CONSIDERATIONES CIRCA BRACHYSTOCHRONAS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Problema I.

Tab. I. Fig. 1. *Inuenire curuas Brachystochronas* A M, *super quibus corpus breuissimo tempore ex* A *in* M *perueniat, dum scilicet, a grauitate naturali animatum, descensum in puncto* A *incboat.*

Solutio.

Sumto axe A P verticali sint pro curua quaesita coordinatae $AP = x$ et $PM = y$, atque ex natura motus constat fore celeritatem in puncto $M = 2\sqrt{gx}$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, ita vt formula $2\sqrt{gx}$ denotet spatium vno minuto secundo hac velocitate percurrendum. Quum nunc, posito $dy = p\,dx$, sit elementum curuae $Mm = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit tempus descensus per arcum $AM = \int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, idque in minutis secundis expressum; quae formula, quum debeat esse minimum, si comparetur cum formula illa generali in dissertatione: *Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi* Vid. *Comment. Nouor. Tom. XVI.* scil. cum $\int Z\,dx$, dat $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, et quia ibi posuimus $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, habebimus pro nostro casu $M = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{4x\sqrt{gx}}$, $N = 0$, $P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}}$; quare, vt prima pars variationis ad nihilum redigatur, fieri oportet $0 = N - \frac{dP}{dx}$, hoc est $\frac{dP}{dx} = 0$, vnde fit $P = C$.

Po-

§. 2. Ponatur ergo ad vniformitatem obtinendam $\frac{p}{2\sqrt{gx(1+pp)}} = \frac{1}{2\sqrt{ga}}$, vt fiat $p\sqrt{a} = \sqrt{x(1+pp)}$, vnde colligitur $p = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$; nunc ob $dy = p\,dx$ pro curua quaesita nanciscimur hanc aequationem differentialem $dy = dx\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, pro cuius integrali inueniendo capiatur in axe interuallum $AB = a$ et super AB tamquam diametro describatur semicirculus ANB, in quo erit applicata $PN = \sqrt{(ax-xx)}$, hinc

$$d.PN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$$

et differentiale arcus

$$d.AN = \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}},$$

atque hinc colligimus $d.AN - d.PN = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = dy$, vnde patet esse $PM = y = AN - PN$; ex quo manifestum est, curuam inuentam esse cycloidem, prouolutione circuli, cuius diameter est a, sub recta horizontali AC natam.

§. 3. Deinde etiam patet arcum curuae quaesitae fore $AM = \int dx\sqrt{(1+pp)} = \int\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}} = 2a - 2\sqrt{(aa-ax)}$. Iam vero quum sit $BP = a - x$, ducta chorda BN media proportionalis inter BP et BA erit haec chorda $BN = \sqrt{(aa-ax)}$, sicque fit arcus $AM = 2AB - 2BN$. Promoueatur punctum P ad B vsque, quo pacto curua AM porrigetur vsque in E eritque E punctum cycloidis imum, ibique applicata $BE =$ arcui ANB, tum vero arcus $AME = 2AB$; hinc ergo prodibit arcus $EM = 2BN$. Dehinc vero continuetur curua AME vltra E, donec ad horizontalem redeat in D, eritque $AD = 2ANB$.

§. 4. Quoniam vero porro variatio continet membrum $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)P$, vbi P est quantitas constans, euidens est

hanc

hanc partem variationis non euanescere nisi sit $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, atque hinc demum veram indolem huius quaestionis intelligimus, qua curua inuenta A M non absolute inter omnes curuas, sed inter eas tantum, quae per vtrumque terminum A et M transeunt, minimo gaudet tempore descensus.

§. 5. Inuestigemus autem etiam ipsum tempus, quo corpus ex A ad M pertingit, quod hac formula exprimitur

$$= \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{gx(a-x)}} = \frac{1}{\sqrt{ga}} \int \frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ga}} \int d.\,\mathrm{A.N},$$

sicque ipsum tempus per arcum A M in minutis secundis expressum $= \frac{\mathrm{AN}}{\sqrt{ga}}$. Quare si ratio diametri ad peripheriam statuatur $1 : \pi$, fiet arcus A N B $= \frac{1}{2}\pi a$; porro erit tempus descensus ad punctum imum per arcum A E $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$, cuius duplum dabit tempus per arcum A E D, quod ergo est $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, ipsum vero spatium A D $= \pi a$.

§. 6. Notetur hic corpus quod in A quieuerat per solam grauitatis actionem in locum D transferri posse, cogitationem quidem ab omni resistentia abstrahendo; atque si spatium hoc A D vocetur $= s$, vt sit $a = \frac{s}{\pi}$, tempus, quo hoc modo corpus ex A in D pertingit, erit $= \frac{\sqrt{\pi s}}{\sqrt{g}}$, quod ergo tempus erit vnum minutum secundum, si capiatur $s = \frac{g}{\pi}$, atque hoc tempus est breuissimum, quo corpus ex A in D transferri potest, atque in genere corpus hoc modo per spatium quodcunque A D $= s$ transferetur eodem tempore, quo per altitudinem πs delabi potest.

