DE PRESSIONE FVNIVM TENSORVM IN CORPORA SVBIECTA, EORVMQVE MOTV A FRICTIONE IMPEDITO.

VBI PRAESERTIM METHODVS TRADITVR, MOTVM CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM VTCVNQVE ELASTICORVM NON IN EODEM PLANO SITORVM DETERMINANDI.

DISSERTATIO PRIOR.

Auctore

L. EVLERO.

Quanta vi funis cylindro circumplicatus premat, et quantum eius motus ob frictionem impediatur iam passim quidem a Geometris est ostensum. Sed methodi quibus sunt vsi plerumque minus sunt directae; ac praeterea quaestiones quas tractauerunt ad casus nimis particulares sunt restrictae; ita vt in hoc genere solutiones magis directae latiusque patentes merito desiderari queant. Facile autem intelligitur, hoc argumentum ad theoriam perfectam aequilibrii et motus corporum flexibilium esse referendum, quam cum nuper demum ex primis principiis tam Staticae quam Mechanicae deductam tradidissem, ex ea quoque solutiones omnium quaestionum, quae tam super pressione quam motu funium corpo-

corpori cuicunque circumplicatorum formari possunt potissimum peti debebunt. Ne igitur opus sit principia huius Theoriae aliunde conquirere, hic ea denuo succincte ob oculos exponam.

THEORIA GENERALIS

circa aequilibrium et motum filorum siue perfecte flexibilium siue vtcunque elasticorum ad ternas dimensionns extensa.

Positis, pro fili puncto quocunque z ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, sit fili portionis EZ longitudo $= s$ et elementi ds massula $= S\,ds$. Tum vero eidem elemento secundum ternas directiones principales ZP, ZQ, ZR applicatae sint vires $P\,ds$, $Q\,ds$, $R\,ds$. Pro incuruatione fili in Z facta, sit elasticitas absoluta $= G$, hincque vis ipsa elastica $= \frac{G}{r}$, denotante r radium osculi in hoc loco. His positis pro statu aequilibrii sequentes tres aequationes sunt inuentae: Tab. V. Fig. 1.

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3}$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3}$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}$$

quarum quidem binae tertiam iam in se complectuntur, ita vt sufficiat binas tantum euoluisse. Tum vero tensio fili in puncto Z, qua secundum tangentem versus E vrgetur erit

$$= -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds - \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R\,ds;$$

 hae

hae ſcilicet formulae valent pro ſtatu aequilibrii. At ſi filum ab iisdem viribus ſollicitatum vtcunque moveatur, ternae coordinatae x, y, z tanquam functiones duarum variabilium, ſcilicet ipſius s et temporis t ſpectari debent. Tum igitur capiantur valores ſequentes:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\; Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\; R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

vbi g denotat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo. Qui valores, ſi loco P, Q, R ſcribantur in praecedentibus formulis pro aequilibrio datis, eaedem motum fili determinabunt; quin etiam formula pro tenſione data tenſionem in ſtatu motus indicabit. Ceterum ſi radius oſculi fili in puncto Z ponatur $= r$, is ſequenti formula exprimitur:

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{((dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2)}}.$$

Tum vero ſi iſta formula radicalis prolixa indicatur littera Ω, planum, in quo fit incuruatio ita ad terna plana principalia AOB, BOC, COA inclinabitur, vt trium iſtarum inclinationum Coſinus ſint

$$\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{\Omega};\; \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{\Omega};\; \frac{dx\,ddz - dz\,ddx}{\Omega}.$$

Hae quidem formulae praecipue ad eiusmodi caſus ſunt accommodatae, quibus vires ſolicitantes P, Q, R vt datae ſpectantur, ex iisque figura ad quam corpus flexile ſe componit quaeritur. At vero in praeſenti noſtro inſtituto figura funis pro data aſſumitur: ipſas autem vires in ſingulis punctis ſolicitantes determinari oportet, ex quo neceſſe erit vſum harum formularum inuertere.

DE

DE VIRIBVS

quibus funis circa corpus cylindricum circumductus superficiem subiectam in singulis punctis premit.

§. 1. Concipiatur corpus cylindricum, cuius axis secundum longitudinem ductus sit horizontalis, cui normaliter facta sit sectio verticalis A Y B, eique incumbat funis A Y B vtroque termino A et B ponderibus M et N onustus. Primo autem animum ab omni frictione abstrahamus, ac manifestum est, funem in aequilibrio manere non posse nisi ambo pondera vtrinque appensa M et N sint inter se aequalia. His positis quaeritur, quanta vi iste funis superficiem cylindri cui incumbit in singulis punctis sit pressurus. Hic igitur figura funis nobis est data, quandoquidem figuram corporis cylindrici sequitur et directiones virium vtrinque tendentium A M et B N verticales assumuntur, perpetuo autem ipse cylindrus, cui figuram quamcunque tribuimus, prorsus immobilis assumitur. Neque verum hic tantum cylindros circulares, qui vulgo hoc nomine designari solent, intelligi oportet, sed istam vocem in latissimo sensu accipiamus, ita vt ea omnia corpora complectatur, quorum omnes sectiones ad axem longitudinalem, quem hic perpetuo horizontalem statuimus, normaliter factae, sint inter se aequales, ita vt figura A Y B indolem huius corporis cylindrici exhibeat. Tab. V. Fig. 2.

