DE PRESSIONE FVNIVM TENSORVM IN CORPORA SVBIECTA, EORVMQVE MOTV A FRICTIONE IMPEDITO.

DISSERTATIO ALTERA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In superiore dissertatione solutionem huius problematis ex theoria vniuersalissima aequilibrii et motus corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum repetiuimus, vnde factum est, vt solutio primum ad formulas non parum complicatas fuerit perducta, quas autem tandem ad pulcherrimam simplicitatem deducere licuit. Quoties autem talis reductio quasi praeter omnem expectationem succedere deprehenditur, semper certi esse possumus, aliam dari viam magis naturalem et directam, quae sine tantis ambagibus statim ad solutionem finalem manuducere queat, quod ipsum etiam in praesente quaestione vsu venit, dummodo Theoriam illam generalissimam ante propius ad praesens institutum accommodemus, quam solutionem inde deriuare voluerimus. Primum igitur inde theorema non ita latissime

latiſſime patens conſtitui conueniet, quo quaſi vno ictu pleraeque illae ambages reſecentur, atque adeo iſtius theorematis primo demonſtrationem directam ex ipſis aequilibrii principiis petitam dabimus; tum vero eius egregium conſenſum cum formulis generaliſſimis ſumus oſtenſuri.

Theorema.

Tab. VI. Fig. 1. §. 2. *Si funis ſeu filum perfecte flexile* AYE *in ſingulis elementis* $Yy = ds$ *ſecundum directionem normalem* $Y\Pi$ *vrgeatur a viribus* $= \Pi\, ds$, *ac praeterea in hoc elemento fuerit tenſio* $= T$; *tum poſito radio oſculi huius curuae in puncto* $Y = r$, *ſtatus aequilibrii ſemper poſtulat vt ſit* $T = \Pi r$.

Demonſtratio ex primis Staticae principiis petita.

§. 3. Vtrinque circa punctum Y conſiderentur bina curuae elementa Yy et $Yv = ds$, in quibus ergo datur tenſio T, ita vt punctum Y ſecundum has directiones Yy et Yv ſollicitetur a viribus $= T$; tum vero ſit $Y\Pi$ vis illa normaliter applicata $= \Pi\, ds$, ac ſtatus aequilibrii poſtulat vt tres iſtae vires puncto Y applicatae ſe inuicem deſtruant. Quamobrem ex binis lateribus Yy et Yv compleamus parallelogrammum $Yy\pi v$, et neceſſe eſt vt ſit vis Πds quae nunc per diagonalem $Y\pi$ repraeſentatur ad alterutram vim T vt $Y\pi$ ad Yy, ideoque $\Pi ds : T = Y\pi : Yy$. Iam cum recta $\Pi Y\pi$ producta angulum vYy biſecet, ducatur ad eam

eam recta yR, ita vt angulus YRy fiat aequalis $Yy\pi$, hincque triangulum $YRy \sim$ triangulo $Yy\pi$, quamobrem $Y\pi : Yy = Yy : Yr$. Ex Geometria autem nunc constat fore R centrum circuli per tria puncta vYy ducendi; quia igitur circulus curuam osculatur, erit vtique recta YR radius osculi curvae $= r$, vnde cum sit $Yy = ds$, erit $Y\pi : Yy = ds : r$ ideoque $\Pi ds : T = ds : r$. Hinc sequitur id ipsum quod est demonstrandum scilicet esse $T = \Pi r$.

Alia demonstratio ex formulis nostris generalissimis petita.

§. 4. Consideremus igitur totam funis figuram AYy tanquam in eodem plano sitam, pro qua ad axem fixum AB relata vocentur coordinatae $AX = x$ et $XY = y$; ipse vero arcus $AY = s$, ita vt sit eius elementum $Yy = ds$; et ducta applicata proxima xy axique parallela Yv, erit $Yv = dx$ et $vy = dy$. Porro autem applicata XY producatur in q, existente Yp axi parallela. Tab. VI. Fig. 3.