§. 7. Quoniam formula, quae in hac curua est minimum, erat $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{gx}}$, ea pertinet ad casum quem in dissertatione citata §. 43. sumus contemplati; quare si ad nostram curuam in puncto M ducatur normalis M ω, omnes curuae proximae ipsi A M, quae ad hanc

rectam

[illegible] M μ terminantur, hanc quoque habebunt proprietatem, vt pro iis variatio ſit nulla, hoc eſt vt omnes illae curuae aequalibus temporibus percurrantur; ſiquidem, quod probe notandum, omnes in eodem puncto A incipiant. Haec igitur recta M μ, quae ab omnibus curuis proximis arcus ſynchronos abſcindit, eos ſimul orthogonaliter ſecat.

§. 8. Quoniam aequatio pro curua A M inuenta $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ eſt adhuc differentialis, per integrationem praeter conſtantem a, alia conſtans arbitraria ingredietur, cum effici poteſt vt initium curuae in datum punctum A incidat, quare ſi hoc punctum fuerit fixum, integrationem ita abſolui conuenit, vt ſumto $x = 0$, ſimul fiat $y = 0$. Quia autem adhuc conſtantem a pro arbitrio aſſumere licet, manifeſtum eſt aequationem noſtram infinitas continere lineas curuas, omnes ſcilicet cycloides a circulis quibuscunque genitas et in eodem puncto A inchoantes, quae omnes inter ſe ſunt ſimiles, atque hinc ſequens Problema reſoluere poterimus.

Problema II.

§. 9. *Deſcriptis ſuper recta horizontali A D infinitis cycloidibus, quae omnes in eodem puncto A incipiant, inuenire lineam curuam, quae omnes has cycloides ad angulos rectos traiciat.*

Solutio.

§. 10. Sit curua AM vna quaecunque harum cycloidum, quae nata ſit ex circulo A N B, cuius diameter ergo vel radius hic vt variabilis eſt conſiderandus, vt ex eius variatione generatio omnium reliquarum cycloidum intelligi poſſit. Quum igitur quaeſtio huc ſit reducta, vt ab omnibus his cycloidibus arcus ſynchronos A M abſcindi opor- Tab. I. Fig. 1.

teat, tempus autem descensus per arcum A M supra ita expressum sit inuentum $= \frac{AN}{\sqrt{g.a}} = \frac{AN}{\sqrt{g.AB}}$, in omnibus his circulis vtcunque variatis perpetuo tantos arcus A N abscindi oportet, vt fiat $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}}$ quantitas constans, tum vero ex singulis punctis N reperientur totidem puncta M, sumendo $PM = AN - PN$, siue concinnius $NM = AN$, atque omnia haec puncta M determinabunt traiectoriam quam quaerimus.

§. 11. Ponamus huius circuli indefiniti radium $AO = BO = r$, vt sit $AB = 2r$, et vocemus angulum $AON = \Phi$, eritque arcus $AN = r\Phi$ et applicata PN $= r \sin. \Phi$, abscissa vero $AP = r(1 - \cos. \Phi)$, quae si vocetur $= x$, eique respondens applicata traiectoriae $PM = y$, iam habebimus has determinationes: $x = r(1 - \cos. \Phi)$ et $y = r(\Phi - \sin. \Phi)$. Verum hic talis relatio inter r et Φ subsistere debet, vt fractio $\frac{AN}{\sqrt{g.AB}} = \frac{r\Phi}{\sqrt{2gr}} = \frac{\Phi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$ semper constantem obtineat valorem.

§. 12. Statuamus ergo $\Phi\sqrt{r} = \sqrt{c}$, vt fiat $r = \frac{c}{\Phi^2}$, quo valore introducto pro coordinatis traiectoriae quaesitae habebimus has formulas:

$$AP = x = \frac{c}{\Phi^2}(1 - \cos. \Phi) \text{ et } PM = y = \frac{c}{\Phi} - \frac{c \sin. \Phi}{\Phi^2} = \frac{c}{\Phi^2}(\Phi - \sin. \Phi).$$

Hinc autem pro directione curuae cognoscenda iuuabit etiam differentialia adnotasse, quae reperiuntur:

$$dx = c\,d\Phi\left(\frac{\Phi \sin. \Phi - 2 + 2\cos. \Phi}{\Phi^3}\right); \quad dy = c\,d\Phi\left(\frac{-\Phi - \Phi\cos. \Phi + 2\sin. \Phi}{\Phi^3}\right)$$

vnde anguli, quem tangens traiectoriae in M facit cum axe A B, tangens prodit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\Phi - \Phi\cos. \Phi + 2\sin. \Phi}{2 - 2\cos. \Phi - \Phi\sin. \Phi} = \frac{\Phi(1 + \cos. \Phi) - 2\sin. \Phi}{\Phi\sin. \Phi - 2(1 - \cos. \Phi)}$$

quae fractio reducitur ad hanc:

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos. \frac{1}{2}\Phi - 2\sin. \frac{1}{2}\Phi)}{\sin. \frac{1}{2}\Phi(\Phi\cos. \frac{1}{2}\Phi - 2\sin. \frac{1}{2}\Phi)}$$

ita

ita vt habeamus $\frac{dy}{dx} = -\cot.\frac{1}{2}\Phi$; vnde patet angulum illum, cuius tangens est $-\frac{dy}{dx}$, fore $= 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$. Hinc porro, si elementum curuae vocetur ds erit $\frac{dx}{ds} = \sin.\frac{1}{2}\Phi$ et $\frac{dy}{ds} = -\cos.\frac{1}{2}\Phi$, vnde colligitur

$$ds = c\,d\Phi\,\frac{(\Phi\sin.\Phi - 2(1 - \cos.\Phi))}{\Phi^3\sin.\frac{1}{2}\Phi}$$

$$dy = 2c\,d\Phi\,\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3},$$

vnde per reductiones obtinemus:

$$\frac{y}{2c} = -\frac{\sin.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} = -\frac{\sin.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi^2} - \frac{1}{2}\frac{\cos.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi} - \frac{1}{4}\int\frac{d\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi}{\Phi}$$

denique radius osculi traiectoriae in puncto M est

$$= 4c\,\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$$

qui ergo etiam hoc modo exprimi potest:

$$\frac{2ds}{d\Phi} = \frac{2dx}{d\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-2dy}{d\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{-dx}{d.\cos.\frac{1}{2}\Phi} = \frac{+dy}{d.\sin.\frac{1}{2}\Phi}.$$

§. 13. His praenotatis in praecipua symptomata et proprietates huius traiectoriae inquiramus, ac primo quidem sumamus angulum $\Phi = 0$, seu infinite paruum, atque reperiemus abscissam $x = \frac{c}{2}$ et applicatam $y = 0$. Sumatur ergo in axe verticali altitudo $AG = \frac{1}{2}c$, eritque punctum G initium traiectoriae sursum vergentis, quae ad verticalem erit normalis ob $\frac{dy}{dx} = \infty$, at vero radius osculi in hoc puncto G erit $4c\frac{(\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi - 2\sin.\frac{1}{2}\Phi)}{\Phi^3}$, posito $\Phi = 0$, qui valor reperitur $= \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}AG$. Hic notasse iuuabit, tempus descensus per hanc altitudinem AG praecise conuenire cum tempore omnium arcuum synchronorum AM. Tab. I. Fig. 2.

§. 14. Crescente angulo Φ curua haec sursum flectitur, ad cuius tractum cognoscendum sumamus angulum $\Phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ eritque $\sin.\frac{1}{2}\Phi = \cos.\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde abscissa $x = \frac{4c}{\pi^2}$ et applicata $y = \frac{4c}{\pi\pi}(\frac{\pi}{2} - 1)$; hoc porro loco $-\frac{dy}{dx} = 1$, quod indicat, tangentem in hoc puncto cum adplicata angulum semirectum facere. Hic vero radius osculi erit $\frac{16c(\pi-4)}{\pi^3\sqrt{2}}$, vel mutato signo, vti etiam pro puncto G fecimus, erit radius osculi $= \frac{16c(4-\pi)}{\pi^3\sqrt{2}}$, cuius valor est propemodum $0,313.c$ ideoque paulisper minor quem in puncto G.

§. 15. Sumamus nunc $\Phi = 180^\circ = \pi$, et abscissa prodibit $x = \frac{2c}{\pi\pi}$ et applicata $y = \frac{c}{\pi}$; tum vero fit $-\frac{dy}{dx} = 0$, vnde tangens curuae in hoc puncto erit verticalis, ac propterea ista applicata PM omnium maxima. Per fractiones autem decimales pro hoc puncto reperitur abscissa $x = 0,2026.c$ et $y = 0,318.c$. Radius osculi denique in hoc puncto colligitur mutato signo $= \frac{8c}{\pi^3}$, proxime $= 0,258.c$ sicque curuatura continuo diminuitur.

§. 16. Ponamus nunc $\Phi = 2\pi$, vt fiat $\sin.\frac{1}{2}\Phi = 0$, $\cos.\frac{1}{2}\Phi = -1$, ibi ergo erit abscissa $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{2\pi}$. Hic ergo curua ad summam lineam horizontalem pertingit, eiusque distantia a puncto A semissis est applicatae maximae, quippe quae erat $\frac{c}{\pi}$. Quum vero hic fiat $-\frac{dy}{dx} = \infty$, tangens curuae erit ipsa recta horizontalis suprema. Hoc porro loco radius osculi colligitur $= \frac{c}{\pi\pi}$, proxime $= 0,101.c$, ita vt adhuc curuatura diminuatur.