§. 2. Cum hic igitur totus funis in eodem plano verticali versetur, pro eius figura in calculum introducenda tantum opus erit binas coordinatas considerare; quem infinem ducatur recta horizontalis A B, ad quam ex singulis funis punctis Y perpendiculares Y X ductae intelligantur, vt pro puncto Y binae coordinatae fint A X $= x$ et X Y $= y$, inter quas igitur aequationem quamcunque dari assumimus, quae quidem ita sit comparata, vt in puncto A ambae coordinatae euanescant simulque tangens in A fiat verticalis; quandoquidem funis vltra A in M protensus talem situm habere ponitur. Hoc ergo casu tertia applicata z penitus ex calculo egredietur, et littera s ipsum arcum curuae A Y designabit; funi autem vbique eandem crassitiem tribuamus ita vt massula elementi ds per ipsum ds exprimi queat, hincque fiat $S = 1$. His positis manifestum est, funem aliam pressionem exerere non posse nisi secundum directionem ad curuam normalem Π, quae hoc loco ita exprimatur littera Π, vt vis, quam elementum Y $y = ds$ sustinet sit $= \Pi ds$, quod ita est intelligendum, pressionem in hoc loco tantam esse ac si basis $= 1$ ab incumbente pondere Π premeretur; tum enim portiuncula istius basis $= ds$ vtique pressionem Πds sustinebit.

§. 3. Quod si iam istam pressionem tanquam cognitam spectemus, et elemento Y y vim normalem Y π applicatam concipiamus, tum totus funis ab istis viribus elementaribus solicitatis eam ipsam figuram induere debebit, quam ipsi tribuimus, siquidem

quidem vires ponderum sollicitantes simul in computum ducantur. Hocque modo praesens quaestio ad nostras formulas generales reducetur.

§. 4. Cum igitur in Theoria alias vires non in calculum induxerimus, nisi quarum directiones sequantur coordinatas, istam vim $Y\pi = \Pi\, ds$ secundum directiones binarum nostrarum coordinatarum AX et XY resoluamus ac prodibit vis horizontalis secundum $XA = \Pi\, dy$ et verticalis secundum $XY = \Pi\, dx$, vnde pro viribus supra assumtis habebimus $P\, ds = -\Pi\, dy$ et $Q\, ds = \Pi\, dx$; tertia vero vis $R\, ds$ hic euanescit. Hinc fit $\int P\, ds = -\int \Pi\, dy$ at $\int Q\, ds = \int \Pi\, dx$, a qua posteriori summa subtrahi debet pondus M, quippe quod in eadem directione contrarie agit. Denique vero sumamus funem esse perfecte flexilem, vt fiat elasticitas $G = 0$.

§. 5. His constitutis, quoniam est tam $Z = 0$ quam $R = 0$, natura aequilibrii hac vnica aequatione exprimetur:

$$-\int dy \int \Pi\, dy - \int dx \left(\int \Pi\, dx - M\right) = 0$$

ex qua igitur pressionem hactenus incognitam Π elici oportet. Differentiando ergo hinc habebimus

$$-dy \int \Pi\, dy - dx \left(\int \Pi\, dx - M\right) = 0$$

statuamus nunc $dy = p\, dx$, quandoquidem aequatio inter x et y nobis datur, eritque

$$-p \int \Pi\, dy - \int \Pi\, dx + M \text{ siue}$$

$$M = p \int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx$$

quae denuo differentiata praebet

$d p \int \Pi\, d y + p\, \Pi\, d y + \Pi\, d x$ siue

$o = d p \int \Pi\, p\, d x + p p\, \Pi\, d x + \Pi\, d x$

quae per $d p$ diuisa ponendo $d p = q\, d x$ dat

$o = \int \Pi\, p\, d x + \frac{\Pi (1 + p p)}{q}$

vnde valorem litterae Π elici oportet. Quo autem hoc facilius fieri queat, statuamus pro penultima aequatione $\int \Pi\, p\, d x = \Phi$, fietque $d \Phi = \Pi\, p\, d x$ ideoque $\Pi\, d x = \frac{d \Phi}{p}$, ex quo resultabit haec aequatio a signo integrali libera:

$o = \Phi\, d p + \frac{d \Phi}{p} (1 + p p)$

vnde fit

$\frac{d \Phi}{\Phi} = - \frac{p\, d p}{1 + p p}$

cuius integrale est

$l \Phi = - l \sqrt{(1 + p p)} + l C$ ideoque

$\Phi = \frac{C}{\sqrt{1 + p p}} = \int \Pi\, p\, d x.$

Iam haec aequatio differentiata praebet

$$\Pi\, p\, d x = - \frac{C\, p\, d p}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}} \text{ hincque tandem}$$

$$\Pi = - \frac{C\, d p}{d x (1 + p p)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 6. Constat autem, si radius osculi nostrae curuae in puncto Y ponatur $= r$, fore

$$r = - \frac{d x (1 + p p)^{\frac{3}{2}}}{d p};$$

vnde

vnde formula inuenta transit in hanc $\Pi = \frac{C}{r}$. Hinc discimus pressionem funis in curuam datam in singulis punctis reciproce proportionalem esse radio curuaturae. Tantum autem superest, vt quantitas constans C definiatur. Hunc in finem quaeramus formulas integrales valorem primo inuentum

$$M = p\int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx$$

ingredientes, quas ita sumamus, vt in ipso initio A vbi pondus M dependet euanescant, et quoniam funis in hoc loco curuam tangere accipitur, ibi erit $p = \infty$ quo notato erit:

$$\int \Pi\, p\, dx = -C\int \frac{p\, dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{\sqrt{1+pp}}$$

quod etiam sponte euanescit posito $p = \infty$. Tum vero erit

$$\int \Pi\, dx = -C\int \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cp}{\sqrt{1+pp}} + C,$$

quibus valoribus substitutis fiet $M = C$; vnde igitur innotescit quantitas constans $C = M$, ita vt pressio quaesita in genere sit $\Pi = \frac{M}{r}$.

§. 7. Quaeramus nunc quoque pro singulis curuae punctis tensionem funis, quae ex formulis generalibus erit

$$T = \frac{dx}{ds}\int P\, ds - \frac{dy}{ds}\int Q\, ds = \frac{dx}{ds}\int \Pi\, dy - \frac{dy}{ds}\left(\int \Pi\, dx - M\right).$$

Modo autem inuenimus esse

$$\int \Pi\, dy = \int \Pi\, p\, dx = \frac{M}{\sqrt{1+pp}} \text{ et}$$

$$\int \Pi\, dx = -\frac{Mp}{\sqrt{1+pp}} + M.$$

quibus

quibus substitutis erit tensio funis

$$= \frac{M\,dx}{ds\sqrt{1+pp}} + \frac{M\,p\,dy}{ds\sqrt{1+pp}}.$$

Cum igitur sit $dy = p\,dx$, hincque $ds = dx\sqrt{1+pp}$ erit ista tensio $= M$, ita vt in singulis curuae punctis tensio sit eadem atque adeo aequalis ipsi ponderi trahenti M, quod cum etiam in altero curuae termino A eueniat, euidens est alterum N etiam esse debere $= M$, quemadmodum ex natura aequilibrii per se est perspicuum.

§. 8. Quod si ergo funis cylindro ordinario seu circulari circumuoluatur, cuius radius sit $= c$ tum pressio in singulis punctis contactus erit $= \frac{M}{c}$, vnde patet, quo gracilior fuerit cylindrus eo maiorem fore pressionem. Vbique autem haec pressio tanta erit, quanta foret, si basi horizontali $= 1$ incumberet pondus $= \frac{M}{c}$.

§. 9. Probe autem hic est obseruandum, has determinationes tum tantum locum habere, quando funis omni plane elasticitate pariter ac grauitate est destitutus, ita vt sit $G = 0$. Praeterea vero imprimis necesse est, vt nulla sit frictio; quanquam enim in statu aequilibrii frictionis nulla ratio tenenda videtur: tamen si quaeratur, quantum pondus M appendi debeat, vt funis saltem protrahi incipiat, tum vtique frictio in computum duci debet, quando quidem hoc casu euenire potest, vt funis in quiete perseueret, etiamsi ambo pondera M et N vehementer inter se discrepent.

§. 10.

§. 10. Ante autem quam frictionem in computum trahamus, examini subiciamus casum, quo funis aliquam habeat elasticitatem, siue rigorem, quo incuruationi quodammodo resistit, cuius quantitatem in formulis generalibus littera G designauimus. Et quoniam prima tantum aequatio negotium conficit, formula $\frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3}$ abit in hanc: $\frac{G}{r}$, denotante scilicet r radium osculi curvae in puncto Y. Pro hac vero formula $\frac{G}{r}$ scribamus breuitatis gratia litteram u, ac pro statu aequilibrii habebimus hanc aequationem:

$$-\int dy \int \Pi\, dy - \int dx \int \Pi\, dx + Mx = u,$$

cuius differentiale dat

$$-dy \int \Pi\, dy - dx \int \Pi\, dx + M\,dx = du$$

et posito iterum $dy = p\,dx$ erit

$$-p \int \Pi\, dy - \int \Pi\, dx + M = \frac{du}{dx}$$

haecque denuo differentiata fit

$$-dp \int \Pi\, p\,dx - \Pi\, pp\,dx - \Pi\, dx = \frac{ddu}{dx}.$$

Fiat hic iterum $\int \Pi\, p\,dx = \Phi$ vt sit $\Pi\, dx = \frac{d\Phi}{p}$ atque habebimus

