DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA DE LISLIANA IN MAPPA GENERALI IMPERII RVSSICI VSITATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim deliberaretur, quanam proiectionis ratione in construenda mappa generali Imperii Russici esset vtendum, primo quidem statim se obtulit proiectio Stereographica, qua ambo Hemisphaeria terrestria, superius scilicet et inferius, repraesentari solent; quoniam hoc modo non solum omnes circuli parallali a Meridianis normaliter traiicerentur, sed etiam omnes exiguae portiones ad similitudinem in superficie sphaerica exhiberentur. Atque hac proiectionis ratione tum temporis etiam vsus est Geographus praestantissimus et Professor Wittenbergensis *Hasius* in mappa generali huius Imperii exaranda.

§. 2. Verum in hac proiectione mox duo insignia incommoda sunt obseruata, quae scopo proposito maxime aduersabantur. Primo enim in Meridiano medio gradus latitudinis nimis sunt inaequales, dum prope Aequatorem duplo sunt minores quam circa polos; vnde hoc ingens incommodum nascebatur, vt pro regionibus circa oras huius mappae sitis scala milliarium multo maior euadat quam pro regionibus in medio mappae exhibitis, vnde mappam aspicienti Prouincia verbi gratia Kamtschatka fere quadruplo maior esset apparitura, quam Prouincia eiusdem magnitudinis in medio eiusdem mappae repraеpraeſentata. In conſtructione autem talis mappae id ante omnia neceſſarium videbatur, vt regiones eiusdem magnitudinis etiam pari quantitate exprimerentur, in quocunque mappae loco fuerint collocandae.

§. 3. Alterum autem incommodum in eo deprehendebatur, quod in hac proiectione Meridiani a medio verſus oras progrediendo continuo magis incuruentur, atque adeo extremi per ſemicirculos referrentur. Ita v. gr. in Prouincia Kamtſchatka omnes Meridiani forent arcus circulares ſatis notabiliter incuruati; vnde ſi quis hanc portionem ex mappa generali exſcinderet, aut delinearet, vt chartam ſpecialem iſtius Prouinciae adipiſceretur, ea maxime incongrua, et legibus, quae in conſtruendis chartis geographicis obſeruari ſolent maximi foret contraria. Id autem potiſſimum erat propoſitum, vt ex mappa generali omnes mappae ſpeciales ſola delineatione ſine vlla vlteriori reductione deſcribi poſſent et formam vſu receptam obtinerent.

§. 4. Repudiata igitur hac proiectionis ratione examini ſubiiciebatur ea ratio, qua Hemiſphaeria polaria vulgo repraeſentari ſolent; verum, quanquam hic omnes Meridiani per lineas rectas in polo concurrentes exprimuntur, quo pacto alterum incommodum euitaretur: tamen, quia in omnibus Meridianis ſinguli gradus latitudinis nimis ſunt inter ſe inaequales, dum circa polos duplo ſunt minores quam prope Aequatorem, etiam haec proiectio reiicienda eſt viſa; quandoquidem hoc inprimis poſtulabatur, vt per totam mappam vbique eadem ſcala milliarium locum habere et vera magnitudo ſingularum Prouinciarum ex aſpectu chartae geographicae rite diiudicari poſſet.

§. 5. De alia igitur proiectionis ratione erat cogitandum, quae primo omnes Meridianos per lineas rectas exhiberet, in quibus etiam omnes gradus latitudinis eandem quantitatem obtinerent; tum vero vt omnes Paralleli Meridianos ad angulos rectos traiicerent. Quoniam vero hoc modo neutiquam fieri

fieri poteſt, vt vbique gradus Parallelorum ad gradus Meridianorum iuſtam teneant rationem, quae ſcilicet in ſuperficie ſphaerica deprehenditur, conſultum viſum eſt, ab iſta ratione potius aliquantillum aberrare, quam memoratis commodis renunciare. Hinc igitur ſequens quaeſtio maximi momenti eſt nata: quomodo Meridiani cum Parallelis conſtitui debeant, vt a vera ratione, quam gradus longitudinis et latitudinis in Sphaera inter ſe tenent, per totam mappae extenſionem quam minime aberretur? ita ſcilicet, vt errores vix percipi poſſent, quandoquidem talis aberratio facile condonari poterit, ſi modo memorata commoda obtineantur.

