OBSERVATIONES IN PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM *Illustr. Bernoulli*, Auctore L. EVLERO.

§. 1.

Quaestionem haud exigui momenti hic tractat Illustris *Bernoulli*, quemadmodum quantitatem incognitam ex pluribus obseruationibus inter se parumper discrepantibus concludi oporteat. Cuius quaestionis indoles, quo clarius perspiciatur, ponamus cuiuspiam loci eleuationem poli inueniri debere; plures autem obseruationes hunc in finem institutas praebere tales valores inter se discrepantes:

$$\Pi + a, \; \Pi + b, \; \Pi + c, \; \Pi + d, \text{ etc.}$$

vbi litterae a, b, c, d, etc. v. gr. in minutis secundis expressae habeantur, ex quibus vera huius loci eleuatio poli, quae sit $\Pi + x$, sit concludenda. Vulgo quidem haec quantitas x per medium arithmeticum inter omnes quantitates a, b, c, d, etc. assignari solet; vnde si obseruationem numerus fuerit $= n$, erit $x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}$.

§. 2. In hac autem regula manifesto assumitur omnes obseruationes pari gradu bonitatis esse praeditas. Si enim aliae aliis essent magis exactae, huius discriminis ratio vtique in computum duci deberet. Quanquam autem ex circumstantiis nulla pateat ratio, cur vni harum obseruationum maius pretium sit tribuendum quam reliquis: tamen Celeberrimus Auctor obseruat, his obseruationibus eo maiorem gradum bonitatis adiudicari debere, quo propius ad veritatem accesserint, quemadmodum etiam vulgo eiusmodi obseruationes quae nimis a veritate recedere cen-

sen-

ſentur prorſus reiici ſolent. Totum igitur negotium huc redit, vt indicetur, quomodo gradus bonitatis ſingulis obſeruationibus conueniens ſit aeſtimandus.

§. 3. Secundum mentem autem Illuſtris Auctoris aberrationem cuiusque obſeruationis a veritate quaſi iam eſſet cognita perpendi conueniet, quae cum pro prima obſeruatione ſit $x-a$; pro ſecnnda $x-b$; pro tertia $x-c$ etc. defectum cuiusque obſeruationis non tam ex his differentiis quam earum quadratis aeſtimari oportet; quandoquidem defectus ipſe idem eſt ſtatuendus, ſiue obſeruatio in exceſſu ſiue defectu aberrauerit. Hinc ergo ſi quaepiam obſeruatio cum veritate perfecte conueniat, eius defectus erit nullus: vnde ſi iſtius obſeruationis gradus bonitatis indicetur per rr, euidens eſt, gradum bonitatis primae obſeruationis indicari debere per $rr-(x-a)^2$, ſecundae per $rr-(x-b)^2$, tertiae per $rr-(x-c)^2$ et ita porro, vbi litterae r talis valor tribui debet, vt pro huiusmodi obſeruatione, quae tantum non reiicienda videatur, gradus bonitatis euaneſcat. Quare ſi ſumamus hoc contingere in obſeruatione, quae dediſſet $\Pi+u$, quoniam eius gradus bonitatis foret $rr-(x-u)^2$, ſtatui vbique debebit $rr=(x-u)^2$.

§. 4. His circa gradum bonitatis cuiusque obſeruationis ſtabilitis Illuſtris Auctor in ſubſidium vocat ſequens principium, cuius quidem nullam affert rationem: quod productum omnium illarum formularum, quibus gradus bonitatis ſingularum obſeruationum exprimitur, valorem *maximum* ſortiri debeat. Ex hoc ergo principio iubet iſtud productum differentiare, eiusque differentiale nihilo aequare, quandoquidem tum ex hac aequatione verus valor x ſit prodi turus; id quod nonnullis exemplis, ad ternas obſeruationes accommodatis, illuſtrat, vnde eiusmodi valores pro x deriuat, qui veritati admodum conformes videantur.

 §. 5.

§. 5. Istud autem principium pro tribus tantum obseruationibus deduxit ad aequationem quinti ordinis, cuius radicem x assignare oportebat; et si quis idem principium ad quatuor obseruationes accommodare vellet, perueniret ad aequationem septimi gradus: quinque autem obseruationes deducerent ad aequationem noni gradus et ita porro. Vnde manifesto liquet, hanc methodum nullo modo ad casus, vbi plures obseruationes proponuntur, in vsum vocari posse, id quod etiam Illustris Auctor ingenue concedit, dum totam dissertationem tanquam speculationem mere metaphysicam in medium attulerit.