$$-\Phi\, dp - \frac{d\Phi}{p}(1 + pp) = \frac{ddu}{dx} \text{ siue}$$

$$\Phi\, p\,dp + d\Phi(1 + pp) = -\frac{p\,ddu}{dx},$$

quae diuisa per $\sqrt{1 + pp}$ fit

$$\frac{\Phi\, p\,dp}{\sqrt{1 + pp}} + d\Phi(\sqrt{1 + pp}) = -\frac{p\,ddu}{dx\sqrt{1 + pp}},$$

cuius prius membrum sponte est integrabile, ita vt prodeat

$$\Phi\sqrt{1 + pp} = -\int \frac{p\,ddu}{dx\sqrt{1 + pp}},$$

vnde simul atque innotescerit valor ipsius Φ, habebitur pressio quaesita $\frac{d\Phi}{p\,dx}$.

§. 11. Totum negotium igitur huc redit, vt inuestigemus integrale $\int \frac{pddu}{dx\sqrt{1+pp}}$, quod per reductionem solitam ita resoluitur:

$$\int \frac{pddu}{dx\sqrt{1+pp}} = \frac{pdu}{dx\sqrt{1+pp}} - \int \frac{du}{dx} \cdot \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quia autem $r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, postremum membrum $-\int \frac{du}{dx} \cdot \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ abit in $+\int \frac{du}{r}$. Quia igitur $u = \frac{G}{r}$ erit $du = -\frac{Gdr}{rr}$ hincque

$$\int \frac{du}{r} = -G\int \frac{dr}{r^3} = +\frac{G}{2rr} + C.$$

Substituantur igitur isti valores et obtinebitur sequens aequatio:

$$\Phi\sqrt{1+pp} = \frac{Gpdr}{rrdx\sqrt{1+pp}} + \frac{G}{2rr} + C$$

consequenter habebimus

$$\Phi = \int \Pi p dx = \frac{Gpdr}{rrdx(1+pp)} + \frac{G}{2rr\sqrt{1+pp}} + \frac{C}{\sqrt{1+pp}}$$

quae denuo differentiata praebet

$$\Pi p dx = G.\frac{p}{1+pp}.d.\frac{dr}{rrdx} + G.\frac{dr}{rrdx}.d.\frac{p}{1+pp}$$
$$- \frac{Gdr}{r^3\sqrt{1+pp}} - \frac{Gpdp}{2rr(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Cpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

quo circa colligimus

$$\Pi = \frac{G}{dx(1+pp)}.d.\frac{dr}{rrdx} + \frac{Gdr}{prrdx^2}\,d.\frac{p}{1+pp}$$
$$- \frac{Gdr}{pr^3dx\sqrt{1+pp}} - \frac{Gdp}{2rrdx(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Cdp}{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

que

que reduci potest ad hanc formam:

$$\Pi = -\frac{G}{dx^2(1+pp)}\, dd\frac{1}{r} + \frac{G\,dp\,dr(1-pp)}{prr\,dx^2(1+pp)^2} - \frac{G\,dr}{pr^3\,dx\sqrt{1+pp}}$$

$$-\frac{G\,dp}{2rr\,dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C\,dp}{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Quia autem est

$$r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} \text{ erit}$$

$$dp = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r},$$

quo valore loco dp ubique substituto prodibit

$$\Pi = -\frac{G}{dx^2(1+pp)}\, dd.\frac{1}{r} - \frac{G\,dr(1-pp)}{pr^3\,dx\sqrt{(1+pp)}} + \frac{G}{2r^3} + \frac{C}{r}.$$

§. 12. Ponamus autem hic curuam nostram A Y B esse circulum, cuius radius $= c$, ita ut habeamus $r = c$ ideoque $dr = 0$, fietque $\Pi = +\frac{G}{2c^3} + \frac{C}{c}$, quae cum sit quantitas constans, si ponatur $\Pi = \frac{C}{c}$, fiet ut supra integrando $\int \Pi\, dx = \frac{Cx}{c}$ et $\int \Pi\, dy = \frac{Cy}{c}$, quibus valoribus in aequatione

$$-p\int \Pi\, dy - \int \Pi\, dx + M = 0$$

substitutis fit $-\frac{Cpy}{c} - \frac{Cx}{c} + M = 0$, ubi cum sit ob circulum $y = \sqrt{2(cx - xx)}$ ideoque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{c-x}{\sqrt{2cx-xx}}$ erit $-C + M = 0$, ideoque prorsus ut supra $C = M$, ita ut elasticitas hoc casu nihil plane mutare videatur in pressione. Verum pro aequatione principali hinc prodiret

$$-\int dy \int \Pi\, dy - \int dx \int \Pi\, dx + Mx = 0$$

cum tamen aequari deberet quantitati $\frac{G}{c}$. Vnde intelligitur, praeter pondus appensum insuper vim applicari debere, cuius momentum respectu puncti A sit $= \frac{G}{c}$, quippe quod requiritur ad funem cylindro vbique applicandum, quod ergo eo maius esse debebit, quo maior fuerit elasticitas absoluta G; tum vero, quo minor fuerit radius c. Cum autem hic potissimum funes nobis sint propositi, quorum elasticitas contemni potest, hunc casum fusius prosequi hic non est locus.