§. 6. Huic requiſito celeberrimus tum temporis Aſtronomus et Geographus *Delisle*, cui cura talis mappae generalis primum erat demandata, ita ſatisfacere eſt annifus, vt pro duobus Parallelis notabilioribus iuſtam proportionem inter gradus longitudinis et latitudinis ſtabiliret, qui ſi paribus interuallis tam a Parallelo medio totius mappae quam ab extremis diſtarent, iudicauit, aberrationem nusquam notabilem eſſe poſſe. Hic igitur quaeritur, quinam bini paralleli in hunc finem eligi debeant, vt etiam maximi errores inde oriundi fiant omnium minimi.

§. 7. Sit igitur A B portio Meridiani cuiusque per Imperium Ruſſicum tranſeuntis, cuius terminus maxime meridionalis ſit in A, borealis vero in B, ac ponatur latitudo in A $= a$, in B vero $= b$, ita vt propemodum ſit $a = 40°$ et $b = 70°$; tum vero deſignet δ quantitatem vnius gradus in omnibus Meridianis. Sint porro puncta P et Q ea loca, vbi gradus longitudinis ad gradus latitudinis iuſtam tenere debeant rationem, ac ponatur pro puncto P latitudo $= p$, pro loco Q vero latitudo $= q$. Quoniam ergo gradus cuiusque Paralleli in ſphaera ſe habent ad gradus Meridiani, vt coſinus latitudinis ad ſinum totum, pro loco P ſumi debet gradus longitudinis $Pp = \delta \cos. p$ et pro loco Q vnus gradus longitudinis $Qq = \delta \cos. q$, Tab. II. Fig. 1.

 quae

quae lineolae Pp et Qq, etsi sunt arcus circulares, hic tanquam rectae ad Meridianum A B normales spectari poterunt.

§. 8. Ducatur nunc per puncta p et q recta $p\,q$ O Meridiano principali A B producto occurrens in O, atque haec recta O $q\,p$ referet proximum Meridianum a principali vno gradu secundum longitudinem remotum: eodemque modo ex puncto O omnes reliqui Meridiani facile educi poterunt. Pro puncto autem concursus O inueniendo fiat $Pp - Qq : PQ = Pp : PO$; hoc est: $\delta(\cos. p - \cos. q) : q - p = \delta \cos. p : PO$, vnde fit $PO = \frac{(q-p)\cos. p}{\cos. p - \cos. q}$. Ita si sumatur $p = 50°$ et $q = 60°$, reperietur interuallum $PO = 45°.\ 1'$. Quoniam igitur punctum P ab Aequatore distat $50°$, puncti O distantia ab Aequatore erit $95°.\ 1'$, ideoque vltra polum Terrae cadet ad distantiam $5°.\ 1'$.

§. 9. Quoniam igitur istud punctum O, ex quo omnes Meridiani educentur, diuersum prodiit a vero polo terrestri, vnde in Sphaera omnes Meridiani egrediuntur, hinc vtique in regionibus polo proximis maxime absurda repraesentatio nascetur. Verum quia in mappa generali Imperii Russici nulla loca vltra 70^{um}. gradum latitudinis exhiberi assumuntur, dummodo pro hac latitudine error non prodeat enormis, illa aberratio facile tolerari poterit. Inuento autem hoc puncto O, primum ex eo describatur interuallo O P circulus, cuius peripheria diuidatur in partes $= \delta \cos. p$ vniquippe gradui huius paralleli aequalibus, et rectae ex illo puncto O per singula diuisionum puncta ductae dabunt omnes Meridianos in mappa ducendos. Atque hoc modo omnes circuli ex centro O per singulos gradus Meridiani descripti dabunt omnes circulos parallelos in mappa constituendos, qui ita erunt comparati, vt pro binis latitudinibus p et q eorum gradus longitudinis ad gradus latitudinis veram teneant rationem. Hoc igitur modo rete pro tali mappa generali facile construetur, quo facto inscriptio omnium Prouinciarum nulla amplius laborabit difficultate.