§. 6. Verum quia Illustris Auctor hoc principium *maximi* nulla demonstratione corroborauit, haud aegre feret, si dubia quaedam contra illud proposuero. Namque assumamus inter obseruationes propositas vnam reperiri, quae tantum non reiici debuisset, cuius ergo gradus bonitatis esset quam minimus, euidens est, productum omnium memoratarum formularum etiam ad nihilum redigi, ita vt nullo modo amplius pro maximo haberi possit, quantumvis magnum etiam fuisset omissa ista obseruatione. Principia autem artis coniectandi manifesto declarant, eundem valorem quantitatis incognitae x prodire debere, siue talis obseruatio omni bonitate destituta in calculum introducatur, siue penitus reiiciatur.

§. 7. Arbitror autem in hac quaestione opus non esse ad principium maximorum confugere, cum praecepta certissima artis coniectandi prorsus sufficiant ad omnes huiusmodi quaestiones resoluendas. Si enim primae obseruationi, quae dederat $\Pi + a$ tribuamus pretium seu gradum bonitatis $= \alpha$, secundae $= \beta$, tertiae $= \gamma$, ex regulis huius artis quantitas incognita x ita determinatur, vt sit

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + etc.}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + etc.}$$

Hinc

Hinc igitur erit

$$\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)+\delta(x-d)+\text{etc.}=0.$$

Manifestum autem est, si omnes gradus bonitatis inter se essent aequales, numerusque obseruationum foret $=n$, tum reperiri $x=\frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n}$ quemadmodum regula vulgaris exhibet. Ex quo intelligitur, quatenus gradus bonitatis inter se discrepat, eatenus diuersos valores pro quantitate incognita x prodire posse.

§. 8. Cum igitur, vt Illustris Auctor ipse affirmat, gradus bonitatis litteris α, β, γ, δ, indicati sint

$$\alpha=rr-(x-a)^2,\ \beta=rr-(x-b)^2,$$
$$\gamma=rr-(x-c)^2,\ \delta=rr-(x-d)^2,\ \text{etc.}$$

posterior forma aequationis inuentae erit:

$$\left.\begin{matrix} rr(x-a)+rr(x-b)+rr(x-c) \\ -(x-a)^3-(x-b)^3-(x-c)^3 \end{matrix}\right\}\text{etc.}=0.$$

Vnde si numerus obseruationum $=n$ et breuitatis gratia ponatur:

$$a+b+c+d+\text{etc.}=\text{A}$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.}=\text{B}$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.}=\text{C}$$

ista aequatio redigetur ad sequentem formam satis simplicem:

$$nrrx-\text{A}rr-nx^3+3\text{A}xx-3\text{B}x+\text{C}=0$$

sicque peruenimus ad aequationem cubicam, ex qua incognitam x facile definire licebit, quantuscunque fuerit obseruationum numerus n.

§. 9. Quod si quantitatem r quasi infinitam spectemus, qui est casus, quo omnibus obseruationibus idem bonitatis gradus tribui solet, neglectis reliquis terminis ex hac aequatione statim deducitur

$$x=\frac{\text{A}}{n}=\frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n},$$

 pror-

prorſus vt regula, vulgo adhiberi ſolita, poſtulat. Quod ſi iam iſtum valorem deſignemus littera p, et in ipſis obſeruationibus loco Π ſcribamus $\Pi + p$, ſingulos numeros a, b, c, d, etc. eadem quantitate p diminui oportebit, ſicque ſumma omnium, quam poſuimus A, nunc erit $A = 0$. Ne autem hic nouas litteras in calculum introducamus, ſtatim quantitatem Π ita conſtituere poterimus, vt ſi valores ſingularum obſeruationum ſtatuantur

$$\Pi + a, \; \Pi + b, \; \Pi + c, \; \Pi + d, \text{ etc.}$$

ſumma litterarum $a + b, + c + d +$ etc. futura ſit $= 0$; tum igitur pro quantitate x inuenienda habebitur iſta aequatio multo ſimplicior:

$$n x^3 - n r r x + 3 B x - C = 0$$

vnde ſi r eſſet infinitum, ſequeretur $x = 0$; hincque euidens eſt, ſi iſta aequatio plures habeat radices reales, tum minimam pro x ſumi debere, ita vt verus valor quaeſtus futurus ſit $= \Pi + x$.