De motu funis super cylindro fixo ob frictionem impedito.

§. 13. Si nulla adesset frictio, funis cylindro circumductus in aequilibrio esse non posset, nisi in vtroque termino a viribus aequalibus tenderetur, et simul atque tensio alterius termini alteram superaret funis super cylindro moueri inciperet. Frictionis autem effectus in hoc potissimum consistit, vt funis in quiete manere possit, etiamsi vires vtrinque tendentes fuerint inter se inaequales: hocque discrimen eo maius esse poterit, tam quo maior fuerit frictio, quam quo maiorem portionem funis in cylindro occupauerit. Ob hanc rationem funis tum demum super cylindro prorepere incipiet, quando differentia inter vires vtrinque tendentes certum limitem superauerit.

§. 14. Ponamus igitur inaequalitatem virium tendentium ad ipsum hunc terminum esse perductam, vt funis etiamnunc in quiete retineatur, simul ac vero tensio maior vel tantillum augeretur motum esset insecuturus. Hoc igitur modo quaestio quam hic tractare constituimus, etiamsi ad motum pertinere videatur, tamen ex principiis aequilibrii resolui debebit. Hic autem vt ante nomen cylindri omnes plane formas sub se complectatur, cuius sectio transversa repraesentetur figura A Y B; neque etiam necesse est, vt axis huius cylindri sit horizontalis; quandoquidem hic vires tendentes quascunque sumus consideraturi; ita vt funis in A secundum directionem tangentis A M a vi $= M$ trahatur, in altero vero termino B itidem in directione tangentis B M a vi M: necesse etiam non est vt hae directiones sint inter se parallelae. Quo posito assumimus, vim tendentem A tantum superare alteram vim M, vt funis tantum non moueri incipiat.

§. 15. Sumatur igitur pro axe recta A B, ad directionem tensionis maiorem A M normalis, ita vt funis curuae A Y y applicatus sit concipiendus, et pro puncto quouis Y vocentur vt ante coordinatae A X $= x$ et X Y $= y$, ipse vero arcus A Y $= s$, vt sit eius elementum Tab. V. Fig. 3.

$$Y y = d s = \sqrt{d x^2 + d y^2}.$$

In hoc autem elemento statuatur pressio $= \Pi\, d s$, agens secundum directionem normalem Y Π. Huius igitur pressionis certa quaedam pars dabit frictionem secundum tangentem curuae vrgentem, cuius vero quantitas sit $= \lambda\, \Pi\, d s$. Hinc igitur ipse funis in

 elemento

elemento Yy ſecundum directionem normalem $Y\pi$ ſollicitari eſt cenſendus; et quoniam motus iamiam generandus funem in directione YA promouere conatur, ei frictio ſe opponet in directione contraria Xy vi $= \lambda \Pi\, ds$; et nunc ſolutio quaeſtionis huc redit, vt cunctae iſtae vires normales et tangentialas cum tenſione M in aequilibrio conſiſtant.

§. 16. Ad igitur neceſſe eſt, vt tenſio funi in ipſo termino A fiat aequalis vi tendenti $= M$. Hinc vero per Y progrediendo tenſio ob frictionem continuo diminuatur, cui tandem in altero termino B vbicunque is accipiatur altera tenſio N aequalis ſtatui debebit.

§. 17. Nunc igitur ante omnia ambas vires normalem $Y\pi = \Pi\, ds$ et tangentialem $\lambda \Pi\, ds$ ſecundum directiones coordinatarum x et y reſolui oportebit: ac manifeſtum eſt, ex vi normali $\Pi\, ds$ vim ſecundum $Ym = \Pi\, dy$ et vim ſecundum $Yl = \Pi\, dx$ oriri. Ex vi autem tangentiali $\lambda \Pi\, ds$ oritur vis ſecundum $Yn = \lambda \Pi\, dx$ et ſecundum $Yl = \lambda \Pi\, dy$; ſicque ex vtraque generatur vis in directione Yn ſiue $AX = \lambda \Pi\, dx - \Pi\, dy$, quae in formulis generalibus poſita eſt $P\, ds$; deinde vero vis in directione Yl ſiue $XY = \lambda \Pi\, dy + \Pi\, dx$, quae poſita eſt $Q\, ds$. Hinc igitur erit

$$\int P\, ds = \lambda \int \Pi\, dx - \int \Pi\, dy \quad \text{et}$$

$$\int Q\, ds = \lambda \int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx$$

vnde ſubtrahi oportet ipſam vim tendentem M in puncto A ſecundum AM agentem, ita vt habeamus

$$\int Q\, ds = \lambda \int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx - M.$$

§. 18.