§. 10.

§. 10. Nunc ante omnia videamus, quantopere haec repraesentatio in terminis mappae extremis A et B a veritate sit recessura. Sit igitur Aa vnus gradus Paralleli pro termino A, et Bb talis gradus pro termino B, qui reuera esse deberent δ cos. a et δ cos. b. Vt iam horum graduum quantitatem in mappa inuestigemus, quaeramus primo angulum POp vni gradui respondentem, qui erit

$$= \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta(\cos. p - \cos. q)}{q-p} = \frac{\cos. p - \cos. q}{q-p} \text{ ob } \delta = 1^{\circ}.$$

Hunc igitur angulum breu. gr. ponamus $=\omega$, vt sit $\omega = \frac{\delta(\cos. p - \cos. q)}{q-p}$. Hinc igitur, si vt supra sumamus $p = 50^{\circ}$ et $q = 60^{\circ}$, iste angulus POp fiet $\omega = 49'.6''$. In hoc autem calculo probe obseruandum est, interuallum $q-p$ non in gradibus, sed partibus radii exprimi debere, vbi notetur, quantitatem vnius gradus esse 0,01745329. Hinc igitur patet, angulos ω, qui ad punctum O singulos gradus longitudinis referunt, aliquanto minores esse vno gradu.

§. 11. Hic autem, rem in genere spectantes, statuamus istum angulum vni gradui respondentem $=\omega$, vt sit $\omega = \frac{\delta(\cos. p - \cos. q)}{q-p}$, vbi notetur, quia hic litterae p et q in gradibus exprimuntur, interuallum $q-p$ multiplicari debere per 0,01745329, cuius loco breuitates gratia scribamus α, ita vt sit $\omega = \frac{\delta(\cos. p - \cos. q)}{\alpha(q-p)}$, vbi loco δ scribi potest 1°, siquidem angulum ω etiam in gradibus desideramus. Praeterea ponamus distantiam puncti O vltra polum $= z$ gradibus. Quoniam igitur loci P distantia a polo est $90^{\circ} - p$, eius distantia a puncto O erit $90^{\circ} - p + z$, cuius valor in partibus radii erit $\alpha(90^{\circ} - p + z)$. Hoc autem interuallum ante inuentum est $= PO = \frac{(q-p)\cos. p}{\cos. p - \cos. q}$, quod, quia in gradibus exprimitur, aequari debet angulo $90^{\circ} - p + z$, ita vt hinc fiat $z = \frac{(q-p)\cos. p}{\cos. p - \cos. q} - 90^{\circ} + p$.

§. 12. His positis quia distantia termini A a polo est $90^{\circ} - a$, erit interuallum $AO = 90^{\circ} - a + z$ et in partibus

 radii

radii $= \alpha(90^\circ - a + z)$, quod per ω multiplicatum dabit gradum Aa, cuius ergo quantitas erit $\frac{\delta(90^\circ - a + z)(\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, q)}{q - p}$, qui gradus cum reuera esse debebat $= \delta\, \text{cof.}\, a$, differentia inter hos valores monstrabit errorem huius proiectionis in ipso termino A. Eodem modo pro altero termino B in hac proiectione gradus Paralleli erit $\frac{\delta(90^\circ - b + z)(\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, q)}{q - p}$, qui cum reuera sit $= \delta\, \text{cof.}\, b$, differentia inter hos valores ostendet errorem huius proiectionis in ipso termino B.