§. 10. At vero eandem hanc quaeſtionem adeo ad aequationem quadraticam reuocare licebit introducendo eiusmodi obſeruationem, quae, perpenſis omnibus circumſtantiis, reiicienda videretur, propterea quod nullum gradum bonitatis eſſet habitura. Sit igitur talis obſeruatio $\Pi + u$, et quia per hypotheſin eius gradus bonitatis, qui eſt $r r - (x - u)^2$ debet eſſe nullus, fiet $r r = (x - u)^2$. Hic autem valor in aequationem poſtremo loco inuentam introductus producet hanc formam:

$$2 n u x x - n u u x + 3 B x - C = 0.$$

In qua aequatione terminum $- n u u x$ vt maximum ſpectari conueniet, ita vt aequatio hac forma referri queat:

$$x (n u u - 3 B - 2 n u x) = - C,$$

vnde ſequitur

$$x = \frac{-C}{n u u - 3 B - 2 n u x},$$

vbi

vbi si loco x valor modo inuentus substituatur, pro x reperiemus hanc fractionem continuam:

$$x = [illegible] - \cfrac{C}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{\text{etc.}}}}}}$$

quae forma mox verum ipsius x valorem declarabit.

§. 11. Quoniam Illustris Auctor suam solutionem eiusmodi principio superstruxit, quod proprietate cuiuspiam maximi esset praeditum, nunc haud difficile erit eiusmodi formulam analyticam exhibere, quae maximo aequalis posita verum valorem ipsius x, esset ostensura. Vtamur hunc in finem forma primum inuenta

$$\begin{array}{l} rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} \\ -(x-a)^3 - (x-b)^3 - (x-c)^3 - \text{etc.} \end{array} = 0$$

quae spectetur tanquam differentiale cuiuspiam formulae, quae ad maximum reduci debeat; ipsa igitur haec formula prodibit, si haec expressio in dx ducta integretur. Multiplicemus autem per $4\,dx$ et integratio dabit

$$\begin{array}{l} 2rr(x-a)^2 + 2rr(x-b)^2 + 2rr(x-c)^2 + \text{etc.} \\ -(x-a)^4 - (x-b)^4 - (x-c)^4 - \text{etc.} \end{array} + C.$$

Haec autem forma, si pro constante sumamus $-nr^4$, existente n numero obseruationum, mutatis signis manifesto hinc nascitur ista formula:

$$(rr-(x-a)^2)^2 + (rr-(x-b)^2)^2 + (rr-(x-c)^2)^2 + \text{etc.}$$

§. 12. Loco ergo formulae, quam Ill. *Bernoulli* maximo aequari debere censuit nunc assecuti sumus aliam formulam ad quaestionis naturam maxime accommodatam, quae ad maximum reducta, verum praebet valorem ipsius x, quandoquidem ista formula obtinetur, si quadrata omnium graduum bonitatis in vnam summam colligantur.

§. 13. Vt nostrae methodi exemplum proferamus consideremus obseruationes, quibus Tomo I. priorum Academiae Commentariorum longitudo obseruatorii Petropolitani est conclusa ex differentia meridianorum inter obseruatorium Parisinum et Petropolitanum, quae ita referuntur

I. 1°. 51′. 50″.	IV. 1°. 51′. 50″.
II. 1. 51. 52.	V. 1. 51. 50.
III. 1. 51. 39.	VI. 1. 51. 50.

Ex quibus medium arithmeticum more solito sumtum dat 1°. 51′. 48$\frac{1}{2}$″.