§. 17. Statuamus porro $\Phi = 3\pi$, vt fiat

$$\sin.\tfrac{1}{2}\Phi = -1 \text{ et } \cos.\tfrac{1}{2}\Phi = 0.$$

Pro hoc ergo loco fit abscissa $x = \frac{2c}{9\pi^2}$, proxime $= 0,022.c$ et et applicata $y = \frac{c}{3\pi}$, tum vero ob $-\frac{dy}{dx} = 0$, tangens in hoc loco erit verticalis, atque radius osculi $= -\frac{8c}{9\pi^3}$, vnde curua iam curuaturam mutauit, et, antequam huc peruenit, alicubi radius osculi euanuerit necesse est, quod euenit sumendo $\Phi = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\Phi$. Ad hunc locum inueniendum ponamus fuisse $\Phi = 3\pi - \omega$ eritque

$$3\pi - \omega = 2 \text{ tang.} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\omega$$

vnde patet angulum ω esse satis paruum. Ibi vero curua punctum flexus contrarii habuerit necessum est, ex quo sursum reflectendo ad eum locum pertingit, quem hic definiuimus.

§. 18. Ponendo iam $\Phi = 4\pi$, quo casu fit

$$\text{sin.} \tfrac{1}{2}\Phi = 0 \text{ et cos.} \tfrac{1}{2}\Phi = 1$$

abscissa euadit $x = 0$ et applicata $y = \frac{c}{4\pi}$, hicque tangens iterum fit horizontalis ob $-\frac{dy}{dx} = \infty$; radius osculi vero reperitur $= -\frac{c}{4\pi\pi}$, qui scilicet est negatiuus ob cuspidem praecedentem. Hic ergo curuatura quadruplo maior est, quam casu $\Phi = 2\pi$.

§. 19. Ponamus nunc in genere $\Phi = 2n\pi$, existente n numero integro quocunque, et ob sin. $\Phi = 0$ et cos. $\Phi = 1$ erit abscissa $AP = x = 0$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{2n\pi} = \frac{0{,}159155.c}{n},$$

deinde quum sit

$$-\frac{dy}{dx} = \text{cot.} \tfrac{1}{2}\Phi = \text{tang. } ATM,$$

ita vt sit angulus $ATM = 90° - \frac{1}{2}\Phi$, erit hic angulus $ATM = 90° - n\pi$, hoc est rectus, seu tangens MT erit horizontalis; tum vero radius osculi in hoc loco erit

$$= -\frac{c \text{ cos. } n\pi}{nn\pi\pi} = -\frac{0{,}101321.c.\text{cos. } n\pi}{nn},$$

vbi cos. $n\pi$ est vel $+1$ vel -1, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

§. 20. At ſi fuerit $\Phi = (2n+1)\pi$, ob ſin. $\Phi = 0$ et coſ. $\Phi = -1$, erit abſciſſa

$$AP = x = \frac{2c}{(2n+1)^2\pi\pi} = \frac{0,202642.\,c}{(2n+1)^2}$$ et applicata

$$PM = y = \frac{c}{(2n+1)\pi} = \frac{0,318310.\,c}{2n+1},$$

deinde vero prodit angulus

$$ATM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi = 90^\circ - \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

ſiue tangens in his locis erit verticalis. Radius oſculi denique reperitur

$$= \frac{8\,c.\,\text{ſin.}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi}{(2n+1)^3.\,\pi^3} = \frac{0,258012.\,c.\,\text{ſin.}\,(n+\frac{1}{2})\,\pi}{(2n+1)^3}$$

vbi ſin. $(n + \frac{1}{2}\pi)$ eſt vel $+1$ vel -1, prouti numerus n fuerit vel par, vel impar.

§. 21. Iam obſeruauimus paulisper ante iſta loca radium oſculi euaneſcere ibique curuam cuſpide eſſe donatam: ſingulas igitur has cuſpides inueſtigaſſe operae erit pretium. Ex formula autem generali liquet, radium oſculi euaneſcere, quoties fuerit

$$\Phi = 2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi}{1+\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{2\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}$$

quae aequatio innumerabiles admittit ſolutiones, vti mox videbimus. Nunc autem pro his caſibus ſtatim manifeſtum eſt fore abſciſſam $x = \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{4(1-\text{coſ.}\,\Phi)} = \frac{c(1+\text{coſ.}\,\Phi)}{4}$ et applicatam $y = \frac{1}{4}c.\,\text{ſin.}\,\Phi$; tum vero in his cuſpidibus tangens ad verticalem inclinatur angulo $= 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$, atque adeo ad horizontalem AD angulo $= \frac{1}{2}\Phi$.