His positis sit $Y\Pi$ vis illa normalis Πds curuae in puncto Y applicata, quae resoluta secundum directiones Yp et Yq praebebit vim $Yp = \Pi dy$ et vim $Yq = \Pi dx$. Praeterea vero quoniam ipsam tensionem T hic nondum contemplari licet ponamus praeter vim $Y\Pi = \Pi ds$ puncto Y applicatam esse vim tangentialem $= \Theta ds$; quae quia in directione Yy agit per resolutionem praebet vim secundum $Yv = \Theta dx$ et secundum Yq vim $= \Theta dy$. Colligendis igitur his quatuor viribus elementum curvae ds follicitabitur fecundum directionem AX vi $= \Theta dx - \Pi dy$, quam in theoria generali vocavimus $P ds$; tum vero fecundum directionem XY vi $= \Theta dy + \Pi dx$, quae fupra erat $Q ds$. Hinc igitur erit

$$\int P ds = \int \Theta dx - \int \Pi dy \text{ et } \int Q ds = \int \Theta dy + \int \Pi dx.$$

§. 5. Quoniam igitur hic totam curuam in eodem plano fitam concipimus, pro ftatu aequilibrii vnicam habebimus aequationem

$$\int dy \int \Theta dx - \int dy \int \Pi dy - \int dx \int \Theta dy - \int dx \int \Pi dx = 0.$$

Tum vero quia ipfam tenfionem in Y vt datam fpectamus $= \Gamma$, erit

$$T = -\frac{dx}{ds}(\int \Theta dx - \int \Pi dy) - \frac{dy}{ds}(\int \Theta dy + \int \Pi dx$$

vnde fumtis differentialibus pofitoque $dy = p dx$, vt fit $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ hae duae aequationes fequentes induent formas:

$$p(\int \Theta dx - \int \Pi dy) = \int \Theta dy + \int \Pi dx \text{ et}$$

$$T = -\frac{1}{\sqrt{1+pp}}(\int \Theta dx - \int \Pi dy) - \frac{p}{\sqrt{1+pp}}(\int \Theta dy + \int \Pi dx)$$

in qua fi ex priore loco $\int \Pi dx + \int \Theta dy$ fubftituatur valor $p(\int \Theta dx - \int \Pi dy)$ prodibit

$$T = -\sqrt{1 + pp}(\int \Theta dx - \int \Pi dy).$$

Differentietur prior aequatio, fietque

$$dp(\int \Theta dx - \int \Pi dy) + p(\Theta dx - \Pi dy) = \Theta dy + \Pi dx$$

fiue

$$dp(\int \Theta dx - \int \Pi dy) = \Pi(1 + pp) dx$$

ideoque

$$\int \Theta dx - \int \Pi dy = \frac{1+pp}{dp} \Pi dx$$

que

quo valore in altera aequatione substituto habebimus $T = -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}\Pi\, dx$. Quare cum sit radius osculi $r = -\frac{dx\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, erit $T = \Pi r$; sicque patet theorema nostrum cum formulis generalibus egregie conuenire.

§. 6. Vt autem etiam relationem vis tangentialis in calculum introductae $\Theta\, ds$ ad vires datas T et $\Pi\, ds$ definiamus, valorem inuentum

$$T = -\sqrt{1+pp}\,(\int\Theta\, dx - \int\Pi\, dy)$$

differentiemus, fietque

$$dT = -\frac{p\,dp}{\sqrt{1+pp}}(\int\Theta\, dx - \int\Pi\, dy) - \sqrt{1+pp}\,(\Theta dx - \Pi dy).$$

Et quia est

$$dp\,(\int\Theta\, dx - \int\Pi\, dy) = \Pi\,(1+pp)\,dx,$$

erit nunc $dT = -\sqrt{1+pp}\,\Theta\, dx$, hoc est $dT = -\Theta\, ds$ ita vt vis tangentialis assumta $\Theta\, ds$ ipsi differentiali tensionis T negatiue sumto aequetur. Quoniam enim tensionem T ab Y versus A vergere assumsimus, ea vtique a vi tangentiali $\Theta\, ds$ diminuitur. His iam inuentis problema in superiore dissertatione solutum facillime resolui poterit.

Problema I.