§. 14. Nunc vt formulas nostras ad hunc casum applicemus, sumamus $\Pi = 1°. 51'. 48\frac{1}{2}''$. eruntque valores sex nostrarum litterarum a, b, c, d, e, f sequentes

$$a = 1\tfrac{1}{2},\ b = 3\tfrac{1}{2},\ c = -9\tfrac{1}{2},\ d = 1\tfrac{1}{2},\ e = 1\tfrac{1}{2},\ f = 1\tfrac{1}{2}$$

vnde vtique earum summa fit $A = 0$; tum vero inuenitur summa quadratorum $B = \frac{223}{2}$; summa cuborum vero $C = -801$. Vnde aequatio nostra ob $n = 6$ erit

$$\begin{aligned} 12uxx - 6uux & + 801 = 0. \\ & + 334\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

§. 15. Nunc numerum u ex eiusmodi casu difiniamus; quem Auctor obseruationum reiicendum censuit; talis erat 1°. 52′. 20″, vnde fit $u = 31\frac{1}{2}$. Ponamus autem esse $u = 30$, et aequatio nostra quadratica erit

$$360xx - 5065\tfrac{1}{2}x + 801 = 0$$

cuius loco in numeris rotundioribus scribere licet

$$36xx = 500x - 80 \text{ vnde fit } x = \frac{250 \pm \sqrt{59620}}{36}$$

hinceque colligitur vel

$$x = \frac{250 + 244}{36} = 14 \text{ vel } x = \frac{250 - 244}{36} = \frac{1}{6},$$

qui posterior valor solus locum habere potest, quem etiam am ſtatim colligere potuiſſemus neglecto in aequatione primo termino, vnde fuiſſet valor $x = \frac{8}{55} = \frac{1}{7}$ proxime, ſicque hinc erit differentia meridianorum quaeſita $= 1^{\circ}.51'.48\frac{2}{3}''$.

§. 16. Deinde etiam reiecta fuerat obſeruatio, quae dederat $1^{\circ}.51'.0''$, vnde fit $u = -48\frac{1}{2}$. Sumatur autem $u = -48''$ et aequatio noſtra erit

$$-576\,xx - 13489\tfrac{1}{2}\,x + 801 = 0,$$

vnde neglecto primo termino fit $x = \frac{8}{135} = \frac{1}{17}$. Quoniam autem haec obſeruatio reiici meruiſſet, ſi fuiſſet circiter $u = -300$, hinc ſubducto vt ante calculo, produiſſet $x = \frac{1}{6}$ circiter; vnde patet hoc caſu regula communi nos contentos eſſe potuiſſe, cum nequidem vnum minutum ſecundum ſpectari poſſit.

§. 17. Quoniam autem inter has obſeruationes tertia tantopere a reliquis diſcrepat, fortaſſe conueniet non procul ab ea limitem conſtituere. Quod ſi faciamus pro caſu $1^{\circ}.51'.33\frac{1}{2}''$, $u = -15''$ hinc aequatio noſtra foret

$$-180\,xx - 1000\,x + 800 = 0$$

cuius aequationis minor radix erit $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, ita vt hinc differentia meridianorum proditura ſit $1^{\circ}.51'.49\frac{1}{6}''$. Ex hoc caſu denuo patet, nullum notabilem errorem eſſe metuendum, niſi valde enormiter in aſſumtione numeri u aberraverimus, in quo negotio ſufficiet notaſſe, ſemper nuu multo maius eſſe debere quam 3 B.

§. 18. Imprimis haec methodus applicari meretur ad illas obſeruationes, ex quibus non ita pridem Cel. *Lexell* parallaxin Solis determinauit, vnde exempli loco tantum depromamus ſequentes quatuor concluſiones ex obſeruationibus formatas, quae erant; 8,52, 8,43, 8,86, 8,28 (I., II., III., IV.), inter quas medium arithmeticum ſumendo prodit 8,52. Quod ſi ergo ſtatuamus $\Pi = 8,52$ valores quatuor litterarum a, b, c, d ſequenti modo conſtitui poſſunt.