§. 22. Quoniam iſtae cuſpides reperiuntur in locis, vbi angulus Φ aliquanto minor eſt quam $(2n+1)\pi$, ad eas inueniendas ponamus $\Phi = (2n+1)\pi - 2\omega$, vt ſit $\frac{1}{2}\Phi = (n+\frac{1}{2})\pi - \omega$, qui ergo arcus aequari debet

$$= \text{tang.}\left((n+\tfrac{1}{2})\pi - \omega\right) = \frac{1}{\text{tang.}\,\omega} = \frac{\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$$

ita vt habeatur haec aequatio: $(n+\frac{1}{2})\pi - \omega = \frac{\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, ex qua quaeri oportet omnes valores anguli ω; vbi ſtatim appa-

ret

ret, si numerus n esset infinitus, fore $\pi = 0$; ex quo intelligitur, quo maior sit numerus n, eo minorem prodire angulum ω. Ponamus ergo breuitatis gratia $(n+\frac{1}{2})\pi = \alpha$ et multiplicando per fin. ω habebimus α fin. $\omega - \omega$ fin. $\omega =$ cof. ω; sed quia angulus ω est satis exiguus, ideoque vero proxime fin. $\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5$ et cof. $\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4$ nostra aequatio hanc induet formam:

$$0 = 1 - \alpha\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\alpha\omega^3 - \frac{1}{8}\omega^4 - \frac{1}{120}\alpha\omega^5 + \frac{1}{144}\alpha\omega^6 + \frac{1}{5040}\alpha\omega^7.$$

§. 23. Si termini post duos priores negligantur, sequitur $\omega = \frac{1}{\alpha}$, qui ergo est valor prope verus; pro vero ergo ponamus

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\alpha^3} + \frac{B}{\alpha^5} + \frac{C}{\alpha^7}$$

cuius potestates dabunt

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2A}{\alpha^4} + \frac{2B + AA}{\alpha^6}$$

$$\omega^3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{3A}{\alpha^5} + \frac{3AA + 3B}{\alpha^7}$$

$$\omega^4 = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{4A}{\alpha^6}$$

$$\omega^5 = \frac{1}{\alpha^5} + \frac{5A}{\alpha^7}$$

$$\omega^6 = \frac{1}{\alpha^6}$$

$$\omega^7 = \frac{1}{\alpha^7}$$

Substituantur igitur isti valores et termini in columnas disponantur secundum potestates ipsius α, sequenti modo:

$\frac{1}{\alpha^0}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha^6}$
1			
-1	$-A$	$-B$	$-C$
	$+\frac{1}{2}$	$+1A$	$+\frac{2B+AA}{2}$
	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{2}A$	$+\frac{AA}{2} + \frac{B}{2}$
		$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}A$
		$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}A$
			$+\frac{1}{144}$
			$+\frac{1}{5040}$

Quia

Quia prima columna per se euanescit, singulae sequentium seorsim ad nihilum redigantur, vnde prodibunt sequentes aequationes:

$$-A+\tfrac{2}{3}=0;\ -B+\tfrac{3}{2}A-\tfrac{2}{15}=0;\ -C+\tfrac{3}{2}B+AA-\tfrac{13}{20}A+\tfrac{1}{140}=0.$$

Ex harum prima reperitur $A=\frac{2}{3}$, qui valor substitutus in secunda dat $B=\frac{13}{15}$ et $-C+\frac{13}{10}+\frac{4}{9}-\frac{13}{30}+\frac{1}{140}=0$, vnde $C=\frac{146}{105}$.

§. 24. His itaque inuentis angulus quaesitus ω ita exprimitur vt sit

$$\omega=\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}+\frac{13}{15.\alpha^5}-\frac{146}{105.\alpha^7}$$

existente $\alpha=(2n+\frac{1}{2})\pi$; vbi notandum est arcum ω hoc modo exprimi in partibus radii; vnde is in minutis secundis reperietur, si a logarithmo ω subtrahatur 4, 6855749. Hanc autem reductionem statim obtinebimus, si a logarithmis numeratorum illorum quatuor hic logarithmus constans statim subtrahatur; scilicet primae fractionis logarithmus est 5, 3144251 $-l\alpha$; secundae fractionis logarithmus est 5, 1383338 $-3l\alpha$; tertiae partis logarithmus est 5, 2522772 $-5l\alpha$ et logarithmus quartae fractionis 5, 1712615 $-7l\alpha$.

§. 25. Sumamus nunc pro n successiue 1, 2, 3, 4 etc. et quum sit $\pi=3,14159265$ etc. habebimus sequentes valores pro logarithmo α, vnde reperitur

si $n=1$ erit Log. $\alpha=0,6732411$;	$\omega=12°, 32', 24''$
si $n=2$ erit Log. $\alpha=0,8950898$;	$\omega=7°, 22', 32''$
si $n=3$ erit Log. $\alpha=1,0412178$;	$\omega=5°, 14', 23''$
si $n=4$ erit Log. $\alpha=1,1503623$;	$\omega=4°, 3', 59''$
si $n=5$ erit Log. $\alpha=1,2375225$;	$\omega=3°, 19', 24''$.