§. 13. Primo igitur bina loca intermedia P et Q ita accipi conueniet, vt errores in ambobus terminis A et B euadant inter se aequales, vnde obtinetur ista aequatio:

$$\frac{(90^\circ - a + z)(\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, q)}{q - p} - \text{cof.}\, a = \frac{(90^\circ - b + z)(\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, q)}{q - p} - \text{cof.}\, b$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(a - b)(\text{cof.}\, p - \text{cof.}\, q) + (q - p)(\text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b) = 0.$$

§. 14. Quo autem nostram inuestigationem faciliorem reddamus, loco quantitatum p et q in calculum introducamus interuallum z in gradibus expressum, quo punctum O vltra polum remouetur; atque insuper angulum ω, qui singulis gradibus longitudinis circa punctum O respondet, aut sub quo bini Meridiani proximi vno gradu distantes inuicem inclinantur, huncque angulum ω per gradus seu partes gradus solitas dari assumamus, quo pacto pro littera δ vnitatem scribere licebit. Hoc igitur modo vnus gradus paralleli in termino A erit

$= \alpha(90^\circ - a + z)\,\omega$, in termino vero B $= \alpha(90^\circ - b + z)\,\omega$.

Quia igitur in his locis quantitas horum graduum reuera est cof. a et cof. b, errores inter se aequati praebebunt hanc aequationem:

$\alpha(90$

$$\alpha(90^\circ - a + z)\omega - \text{cof.}\, a = \alpha(90^\circ - b + z)\omega - \text{cof.}\, b$$

quae reducitur ad hanc: $\alpha(a - b)\omega = \text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b$; vnde ſtatim colligimus $\omega = \frac{\text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b}{\alpha(b - a)}$, qui valor in partibus vnius gradus exprimetur.

§. 15. Poſtquam igitur errores proiectionis in ambobus terminis A et B aequales reddidimus, eos inſuper aequemus maximo errori qui vsquam intra interuallum A B locum habere poteſt, qui error cum incidat in medium X, cuius latitudo $= \frac{a+b}{2}$, error in hoc loco erit $\alpha(90^\circ - \frac{a-b}{2} + z)\omega - \text{cof.}\, \frac{a+b}{2}$, qui cum vergat in partem contrariam, ponendus erit

$$\text{cof.}\, \tfrac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \tfrac{a-b}{2} + z)\omega;$$

hic igitur error aequalis ſtatuatur erroribus pro a et b inuentis, et naſcentur hae duae aequationes:

$$\alpha(90^\circ - a + z)\omega - \text{cof.}\, a = \text{cof.}\, \tfrac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \tfrac{a-b}{2} + z)\omega \text{ et}$$

$$\alpha(90^\circ - b + z)\omega - \text{cof.}\, b = \text{cof.}\, \tfrac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \tfrac{a-b}{2} + z)\omega.$$

§. 16. At vero aequalitas errorum in terminis A et B iam nobis ſuppeditauit hanc aequationem: $\omega = \frac{\text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b}{\alpha(b - a)}$, qui valor in alterutra praecedentium aequationum ſubſtitutus ſuppeditabit hanc aequationem:

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z)(\text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b)}{b - a} = \text{cof.}\, a + \text{cof.}\, \tfrac{a+b}{2}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$180^\circ - \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}b + 2z = \frac{b - a}{\text{cof.}\, a - \text{cof.}\, b}(\text{cof.}\, a + \text{cof.}\, \tfrac{a+b}{2})$$

ex qua aequatione diſtantiam z facile definire licebit.