§. 7. *Si funis incumbat cylindro horizontali, cuius sectio transuersa verticalis sit* A Y B, *eiusque terminis appensa sint pondera* M *et* N *definire statum aequilibrii, quod ob frictionem subsistere poterit.* Tab. VI. Fig. 4.

 Solutio.

Solutio.

§. 8. Supponamus ambo pondera M et N, ſeu potius vires funem in vtroque termino tendentes tantopere inter ſe diſcrepare, vt ſi vis maior M tantillum augeretur funis in hanc partem cedere inciperet, ita vt hoc ſtatu frictio vim ſuam totam exerat. Iam ponamus tenſionem in funis puncto Y eſſe $= T$, quam verſus A directam concipiamus; tum vero ſtatuamus preſſionem quam cylindri elementum $Yy = ds$ a fune ſuſtinet $= \Pi\, ds$, et quia frictio vbique certae parti preſſionis aequari cenſetur, ſit ea $= \lambda\, \Pi\, ds$, quae ergo ſecundum directionem Yy ſeſe motui iamiam generando opponet, ita vt nunc habeamus vim tangentialem $\Theta\, ds = \lambda\, \Pi\, ds$. Cum igitur funis ob reactionem a cylindro vrgeatur in directione normali $Y\Pi$ vi $= \Pi\, ds$, neceſſe eſt vt funis ab his viribus in aequilibrio teneatur.

§. 9. Quod ſi igitur radium oſculi curuae in puncto Y ſtatuamus $= r$, per ea quae in praecedente theoremate ſunt demonſtrata, ob $\Theta = \lambda\, \Pi$ habebimus has duas aequationes:

$$\text{I. } T = \Pi\, r. \quad \text{II. } dT = -\lambda\, \Pi\, ds.$$

Diuidamus nunc poſteriorem per priorem vt nanciſcamur hanc aequationem: $\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda\, ds}{r}$. Sit nunc recta YO ad curuam normalis, quae cum axe AO faciat angulum $AOY = \Phi$, qui ergo amplitudinem arcus AY metietur; vnde ſi YR ſit radius oſculi $= r$ et ducatur recta yR, erit angulus $Aoy = \Phi + d\Phi$ ideoque

ideoque angulus ad R $= d\,\Phi$; qui cum etiam fit $= \frac{Yy}{YR} = \frac{ds}{r}$ ob $\frac{ds}{r} = d\,\Phi$ aequatio illa

$$\frac{d\,\Pi}{T} = -\frac{\lambda\,d\,s}{r} = -\lambda\,d\,\Phi$$

integrata praebet $l\,T = + l\,C - \lambda\,\Phi$; sicque habebimus hanc aequationem: $T = C\,e^{-\lambda\Phi}$, vbi pro constante C determinanda remoueamus punctum Y vsque in A, vbi fit $\Phi = 0$, et quia hic tensio ipsi ponderi M aequatur erit $M = C$, ita vt habeamus hanc aequationem determinatam $T = M\,e^{-\lambda\Phi}$.

§. 10. Inuenta igitur tensione funis in singulis locis ex aequatione $\Pi = \frac{T}{r}$, etiam pressionem funis in singulis punctis assignare poterimus: Scilicet per elementum $Yy = d\,s$ pressio erit

$$\Pi\,d\,s = \frac{T\,d\,s}{r} = M\,e^{-\lambda\Phi}\,\frac{d\,s}{r} = M\,e^{-\lambda\Phi}\,d\,\Phi.$$

Haec igitur solutio cum ea quam supra inuenimus perfecte congruit et sine vllis ambagibus ope praecedentis theorematis est eruta.

§. 11. *Statuamus* iam pro altero termino B, vbi funis a vi minore N tenditur amplitudinem totius arcus $AYB = \theta$, quae quidem hoc casu foret $= \pi = 180^\circ$. Verum si forte funis in alio quocunque puncto E cylindrum deserat, ibique secundum tangentem minorem N trahatur, denotet angulus θ amplitudinem arcus AYE; et quia in hoc loco erit tensio $= M\,e^{-\lambda\theta}$, ei vis tendens N debet esse aequalis; ex quo habebimus $N = M\,e^{-\lambda\theta}$ siue etiam $M = N\,e^{\lambda\theta}$; vnde omnia phaenomena quae supra sunt memorata sponte fluunt.