§. 26. Quum igitur posuissemus $\Phi=(2n+1)\pi-2\omega$ pro qualibet cuspide habebimus abscissam

$$x=\tfrac{1}{4}c(1-\cos. 2\omega)=\tfrac{1}{2}c\,\sin.\omega^2$$

et

ad applicatam

$$y = \tfrac{1}{4} c \text{ fin. } 2\omega = \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \omega . \text{ cof. } \omega$$

ita vt fit $\frac{y}{x} = $ tang. ω; deinde vero angulus

$$ATM = \omega - n\pi = n\pi + \omega,$$

seu fimpliciter $= \omega$, ex quibus fingularum cufpidum pofitio innotefcit.

Problema III.

§. 27. *In genere inveftigare curuas Brachyftochronas, quomodocunque celeritates per binas coordinatas* x *et* y *determinentur.*

Solutio.

§. 28. Sit curua AM brachyftochrona quaefita, in cuius puncto M fit celeritas functio quaecunque coordinatarum x et y, quam ponamus $= \frac{1}{v}$, fitque $dv = m\,dx + n\,dy$. Quia igitur tempus per arcum AM eft $\int v\,dx \sqrt{(1+pp)}$ idque debet effe minimum, in forma noftra generali fit $Z = v\sqrt{(1+pp)}$ hincque $M = m\sqrt{(1+pp)}$, $N = n\sqrt{(1+pp)}$ et $P = \frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}$; quare quum pro curua quaefita fit $0 = N - \frac{dP}{dx}$, habebimus fequentem aequationem:

$$0 = n\,dx\sqrt{(1+pp)} - d\left(\frac{vp}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = n\,dx\sqrt{(1+pp)}$$

[illegible] $- \frac{p(m\,dx + n\,dy)}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{v\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$:

quae reducitur ad hanc formam:

[illegible] $\frac{n\,dx - m\,dy}{v} = \frac{dp}{1+pp}$,

quam, quibusnam in cafibus integrare liceat, inueftigemus.

§. 29. Vt priorem partem integrabilem reddamus, multiplicemus per

$$\frac{dv}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m\,dx + n\,dy}{n\,dx - m\,dy} = \frac{m + np}{n - mp}$$

vt prodeat hac aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$, cuius ftatim duo fe offerunt cafus, quibus ea integrationem admittit:

 alter

alter si $n = 0$, alter vero si $m = 0$; quos ambos data opera euoluamus.

§. 30. Sit igitur primo $n=0$, quod euenit si v fuerit functio ipsius x tantum, quae sit $v = X$; ac tum aequatio nostra erit: $\frac{dv}{v} = \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p(1+pp)}$, cuius integrale est

$$LX = L\surd(1+pp) - Lp + LA$$

sicque fiet $X = \frac{A\surd(1+pp)}{p}$, vnde colligitur

$$p = \frac{A}{\surd(XX-AA)} \text{ et } \surd(1+pp) = \frac{X}{\surd(XX-AA)};$$

tum vero, ob $dy = p\,dx$, aequatio pro brachystochrona resultat $dy = \frac{A\,dx}{\surd(XX-AA)}$, vbi notandum, constantem arbitrariam A infinitas huiusmodi brachystochronas comprehendere. Sequens autem integratio ita expediri potest, vt curua in dato puncto, verbi gratia in A, incipiat: at vero formula minimi pro hoc casu erit $\int\frac{X^2\,dx}{\surd(XX-AA)}$.

§. 31. Sit iam $m=0$, siue v functio solius y, quae sit $v=Y$ atque nostra aequatio fit: $\frac{dv}{v} = \frac{dY}{Y} = \frac{p\,dp}{1+pp}$, cuius integrale est $LC = L\surd(1+pp) + LA$, siue $Y = A\surd(1+pp)$, vnde fit

$$p = \frac{\surd(YY-AA)}{A} \text{ et } \surd(1+pp) = \frac{Y}{A}.$$

Hinc ob $p = \frac{dy}{dx}$ aequatio inter coordinatas colligitur $dx = \frac{A\,dy}{\surd(YY-AA)}$: at formula minimi pro his curuis erit $\int\frac{Y^2\,dy}{\surd(YY-AA)}$, qui casus a praecedente prorsus non discrepat, et ex eo per solam commutationem coordinatarum immediate deduci potuisset. Caeterum hic iterum effici potest, vt omnes istae curuae in eodem dato puncto incipiant.

§. 32. Praeter hos autem duos casus datur adhuc tertius hoc modo eruendus: alterum membrum $\frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-xp)}$ resoluetur in duas fractiones, quarum alterius denominator sit $1+pp$, alterius vero $n-mp$, atque elicietur ista aequatio: $\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{m\,dp}{n-mp}$, quae manifesto est integrabilis,

bilis, si fuerit $m = x$ et $n = y$, quod idem euenit, si fuerit $m = s x$ et $n = s y$; tum enim aequatio nostra

$$\frac{dv}{v} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{x\,dp}{y-px}$$

integrata dat

$$L\,v = L\,\sqrt{(1+pp)} - L\,(y-px) + L\,A,$$

siue $v = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Iam vero quantitatem v ex hac conditione definiri oportet: $dv = s\,(x\,dx + y\,dy)$; vnde perspicuum est s esse debere functionem ipsius $\sqrt{(xx+yy)}$, vnde etiam v aequabitur functioni eiusdem formulae $\sqrt{(xx+yy)}$. Hic quidem euidens est loco x et y sumi potuisse $x+a$ et $y+b$: at quia hoc non curuae mutarentur sed tantum positio axis, hanc varietatem considerare superfluum foret. Quare si initium harum curuarum detur, veluti in A, tum non opus est, vt pro hoc puncto sit $x = 0$ et $y = 0$, sed quantitates constantes quaecunque admitti possunt.