§. 18. His viribus inuentis pro statu aequilibrii Theoria supra data nobis suppeditat hanc aequationem:

$$\lambda\int dy\int\Pi\,dx - \int dy\int\Pi\,dy - \lambda\int dx\int\Pi dy - \int dx\int\Pi dx + Mx = 0$$

tum vero pro tensione funis in puncto Y ab Y versus A hanc:

$$-\frac{\lambda dx}{ds}\int\Pi\,dx + \frac{dx}{ds}\int\Pi\,dy - \frac{\lambda dy}{ds}\int\Pi\,dy - \frac{dy}{ds}\int\Pi\,dx$$
$$+\frac{M dy}{ds} = -\left(\frac{\lambda dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\right)\int\Pi\,dx + \left(\frac{dx}{ds} - \frac{\lambda dy}{ds}\right)\int\Pi\,dy + \frac{M dy}{ds}$$

vbi formulas integrales $\int\Pi\,dx$ et $\int\Pi\,dy$ ita sumi conueniet, vt in ipso initio A, vbi fit $x = 0$ et $y = 0$ euanescant. Sicque quia hoc loco $\frac{dy}{ds} = 1$, tensio in A erit $= M$, vti status quaestionis postulat.

§. 19. Aequatio igitur pro aequilibrio inuenta differentietur, ac posito $dy = p\,dx$ prodibit haec aequatio:

$$M + (\lambda p - 1)\int\Pi\,dx - (p + \lambda)\int\Pi\,dy = 0,$$

quae diuisa per $p + \lambda$ praebet

$$\int\Pi\,dy = \frac{M}{p+\lambda} + \frac{\lambda p - 1}{p + \lambda}\int\Pi\,dx,$$

ex qua igitur statim ac valor formulae $\int\Pi\,dx$ fuerit inuentus innotescit valor formulae $\int\Pi\,dy$. Praeterea vero, quoniam est $ds = dx\sqrt{1 + pp}$, tensio funis in Y ita erit expressa:

$$\frac{Mp}{\sqrt{1+pp}} - \frac{\lambda + p}{\sqrt{1+pp}}\int\Pi\,dx + \frac{1 - \lambda p}{\sqrt{1+pp}}\int\Pi\,dy,$$

vnde si loco $\int\Pi\,dy$ valor modo assignatus scribatur, tensio ita exprimetur:

$$\frac{M\sqrt{1+pp}}{p+\lambda} - \frac{(\lambda\lambda+1)\sqrt{1+pp}}{p+\lambda}\int\Pi dx = \frac{\sqrt{1+pp}}{p+\lambda}\left(M - (\lambda\lambda+1)\int\Pi dx\right).$$

§. 20.

§. 20. Nunc aequatio pro aequilibrio eruta denuo differentietur, ac prodibit

$$\Pi p\,dx = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \left(\frac{\lambda p - 1}{p+\lambda}\right)\Pi\,dx + \frac{(\lambda\lambda+1)\,dp}{(p+\lambda)^2}\int \Pi\,dx.$$

Statuatur nunc $\int \Pi\,dx = z$ et ob $\Pi\,p\,dx = p\,dz$ aequatio nostra fiet

$$p\,dz = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \left(\frac{\lambda p - 1}{p+\lambda}\right)dz + z\frac{(\lambda\lambda+1)\,dp}{(p+\lambda)^2},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$0 = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \frac{(1+\lambda\lambda)\,z\,dp}{(p+\lambda)} - \frac{(1+pp)\,dz}{p+\lambda} \text{ siue}$$

$$\frac{dp}{(p+\lambda)^2}\left((1+\lambda\lambda)z - M\right) = \frac{(1+pp)\,dz}{p+\lambda}$$

vnde conficitur

$$\frac{dz}{(1+\lambda\lambda)z - M} = \frac{dp}{(1+pp)(p+\lambda)}$$

vbi ergo ambae nostrae variabiles z et p sunt a se inuicem separatae.