§. 12. Quin etiam ex hoc ipſo principio hic demonſtrato vlterius progredi, atque adeo motum, quem funis accipiet ſi vis tendens M maior fuerit quam N $e^{\lambda\theta}$ accurate determinare licebit. Ea enim ſolutio quae ſupra eſt tradita, tantum ad veritatem propinquare eſt cenſenda; ibi enim aſſumſimus frictionem durante motu adhuc eandem manere quae pro aequilibrio erat inuenta, cum tamen in ipſo motu preſſio funis ad cylindrum non exiguam mutationem ſine dubio patiatur: mutata autem preſſione etiam frictio mutabitur; vnde perſpicuum eſt, ſolutionem ſupra traditam in omni rigore admitti neutiquam poſſe; neque etiam auſi fuimus, eam ex theoria generali motus deducere, quandoquidem in calculos maxime complicatos et taedioſos fuiſſemus delapſi, qui tamen per moleſtiſſimas reductiones tandem ſine dubio ad expreſſiones ſatis concinnas reuocari potuiſſet. Nunc autem theoremate noſtro ſtabilito iſta ſolutio haud difficulter expediri poterit.

Problema 2.

§. 13. *Si diſcrimen inter binas vires* M *et* N *maius fuerit quam vt aequilibrium conſiſtere poſſit, determinare motum, quo funis ſuper cylindro a vi maiori protrahetur.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 5 §. 14. Sit figura A Y B ſectio transuerſa cylindri eaque verticalis, cui circumductus ſit funis altero termino onuſtus pondere M, altero vero N; ita

ita vt sit $M > N e^{\lambda\pi}$. Quoniam enim ambae ponderum directiones sunt verticales, amplitudo totius arcus A Y B fit $\theta = \pi = 180°$. Iam motus initio ponamus pondus M fuisse in ipso puncto A, alterum vero N dependisse vsque in C, ita vt tota funis longitudo sit $=$ arc. A Y B $+$ B C. Vocemus igitur totum arcum A Y B $= b$ et altitudinem B C $= c$, ita vt tota funis longitudo sit $b + c$; crassitiem autem funis vbique vnitate designemus, vt longitudo $b + c$ simul eius massam exhibeat. Ipsum autem funem tanquam grauitatis expertem spectemus, quo calculus facilior reddatur: deinceps enim non difficile erit eius quoque rationem habere. Hoc modo vires sollicitantes erunt ambo pondera M et N; litterae autem M et N tam ipsa pondera quam eorum massas exprimant.

§. 15. Elapso autem tempore t, quod semper in minutis secundis exprimi assumimus, descenderit corpus M ex A vsque in M, confecto spatio A $M = q$. Alterum igitur pondus N interea ascendisse necesse est per aequale spatium C N $= q$, vnde portio funis etiamnunc hic dependens erit B N $= c - q$. In hoc porro statu sit v celeritas, qua funis mouetur, quippe quae in omnibus eius punctis eadem erit, vbi v denotat spatium quod hac celeritate vno minuto secundo percurri posset. Ergo elapso tempore $t + dt$ celeritas funis erit $= v + dv$ et $\frac{dv}{dt}$ exprimet accelerationem funis in singulis punctis, ex quo vis acceleratrix erit $= \frac{dv}{2g\,dt}$, denotante g altitudinem, per quam grauia vno minuto secundo delabuntur

buntur. Ponamus autem breuitatis gratia hanc vim acceleratricem $\frac{dv}{2g\,dt} = u$, quae ergo per maſſam cuiusque portionis multiplicata dabit vim motricem, cuius directio vbique in ſenſum N B Y A M vergit. Ceterum quemadmodum initio huius motus eſt $q = 0$, ita motus diutius durare nequit, quam donec fiat ex altera parte $BN = c - q = 0$: hoc eſt donec fiat $q = c$.