§. 33. Quodsi ergo v fuerit functio quaecunque quantitatis $\sqrt{(xx+yy)}$, pro brachystochronis habebimus hanc aequationem:

$$v\,(y-px) = A\sqrt{(1+pp)},$$

ex qua elicimus

$$p = \frac{v\,v\,x\,y \pm A\sqrt{(v\,v\,(xx+yy) - AA)}}{v\,v\,x\,x - AA}.$$

Quia nunc $p = \frac{dy}{dx}$ nanciscimur hanc aequationem differentialem:

$$dy\,(v\,v\,x\,x - AA) = v\,v\,x\,y\,dx + A\,dx\sqrt{(v\,v\,(xx+yy) - AA)}$$

quam autem, quomodo tractare oporteat, ex hac forma vix patet.

§. 34. Vtamur autem sequenti substitutione: ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = u$, et $y = t\,x$, ita vt aequatio ad binas tantum variabiles t et u sit reducenda; at per eas x et y ita determinantur, vt sit $x = \frac{u}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+tt)}}$, ex quorum differentialibus colligitur

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{t\,du(1+tt) + u\,dt}{du(1+tt) - ut\,dt}$$

qui valores, in ſuperiori expreſſione pro p inuenta ſubſtituti, praebent

$$\frac{t\,du(1+tt)+u\,dt}{du(1+tt)-ut\,dt} = \frac{vvtuu \pm A(1+tt)\surd(vvuu-AA)}{vvuu-AA(1+tt)}$$

quae a fractionibus liberata abit in hanc:

$$u\,dt(vvuu-AA(1+tt))+t\,du(1+tt)(vvuu-AA(1+tt))$$
$$= -ut\,dt(vvtu\omega \pm A(1+tt)\surd(vvuu-AA)$$
$$+du(1+tt)(vvtuu \pm A)1+tt)\surd(vvuu-AA))$$ ſeu
$$0 = u\,dt(1+tt)(vvuu-AA \pm A\surd(vvuu-AA))$$
$$-A\,du(1+tt)^2(A \pm \surd(vvuu-AA)).$$

Haec aequatio reducitur ad hanc:

$$\frac{dt}{1+tt} = \frac{A\,du(A \pm \surd(vvuu-AA))}{u(vvuu-AA \pm A\surd(vvuu-AA))}$$

quae manifeſto in hanc formam transfunditur:

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm \frac{A\,du}{u\surd(vvuu-AA)}$$

vbi ambae variabiles t et u a ſe inuicem ſunt ſeparatae, ideoque hinc curuas conſtruere licet.

§. 35. Num autem praeter hos caſus alii adhuc dentur, qui conſtructionem admittant, merito dubitamus, niſi forte quis adiungere velit eiusmodi caſus, qui per immutationem coordinatarum reſultant, dum ipſae lineae curuae prorſus manent eaedem. Ita aequatio primo inuenta $\frac{dv}{v} = \frac{dp(m+np)}{(1+pp)(n-mp)}$ etiam integrabilis euadit, ſumendo $m = \alpha s$ et $n = \beta s$, ſiquidem hinc oritur iſta aequatio:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp(\alpha+\beta p)}{(1+pp)(\beta-\alpha p)} = \frac{p\,dp}{1+pp} + \frac{\alpha\,dp}{\beta-\alpha p},$$

cuius integrale fit $Lv = L\surd(1+pp) - L(\beta-\alpha p) + LA$ ſiue $v = \frac{A\surd(1+pp)}{\beta-\alpha p}$. Quoniam vero tum fit $dv = s(\alpha\,dx + \beta\,dy)$ euidens eſt quantitatem v fore functionem formulae $\alpha x + \beta y$. Vnde ſi coordinatae ita mutentur, vt $\alpha x + \beta y$ iam fiat ipſa

ipsa abscissa, habebitur casus, quo v est functio quaecunque abscissae, qui igitur conuenit cum casu nostro primo.

§. 36. Calculus hic non parum molestus facilius ita expediri potest. Quum sit $p = \frac{t\,du(1+tt)+u\,dt}{du(1+tt)-ut\,dt}$, erit $y-px = \frac{-uu\,dt\,\sqrt{(1+tt)}}{du(1+tt)-ut\,dt}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(1+tt)((1+tt)du^2+uu\,dt^2)}}{du(1+tt)-ut\,dt}$, vnde aequatio primo inuenta $v(y-px) = A\sqrt{(1+pp)}$ transmutatur in hanc:

$$-vuu\,dt = A\sqrt{((1+tt)du^2+uu\,dt^2)}$$

ex qua sumtis quadratis elicitur

$$\frac{dt}{1+tt} = \pm\frac{A\,du}{u\sqrt{(vvuu-AA)}}$$

prorsus vt ante. Caeterum euidens est, hanc curuam esse brachystochronam, pro vi centripeta, functioni cuicunque distantiarum proportionali.