§. 17. Applicemus nunc haec ad caſum mappae Imperii Ruſſici, vbi ſit $a = 40^\circ$ et $b = 70^\circ$, hincque $\frac{a+b}{2} = 55^\circ$. Hinc igitur primo pro angulo ω nancifcemur hanc aequationem:

$$\omega = \frac{\text{cof. } 40^\circ - \text{cof. } 70^\circ}{30\,\alpha} = \frac{0{,}4240243}{0{,}5235987}$$

vnde reperitur $\omega = 48'.\ 44''$. Inuento igitur hoc valore prior aequatio, fubftitutis loco a et b valoribus, fit

$$\alpha(85^\circ + 2z)\omega = \text{cof. } 40^\circ + \text{cof. } 55^\circ = 1{,}33962$$

erat autem $\alpha\,\omega = \frac{0{,}42402}{30} = 0{,}0141$, ficque habebimus

$$85^\circ + 2z = \frac{1{,}33962}{0{,}01410} = 95^\circ.\ 0'\ \text{ideoque}\ z = 5^\circ.$$

§. 18. Suppofuimus hic errorem maximum circa medium interualli AB incidere; cum autem ab hoc loco difcrepare poffit, quaeramus hoc ipfum punctum X, vbi error fit maximus. Denotet igitur x latitudinem huius loci, et quia error ibi erit $\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \text{cof. } x$, eius differentiale nihilo aequemus. Hic autem cauendum eft, ne pro $d.\ \text{cof. } x$ more confueto fcribatur $-dx\ \text{fin. } x$; propterea quod hic x in gradibus exprimi affumitur, dum differentiale ipfius arcus, qui eft αx per fin. x multiplicari debet. Cum igitur fit

$$d.\ \text{cof. } x = -\alpha\,dx\ \text{fin. } x,$$

differentiale noftrae formulae dabit

$$-\alpha\,\omega\,dx + \alpha\,dx\ \text{fin. } x = 0\ \ \text{vnde fit}\ \ \text{fin. } x = \omega$$

vbi ω eft fractio fupra inuenta $= \frac{\text{cof. } a - \text{cof. } b}{\alpha(b-a)}$, cuius valor noftro cafu eft $\frac{0{,}4240243}{0{,}5235987} = \text{fin. } x$, vnde fit $x = 54^\circ.\ 4'$, qui ergo locus vix differt a puncto medio interualli A B.

§. 19. Hoc iam valore pro x inuento error in ifto loco erit $\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \text{cof. } x$, cuius negatiuum errori in terminis A et B aequale pofitum dabit hanc aequationem:

$$\alpha(180 - a - x + 2z)\omega = \text{cof. } a + \text{cof. } x$$

ex qua valor ipfius z definiri debet, fcilicet: quia eft $x = 54\tfrac{1}{15}^\circ$, aequatio erit $85\tfrac{14}{15} + 2z = \frac{\text{cof. } a + \text{cof. } x}{\alpha\,\omega} = 95^\circ.\ 56'$, ideoque $2z = 10^\circ$ et $z = 5^\circ$ exiftente $\omega = 0{,}8098270$ in gradibus, fiue $\omega = 48'.\ 44''$.

§. 20.

§. 20. Videamus igitur quantus iste error maximus in locis A, B et X sit futurus. Computemus hunc in finem errorem in A, qui cum sit $\alpha\omega(90° - a + z) - \text{cos}.\, a = 55\,\alpha\omega - 0{,}7660444$ ob $\alpha\omega = 0{,}01410$ euadet 0, 00946, scilicet, cum gradus Paralleli in latitudine A esse deberet $= 0{,}76604$, is in hac proiectione est aliquanto maior: scilicet 0,77550; et quoniam iste error in partibus vnius gradus Meridiani exprimitur, 15 milliaria tali gradui tribuendo, iste error valebit 0, 14190, hoc est circiter septimam partem vnius milliaris, siue vnam Verstam Ruthenicam. Iste igitur error in termino B seu latitudine 70° vbi vnus gradus Paralleli est 0, 34202, parti tantum trigesimae octauae aequatur, qui in ista regione facile tolerari potest.