§. 16. Ad motum igitur inueſtigandum concipiamus toti funi in ſingulis elementis vires eſſe applicatas viribus illis motricibus aequales et contrarias, atque neceſſe eſt, vt tum totus funis ad ſtatum aequilibrii perducatur. Conſideremus igitur funis elementum quodcunque $Yy = ds$, cuius ergo maſſa quoque erit $= ds$; et cum motus eius ſecundum tangentem Y T dirigetur et acceleretur vi motrice $= u\,ds$, ei vim contrariam ſecundum directionem Y y applicatam concipiamus $= u\,ds$. Vbi notandum, dum hoc modo totum funem ſecundum elementa proſequimur, quantitatem u pro conſtante eſſe habenda, propterea quod haec quantitas tantum cum tempore mutatur. Hic autem ſtatum pro eodem temporis momento perſcrutamur. Praeterea vero fit preſſio, quam elementum $Yy = ds$ a fune ſuſtinet $= \Pi\,ds$, quae ergo ſecundum directionem normalem Y Π applicata eſt intelligenda. Ex ea autem oritur frictio $= \lambda\,\Pi\,ds$ pariter ſecundum directionem Y y agens quandoquidem motus directioni Y T eſt contraria; vnde praeter vim normalem

malem Πds habebimus vim tangentialem $= uds + \lambda \Pi ds$, quam supra per Θds indicauimus. Hoc modo ergo obtinemus omnes vires quas funis portio A Y B sustinet: at vero eius portio ab A dependens scilicet $AM = q$ ob accelerationem sursum vrgeri censenda est vi $= uq$, simulque etiam corpus M vi $= Mu$, dum a grauitate deorsum vrgetur vi $= M$. Ex altera vero parte portio funis $BN = c - q$, cum pondere N ob accelerationem deorsum sollicitabitur vi $= (c - q)u + Nu$, atque in eadem directione etiam vrget grauitas vi $= N$. Hae ergo omnes vires iunctim sumtae in aequilibrio seruari debebunt.

§. 17. Ponamus nunc tensionem funis in puncto Y esse $= T$, ac posito radio osculi curuae in hoc loco $= r$, per theorema nostrum habebimus hanc aequationem: $T = \Pi r$; praeterea vero cum sit quoque $dT = -\Theta ds$ (videatur §. 16.) ideoque $dT = -uds - \lambda \Pi ds$, ex priore vero aequatione fit $\Pi = \frac{T}{r}$, hoc valore substituto erit $dT = -uds - \frac{\lambda T ds}{r}$ siue $dT + \frac{\lambda T ds}{r} = -uds$. Vocemus iam vt supra amplitudinem arcus A Y seu angulum $AOY = \Phi$, eritque $\frac{ds}{r} = d\Phi$, vnde aequatio modo inuenta multiplicetur per $e^{\lambda\Phi}$, vt prodeat

$$e^{\lambda\Phi}(dT + \lambda T d\Phi) = -uds\, e^{\lambda\Phi}$$

cuius integrale est

$$e^{\lambda\Phi} T = \text{Const.} - u \int e^{\lambda\Phi} ds,$$

vbi constans etiam vtcunque a tempore t siue celeritate v, quippe quae vt functio ipsius t spectanda, pendere potest, pro qua igitur scribamus litteram U. Integrale autem $\int e^{\lambda\Phi} ds$ ita capiatur, vt euanescat posito $s = 0$ vel $\Phi = 0$. Quo obseruato erit tensio $T = U e^{-\lambda\Phi} - e^{-\lambda\Phi} u \int e^{\lambda\Phi} ds$.

§. 18. Ponamus nunc primo $s = 0$ et $\Phi = 0$, vt obtineamus tensionem in ipso puncto A, quae ergo erit $T = U$ quae, quia neglecta massa funis pondus M in quiete sustinere debet, sursum agere est censenda. Ea ergo cum viribus pro hac parte ante notatis, quae erant $u(q + N)$ sursum, et ipsum pondus M deorsum in aequilibrio esse debet; vnde nascitur ista aequatio: $U = M - u(q + M)$ quae est vna aequatio pro motus determinatione, alteram vero nobis suppeditabit status alterius portionis a puncto B dependentis, quam deorsum vrgeri vidimus viribus $u(c - q) + Nu + N$.