§. 21. Integretur igitur ista aequatio, et ex parte sinistra orietur hoc integrale

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}\,l\left((1+\lambda\lambda)z - M\right).$$

Formula autem dextra in partes resoluta praebet:

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}\frac{dp}{p+\lambda} + \frac{(\lambda - p)\,dp}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)}$$

cuius integrale est

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}\,l(p+\lambda) - \frac{1}{1+\lambda\lambda}\,l\sqrt{1+pp} + \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda}\,\mathrm{A\,tang.}\,p + \frac{lC}{1+\lambda\lambda}$$

quocirca aequatio nostra integralis erit

$$l\left((1\lambda\lambda)z - M\right) = l(p+\lambda) - l\sqrt{1+pp} + \lambda\,\mathrm{A\,tang.}\,p + lC$$

hincque ad numeros transeundo

$$(1+\lambda\lambda)z - M = \frac{C(p+\lambda)}{\sqrt{1+pp}}\,e^{\lambda\,\mathrm{A\,tang.}\,p}$$

vnde

vnde ergo erit

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} + \frac{C(p+\lambda)}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} \cdot e^{\lambda A\,tang.\,p}.$$

§. 22. Quo hanc expreſſionem commodiorem reddamus, introducamus in calculum amplitudinem arcus curuae A Y, cuius menſura eſt angulus A Π Y, ducta ſcilicet normali Y Π; ac ponamus iſtum angulum A Π Y $= \Phi$, et cum ſit ſubnormalis

$$X\Pi = \frac{y\,dy}{dx} = py$$

erit tang. $\Phi = \frac{1}{p}$, hincque tang. $(90^\circ - \Phi) = p$, vnde patet eſſe A tang. $p = 90^\circ - \Phi$. Sicque erit

$$e^{\lambda A\,tang.\,p} = e^{\lambda(90^\circ - \Phi)} = \frac{e^{\lambda 90^\circ}}{e^{\lambda\Phi}}.$$

Et nunc pro factore conſtante $C e^{\lambda 90^\circ}$ ſcribamus D eritque

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} + \frac{D(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} = \int \Pi\, dx$$

tum vero hinc porro habebimus

$$\int \Pi\, dy = \frac{M}{p+\lambda} + \frac{M(\lambda p - 1)}{((1+\lambda\lambda)(p+\lambda)} + \frac{D(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

ſiue

$$\int \Pi\, dy = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda} M + \frac{D(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}.$$

Ac ſi eundem valorem in formula pro tenſione inuenta ſubſtituamus, fiet tenſio $= -De^{-\lambda\Phi}$; vnde cum in ipſo initio A tenſio ſit cognita $= M$, ibique fiat $\Phi = 0$, erit $M = -D$, vnde diſcimus eſſe $D = -M$,

 ita

ita vt nunc habeamus

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} - \frac{M(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} = \int \Pi\, dx$$

atque

$$\int \Pi\, dy = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda} M - \frac{M(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

ac denique tensio $= M e^{-\lambda\Phi}$.

§. 23. Hinc vero etiam poterimus ipsam pressionem Π, quam funis in cylindrum exercet, definire: tantum enim opus est aequationem

$$\int \Pi\, dx = \frac{M}{1+\lambda\lambda} - \frac{M(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

differentiare. Quia igitur est $\Phi = \text{Atang.}\frac{1}{p}$, erit $d\Phi = -\frac{dp}{1+pp}$ ideoque differentiando

$$\Pi\, dx = -\frac{M\,dp(1-\lambda p)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda M(p+\lambda)\,dp\,e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{M\,dp\,e^{-\lambda\Phi}}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur sit radius osculi $r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ erit eo introducto $\Pi = \frac{M}{r} e^{-\lambda\Phi}$.

§. 24. Ecce ergo quemadmodum praeter omnem expectationem formulae, quas theoria nostra suppeditabat et quae taediosos calculos minari videbantur, ad valores maxime concinnos tandem deduxerint; vbi impri-

imprimis notari meretur, quaecunque fuerit figura cylindri siue curua A Y B, eius duo tantum elementa in calculo esse relicta; scilicet radium osculi curuae in Y qui est r et amplitudinem arcus A Y cuius mensura est angulus A H Y $= \Phi$. Atque ita tota solutio nostrae quaestionis his duabus determinationibus continebitur:

I. Pressionem funis in puncto Y esse $\Pi = \frac{M}{r} e^{-\lambda\Phi}$

II. Tensionem funis in eodem loco esse $= M e^{-\lambda\Phi}$

quae ergo, quo longius ab initio A progredimur, quoniam amplitudo Φ continuo crescit, eo fiet minor. Vnde si alter funis terminus in puncto curuae quocunque T statuatur et amplitudo arcus A Y T fuerit $= \theta$, tensio in hoc loco T erit $M e^{-\lambda\theta}$, ideoque si in hoc loco vis tendens huic aequalis fuerit applicata, totus funis in aequilibrio consistet; ita tamen, vt si vel tensio M tantillum augeretur vel tensio N tantillum diminueretur, statim funis ad motum concitaretur ab Y, versus A. Vbi maxime mirandum occurrit, quod hic tantum amplitudo curuae in censum veniat, dum radius osculi tantum in determinationem pressionis ingreditur.