§. 21. Pro construenda igitur mappa Imperii Russici aptissime punctum O in Meridiano medio BA vltra polum ad distantiam 5 graduum constituitur ex quo deinceps per singulos gradus latitudinis Meridiani AB facile describentur, in quibus gradus longitudinis ita designari debent, vt singulis circa punctum O conueniat angulus $48', 45''$; vnde cum interuallum OA sit $= 55°$, in parallelo per terminum A ducto vnus gradus longitudinis erit $= 55.\,\alpha\omega = 0{,}77550$, siue talis gradus se habebit ad gradum Meridiani vt $0{,}77550 : 1$ vnde haec diuisio satis expedite absolui poterit.

§. 22. Quoniam in hac proiectione omnes Meridiani per lineas rectas exhibentur, etiam alii circuli maximi, quos in mappa concipere licet, non multum a lineis rectis discrepabunt. Aequator quidem foret circulus centro O radio $= 95°$ descriptus; in quo singuli gradus futuri essent $95°.\,\alpha\omega = 1{,}33950$, qui tamen gradibus Meridiani aequales esse debebant; quoniam autem Aequator in nostra mappa non occurrit, iste error proiectioni nihil nocet. Videamus igitur, quantum circuli maximi in ipsa mappa ducendi a lineis rectis sint discrepaturi.

§. 23.

Tab. II. Fig. 2. §. 23. Quo iſta inueſtigatio facilius inſtitui poſſit, producatur noſter Meridianus medius AB tam ſurſum vsque in O quam deorſum vsque ad Aequatorem in E, ita vt ſit $EA = 40°$, $AB = 30°$ et $BO = 25°$; polus autem ſit in Π, exiſtente $\Pi O = 5°$ circulus autem centro O per E ductus referat Aequatorem, etſi eo in noſtra mappa non indigemus, in quo capiatur arcus EF 90 graduum quales modo definiuimus eritque angulus $EOF = 90°$, $\omega = 72°, 53'$, exiſtente interuallo $OF = 95°$. Erit igitur hoc punctum F communis polus omnium circulorum maximorum, qui ad noſtrum Meridianum AG normaliter duci poſſunt.

§. 24. Quod ſi ergo intra interuallum accipiamus punctum quodcunque z, per quod circulus maximus ad Meridianum AB normalis duci debeat, is vtique in z ad AB erit perpendicularis et per punctum F tranſibit. Vera autem eius figura curua erit maxime tranſcendens, interim tamen vix ſenſibiliter diſcrepabit ab arcu circulari, qui per puncta Z et F normaliter ad rectam AB ducetur, qui ſit arcus ZF, ad cuius curuaturum inueniendam, ex F ad rectam OE ducatur perpendiculum eritque

$$OG = 95° \text{ coſ. } 72°, 53' = 27,96024 \text{ et}$$

$$FG = 95° \text{ ſin. } 72°, 53' = 90,79221.$$

Hinc igitur patet ipſam rectam FG referre quadrantem circuli maximi ad Meridianum AB normalem, qui cum propemodum nonaginta gradus Meridiani contineat, a veritate vix aberrabit. At vero, ſi per terminum A talis circulus maximus ad BA normalis ducatur, eius arcus AF aliquanto maior erit quam recta FG; interim tamen error facile tolerari poterit. Radius enim talis circuli foret 165°, 9477 qui iam tantus eſt, vt eius curuatura in mappa vix perceptibilis

euadat

euadat, ideoque omnes circuli maximi in proiectione ducendi vix a lineis rectis sint discrepaturi.

§. 25. Quae hic de circulis maximis ad Meridianum medium AB normalibus sunt dicta, pari modo valent de omnibus circulis maximis, qui alios Meridianos normaliter traiiciunt; vnde etiam hoc insigne commodum istius proiectionis obtinetur, vt lineae rectae a quouis loco ad alium quemuis locum ductae respondeant satis exacte circulis maximis in ipsa superficie sphaerica ducendis, ac propterea distantiae quorumuis locorum in hac proiectione ope circini sine notabili errore definiri queant; quamobrem ob istas egregias proprietates haec ratio proiectionis pro mappa generali Imperii Russici merito omnibus aliis longe est praeferenda, etiamsi, summo rigore examinata, a veritate haud mediocriter recedat.