§. 19. Quaeramus igitur funis tensionem in ipso termino B, et quia totius arcus AYB amplitudo est $= 180°$ erit $\Phi = \pi$; tum vero vocemus valorem formulae integralis $\int e^{\lambda\Phi} ds$ per totum arcum AYB extensum $= C$, eritque tensio funis in puncto $B = U e^{-\lambda\pi} - u e^{-\lambda\pi} C$ sursum vergens, propterea quod pondus N in aequilibrio seruare debet, quae ergo aequalis esse debet viribus deorsum vergentibus pro portione BN; vnde ex hac parte nanciscimur hanc aequationem:

$$U e^{-\lambda\pi} - u e^{-\lambda\pi} C = u(c - q) + Nu + N$$

ex qua aequatione cum praecedente coniuncta eliminari poterit quantitas constans U, quae adhuc manserat incognita, quia enim $U = M - u(q + M)$, hoc valore hic substituto impetrabimus aequationem finalem istam:

$$-ue^{-\lambda\pi}(q+M+C)+Me^{-\lambda\pi}=u(c-q)+Nu+N$$

vnde elicimus

$$u=\frac{Me^{-\lambda\pi}-N}{e^{-\lambda\pi}(q+M+C)+c-q+N}.$$

§. 20. Scripsimus autem breuitatis gratia litteram u loco $\frac{dv}{2g\,dt}$; dein quia pondus M celeritate v descendere assumitur, hocque motu spatium $AM = q$ tempusculo dt incrementum accipit $= dq$, erit $dq = v\,dt$, ideoque $q = \int v\,dt$. Praestabit autem quantitatem q in calculo retinere; vnde cum sit $v = \frac{dq}{dt}$ erit sumto elemento temporis dt constante $\frac{dv}{dt} = \frac{ddq}{dt^2}$ ideoque $u = \frac{ddq}{2g\,dt^2}$, quo valore adhibito aequatio motum funis determinans erit

$$\frac{ddq}{2g\,dt^2}=\frac{Me^{-\lambda\pi}-N}{e^{-\lambda\pi}(q+M+C)+c-q+N},$$

exqua statim patet, motum in sensum BYA oriri non posse, nisi haec formula fuerit positiua, hoc est nisi sit $Me^{-\lambda\pi} > N$, prorsus vti in problemate est stabilitum. Praeterea vero ex hac aequatione intelligitur, determinationem motus nostri funis multo difficiliorem esse quam in praecedente dissertatione erat visum, propterea quod haec aequatio est differentialis secundi gradus et praeter ddq etiam ipsa littera q ingreditur.

§. 21. Quo autem hanc aequationem facilius tractare liceat, pro quantitatibus constantibus statuamus breuitatis gratia $2g(Me^{-\lambda\pi} - N) = E$, $e^{-\lambda\pi}(M + C) + c + N = F$ et $e^{-\lambda\pi} - 1 = -G$ vt habeamus hanc aequationem: $\frac{ddq}{dt^2} = \frac{E}{F - Gq}$, quae multiplicata per dq et integrata praebet

$$\frac{dq^2}{2dt^2} = -\frac{E}{G}l(F - Gq) + \frac{E}{G}lA$$

ita vt iam fit $\frac{dq^2}{dt^2} = -\frac{2E}{G}l\frac{F - Gq}{A}$. Vbi notetur q nunquam maius euadere quam c; tum autem semper erit $F > Gq$ quia $F > Gc$. Ad hanc constantem A definiendam, recordemur, ipso initio fuisse $= 0$, et quia motum a quiete inchoasse assumimus erit etiam celeritas $\frac{dq}{dt} = 0$, vnde patet sumi debere $A = F$. Sicque aequatio pro motu erit $\frac{dq}{dt} = +\sqrt{(\frac{2E}{G}l\frac{F}{F - Gq})}$, vnde porro colligitur

$$dt = \frac{dq}{\sqrt{(\frac{2E}{G}l\frac{F}{F - Gq})}},$$

vnde intelligitur hinc nullo modo integrationem exspectari posse. Tantum ergo abest, vt hoc Problema tam facile resolui possit, vti ante erat visum: vt potius inter difficillima sit numerandum.

