^2}$$

ex quibus conficitur radius oſculi

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}$$

quae expreſſio prorſus congruit cum ea, quae ſupra fuit allata. Vbi adhuc notandum eſt, iſtam formulam la pro radio osculi ope cuiusdam artificii alibi explicandi ad hanc simpliciorem reduci posse:

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2)}}$$

At vero pro inclinatione plani curuaturae ad planum tabulae, quod supra secundum axes principales O A, O B, O C per angulum A O B designauimus, eius cosinus hinc colligitur

$$= \frac{dyddx - dxddy}{\sqrt{((dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2)}}$$

hincque per analogiam eiusdem plani curuaturae inclinationis ad planum B O C cosinus erit

$$= \frac{dzddy - dyddz}{\sqrt{((dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2)}}$$

ac denique inclinationis ad planum C O A cosinus erit

$$\frac{dxddz - dzddx}{\sqrt{((dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddx)^2 + (dyddx - dxddy)^2)}}$$

qui cosinus etiam conueniunt cum supra allegatis.

§. 35. Caeterum hic nefas esset praetermittere insigne subsidium, quo etiam vis elastica simili modo secundum alias directiones resolui potest, et quo tam vires simplices quam motus resoluere consueuimus. Cum enim ad curuaturam inuentam nostro filo inducendam requiratur certum virium momentum, quod in ipso plano curuaturae agat, et quod per radium osculi r huiusmodi formula $\frac{G}{r}$ exprimi posse constat: vbi littera G elasticitatem absolutam denotat, qua filum incuruationi secundum istam plagam resistit, siue ea sit constans siue variabilis,

 nunc

nunc ex ipſa tractatione huius argumenti didicimus, quomodo hoc ipſum momentum virium ſecundum terna plana A O B, B O C, C O A reſolui queat, ſcilicet haec vis elaſtica $\frac{G}{r}$ per primum coſinum multiplicata dabit vim inde reſultantem

Pro plano A O B $= \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3}$.

Simili modo pro plano B O C $= \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3}$

et pro plano A O C $= \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}$

prorſus vti ſupra obſeruauimus. Nunc igitur multo facilius erit iſtam reſolutionem hactenus plane incognitam per rationes ſolidas et certas confirmare, vnde ipſi ſcientiae ac theoriae elaſticitatis haud contemnendum augmentum accedit.

PHYSI-