§. 25. Quod si iam tensionem minorem N vt datam spectemus, erit maior $M = N e^{\lambda\theta}$, quae ergo etiamnunc cum illa in aequilibrio consistit. Vbi imprimis notandum est, quamdiu vis M minor fuerit quam $N e^{\lambda\theta}$ aequilibrium nihilo minus locum esse habiturum. Probe autem tenendum est tum

 friciofrictionem non amplius totam suam vim exerere, et quouis casu litteram λ eum valorem recipere, qui aequatione M conuenit: fiet scilicet $\lambda = \frac{1}{\theta} l \frac{M}{N}$. Vnde patet, si fuerit $M = N$ fore $\lambda = 0$, siue frictionem hoc casu nullam vim exerere; sin autem fuerit $M < N$, frictio in contrariam partem verget et funis in quiete perseuerabit, quamdiu vis M non infra valorem $N e^{-\lambda\theta}$ diminuitur, siquidem pro λ maximus valor accipiatur. Hinc ergo dum vis M vt data spectatur, aequilibrium perpetuo locum habebit, quamdiu altera tensio M intra limites $N e^{+\lambda\theta}$ et $N e^{-\lambda\theta}$ continetur, quod igitur interuallum eo maius erit quo maior fuerit amplitudo.

§. 26. Consideremus cylindrum horizontaliter fixum, cuius sectio transuersa verticalis sit figura Tab. V. quaecunque $AEBF$ in se rediens, cui incumbat Fig. 4. funis $MAEBN$ in vtroque termino A et B ponderibus M et N onustus, vbi ergo amplitudo arcus AEB sit $180° = \pi$, ac posita frictione, vti vulgo fieri solet, tertiae parti pressionis aequali, vt sit $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\theta = \pi$; funis in aequilibrio manebit, quamdiu ponderum ratio M intra hos limites $e^{+\frac{1}{3}\pi}$ et $e^{-\frac{1}{3}\pi}$ continetur. Cum igitur sit proxime $e^{\frac{1}{3}\pi} = 3$, limites intra quos aequilibrium subsistet erunt 3 et $\frac{1}{3}$, hoc est, quamdiu alterum pondus non plus quam triplo maius fuerit minusue altero. Sin autem funis circa cylindrum integram reuolutionem et insuper arcum AEB amplectatur, quoniam amplitudo erit 3π, ob ob $e^{\pi} = 27$ circiter, limites aequilibrii erunt 27 et $\frac{1}{27}$; ita vt quamdiu maius pondus M non plus quam 27 vicibus superet minus, funis in quiete sit mansurus; at si super arcum A E B duas integras reuolutiones conficiat, vt sit $\theta = 5\,\pi$, limites erunt 243 et $\frac{1}{243}$: accedente scilicet vna reuolutione integra, hi limites euadent nouies maiores et minores. Vnde intelligitur, quomodo ob frictionem maximum pondus a minimo in quiete seruari possit.

§. 27. Neque vero opus est vt figura sectionis sit in se rediens; sed solutio inuenta aeque locum habebit, si funis per gyros quotcunque siue continuo maiores siue minores circumplicetur, quoniam totum negotium in amplitudine arcus quem amplectitur consistit. Scilicet si funis per gyros A E F G H I K B circumducatur, antequam alteri termino in B pondus N appendatur, quoniam hic habentur duo gyri integri cum semisse, ita vt sit $\theta = 5\,\pi$, maius pondus M ad minus N rationem tenere poterit, vt 243 : 1, antequam motus incipiat: neque hic casus a praecedente discrepat, nisi quod minores gyri a fune maiorem pressionem sustineant quam maiores, pro paribus videlicet amplitudinibus, quandoquidem vidimus, pressionem in quouis loco esse $= \frac{M}{r}\, e^{-\lambda\theta}$. Tab. V. Fig. 5.

§. 28. Verum si fuerit $M > N\, e^{\frac{1}{3}\theta}$, tum funis non amplius manebit in quiete, sed a maiore pondere deorsum trahetur; quem motum haud difficulter sequenti modo definire poterimus. Sit enim

 M = N

$M = N e^{\alpha\theta}$, exiſtente $\alpha > \frac{1}{3}$, ac manifeſtum eſt, ſi frictio vsque ad α augeri poſſet, tum funem etiamnunc in aequilibrio eſſe verſaturum, et totam frictionem fore $= M = N e^{\alpha\theta}$. At vero frictio non vltra terminum $N e^{\frac{1}{3}\theta}$ increſcere poteſt, quae ergo vis tantum actioni ponderis M aduerſatur, vnde exceſſus vis ſollicitantis ſupra impedimentum frictionis erit $= M - N e^{\frac{1}{3}\theta} = N(e^{\alpha\theta} - e^{\frac{1}{3}\theta})$, quae vis ergo per maſſam mouendam diuiſa dabit accelerationem; quae cum ſit conſtans, motus inde orietur vniformiter acceleratus. Hac autem determinatione acquieſcere poterimus, niſi forte ex ipſis motus principiis initio expoſitis omnia motus phaenomena accurate inueſtigare voluerimus, id quod calculos maxime perplexos poſtularet, quos nunc quidem euoluere non vacat.

DE