$a = 1.$

$$a = 1,\ b = 9,\ c = -34,\ d = +24,$$

vt eorum summa prodeat A = 0, scilicet hi numeri denotant partes centesimas vnius minuti secundi. Hinc ergo erit summa quadratorum B = 1814, summa vero cuborum C = −24750; vnde ob $n = 4$ aquatio nostra erit:

$$8uxx - 4uux + 5442x + 24750 = 0.$$

§. 19. Quod si iam sumamus pro termino vbi gradus bonitatis euanescit $u = 40$, aequatio nostra euadet

$$320xx - 948x + 24750 = 0.$$

Vnde autem valor ipsius x prodiret imaginarius; hanc ob rem sumamus $u = 50$ ac aequatio fiet

$$\begin{aligned} 400xx - 10000x &+ 24750 = 0 \\ +5442x & \end{aligned}$$

vnde adhuc in imaginaria incidmus. Sumto autem $u = 60$, erit minor valor ipsius $x = 3\frac{5}{12}$, qui autem valor nimis magnus videri posset. Eo autem admisso foret parallaxis Solis $= 8{,}555$. Ceterum notetur ex maioribus valoribus ipsius u minores valores pro x deduci. Et quoniam applicatio huius methodi tam est vaga, merito dubitare licet, num hac ratione propius ad veritatem accedere queamus. Ac fortasse sufficiet hinc saltem didicisse, vtrum valor ipsius x proditurus sit positiuus an negatiuus?

§. 20. Hoc quidem casu vidimus, valorem ipsius x certe esse positiuum, praeterea quod pro C numerum negatiuum inuenimus; vnde in genere obseruasse iuuabit, quoties numerus C prodierit positiuus, tum x fieri negatiuum, contra autem si C fuerit negatiuum, valorem ipsius x fore positiuum. Vtroque autem casu tam exiguus statui debebit, vt determinatio a regula vulgari vix discrepet. Saltem hoc adiici poterit, quo maior fuerit numerus C etiam valorem ipsius x augeri debere. Si enim etiam summa cuborum C euanesceret, tum semper

per foret $x = 0$, quicunque valor pro u acciperetur, prorſus vt regula vulgaris poſtulat.

§. 21. Hinc autem, non obſtante incertitudine a numero u oriunda, aliquid ſi non certum tamen ſatis probabile ſtatui poſſe videtur, ſi ad haec momenta attendamus. Primo certum eſt, quoties fuerit ſumma cuborum $C = 0$, tum etiam ſemper fore $x = 0$. Secundo, quo maior fuerit quantitas C, eo maiorem quoque futurum eſſe valorem ipſius x ſub ſigno contrario affectum. Tertio ſatis clarum eſt quantitatem nuu plurimum ſuperare debere quantitatem $3B$; quibus perpenſis ſatis probabili ratione ſtatui poſſe videtur $x = -\frac{C}{\lambda n B}$, vbi quidem numerus λ arbitrio noſtro relinquitur. Veruntamen pro omnibus caſibus vix a veritate aberrabitur, ſi ponatur $\lambda = 2$, vel ad ſummum $\lambda = 3$; diſcrimen enim hinc oriundum plerumque tam parui erit momenti, vt vix attendi mereatur. Caſus enim quo maximus error eſſet metuendus ſine dubio foret, ſi plures obſeruationes, quarum numerus ſit $= i$, prorſus inter ſe conuenirent, ſingulis exiſtentibus $= a$ quibuscum vnica obſeruatio coniungeretur praebens $-ia$, vt fiat ſumma omnium $A = 0$; tum autem erit ſumma quadratorum $B = iaa + iiaa = i(i+1)aa$; ſumma vero cuborum $ia^3 - i^3a^3 = -i(ii-1)a^3$. Nunc ergo ſi $n = i+1$, noſtra formula dabit $x = +\frac{i(ii-1)a^3}{\lambda i(i+1)^2 aa} = \frac{(i-1)a}{\lambda(i+1)}$, ergo ſi fuerit i numerus praegrandis et capiatur $\lambda = 2$, prodit $x = \frac{1}{2}a$. Sumto igitur $\lambda = 2$, in exemplo priore, vbi erat $n = 6$, $B = 111\frac{1}{3}$ et $C = -801$, fiet $x = +\frac{801}{12.111\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$ propemodum. Pro altero vero exemplo, quo $n = 4$, $B = 1814$ et $C = -24750$, fit $x = +\frac{24750}{8.1814} = \frac{8}{5}$ circiter, qui valores nihil abſurdi inuoluere videntur.

Si quis autem putet maiori iure ſumi debere $\lambda = 3$, operae vix pretium erit ſuper differentia diſputare, cum ipſa obſeruationum natura maiorem gradum praeciſionis non recipiat.