§. 22. Per approximationem autem solutio succedit si fractio $\frac{G}{F}$ fuerit quam minima. Cum igitur sit

$$\frac{G}{F} = \frac{1 - e^{-\lambda\pi}}{e^{-\lambda\pi}(M + C) + c + N}$$

haec quantitas si fuerit valde parua ponatur ea $= n$, eritque

$$l\frac{F}{F - Gq} = \frac{1}{1 - nq} = -l(1 - nq) = +nq$$

proxime.

proxime. Hoc ergo casu habebimus $dt = \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{G}nq}}$ siue $dt\sqrt{\frac{2En}{G}} = \frac{dq}{\sqrt{q}}$, vnde integrando erit $t\sqrt{\frac{2En}{G}} = 2\sqrt{q}$; atque hic vicissim nanciscemur $q = \frac{Entt}{2G}$, ita vt spatium percursum $AM = q$ quadrato temporis sit proportionale, vti vsu venit in lapsu grauium libero; verum motus multo magis erit retardatus, ob n fractionem minimam. Hinc igitur ob $n = \frac{G}{F}$ erit $q = \frac{Ett}{2F}$; ac loco E et F restitutis valoribus

$$q = \frac{g(Me^{-\lambda\pi} - N)tt}{e^{-\lambda\pi}(M + C) + c + N}.$$

§. 23. Ceterum hic notasse iuuabit, istum casum quem per calculum euoluere licuit, conuenire cum solutione in superiore dissertatione tradita; vnde intelligimus, eam quoque eatenus tantum valere, quatenus fractio $\frac{G}{F}$ est valde parua; quod nisi contigerit, solutio vtique euadet maxime ardua, ita vt ne per approximationes quidem commode expediri possit. Praetea vero ista solutio facile transferri potest ad casum quo funis antequam ad terminum B dependet vnam pluresue integras reuolutiones circa cylindrum compleuerit: tum enim nil aliud requiritur, nisi vt loco litterae π scribamus vel 3π, vel 5π, vel 7π etc. quemadmodum ex superiore dissertatione satis est manifestum.

§. 24. Denique si quem forte offendat, quod supra pro termino A tensionem sursum vergere assumsimus, cum tamen valor litterae T deorsum directus fuerit inuentus, is perpendat, hanc directionem vis T locum habere, quatenus ea puncto Y applicatur. Manifestum autem est, si haberetur filum tensum inter terminos A et Y, tum quidem punctum Y versus A et vicissim A versus Y, hoc est sursum vrgeri debere. Atque hinc etiam perspicuum est, quoniam funis cylindro incumbens A Y B in statu tensionis versatur, tum vtrumque terminum A et B ob eandem tensionem sursum sollicitari debere, prorsus quemadmodum in hac solutione assumsimus.

§. 25. Quod si cylindrus cui funis circumvoluitur fuerit circularis, cuius radius sit $= a$, ideoque $r = a$, tum erit $d s = a\, d \Phi$, hincque formula integralis $\int e^{\lambda \Phi} d s$ euadet $\frac{a}{\lambda} e^{\lambda \Phi} - \frac{a}{\lambda}$. Huius ergo valor sumto $\Phi = \pi$ erit $= \frac{a}{\lambda} (e^{\lambda \pi} - 1)$, quem in solutione generali posuimus C; vnde pro hoc casu erit

$$F = M e^{-\lambda \pi} + \frac{a}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \pi}) + c + N \text{ ideoque}$$

$$\frac{G}{F} = n = \frac{1 - e^{-\lambda \pi}}{M e^{-\lambda \pi} + \frac{a}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \pi}) + c + N}$$

qui ergo valor si fuerit valde paruus approximatio ante exposita locum habebit, vbi iterum loco π scribi oportebit vel 3π, vel 5π, vel 7π etc. si funis circa cylindrum vnam, vel duas, vel tres integras revolutiones fuerit complexus.

DE