§. 37. In his igitur tribus casibus solutionem perducere licuit ad aequationes differentiales primi gradus, quae ob constantem A, si ea successiue varietur, infinitas curuas huius generis complectuntur; atque si hae aequationes denuo integrentur, noua constans introducenda ex dato cuiusque curuae initio A definiri poterit. Hoc modo ergo effici potest, vt omnes illae infinitae brachystochronae ex eodem puncto A originem ducant, atque ad hunc casum sequens Problema est accommodatum.

Problema IV.

§. 38. *Descriptis in plano infinitis brachystochronis* AM *inuenire curuas, quae illas omnes orthogonaliter traiiciant.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 39. Sit AM vna harum brachystochronarum quaecunque, ad quam in puncto M constituatur recta normalis Ma, atque supra ostendimus, si infinitae aliae lineae Aμ, ipsi AM proximae et ad hanc rectam Ma terminatae, quae quidem in eodem puncto A incipiant, concipiantur, tum

 varia-

variationem temporis pro iis omnibus fore nullam, siue tempus per curuam proximam A μ praecise aequale esse tempori per A M, vbicunque punctum μ in recta M a accipiatur, dummodo ipsi M fuerit proximum. Verum ne opus sit demonstrationem huius veritatis altius repetere, hic eam succinctius ex ipsa natura brachystochronismi doceamus.

Tab. I. Fig. 4. §. 40. Demonstrandum scilicet est: vt arcus proximi AM et Aμ sint isochroni elementum Mμ necessario ad vtramque curuam normale esse debere. Si quis enim hoc negauerit, ei statuendum est, angulum AMμ vel esse acutum vel obtusum; vtrumque autem ad absurdum sequenti modo deducetur. Sit enim primo angulus AMμ acutus, et ad Mμ ex puncto μ agatur normalis μα, curuae A M in α occurrens, eritque $\alpha\mu < \alpha M$; vnde si corpus percurrat viam A α μ, eam absoluet breuiori tempore, quam viam AαM, quia vtrinque in α celeritas est eadem, at spatium αμ breuius quam α M. Quum igitur per hypothesin tempus per curuam A μ aequale sit tempori per A M, nunc tempus per A α μ breuius foret quam tempus per Aμ, ideoque ipsa linea Aμ non foret brachystochrona, quod est contra hypothesin, quandoquidem hic assumimus curuam Aμ esse brachystochronam ipsi A M proximam.

§. 41. Simili modo si angulus A M μ fuerit obtusus, ad M μ ex puncto M agatur normalis M α, erit $\alpha M < \alpha\mu$; vnde tempus per viam A α μ breuius foret quam per A α μ. ideoque etiam breuius quam per A M, ideoque curua A M non foret brachystochrona, itidem contra hypothesin. Ex quo conficitur, lineolam M μ necessario ad vtramque brachystochronam A M et A μ esse perpendicularem.

§. 42. Quod si ergo ab omnibus nostris brachystochronis arcus synchronos A M et A μ abscindamus, qui Fig. 3. scilicet omnes eodem tempore absoluantur, tum omnia puncta M μ reperientur in eiusmodi linea curua, quae om-

omnes brachyſtochronas ad angulos rectos ſecabit. Quum igitur tempus elementare ſupra fuerit $v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, a qualibet brachyſtochronarum AM reſcindatur arcus AM, pro quo formula integralis $\int v\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$ nanciſcatur valorem datum, puta C. Ex quo ſimul perſpicuum eſt, ſi etiam haec quantitas C varietur, hoc modo infinitas traiectorias orthogonales eſſe prodituras.

§. 43. Quae quo clariora reddantur, conſideremus caſum primum ſupra §. 30. deſcriptum, in quo pro curuis brachyſtochronis inuenimus hanc aequationem differentialem $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$; vbi quidem variabilitas litterae A infinitas noſtras brachyſtochronas producit: verum inſuper haec conditio abſolute neceſſaria adiungi debet, vt omnes iſtae curuae idem commune habeant initium in puncto A. Hoc ergo obſeruato, capiatur punctum M ita, vt formula integralis $\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}}$ datum obtineat valorem, puta C; vbi iterum probe tenendum eſt, hoc integrale ita capi debere, vt in initio A euaneſcat; tum autem punctum M ſimul erit in traiectoria orthogonali.

§. 44. Vt exemplo rem illuſtremus ſumamus $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt aequatio pro curuis ſecandis habeatur $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}}$, ſeu integrando $2\sqrt{(ax-aa)} = y + \text{conſt.}$ vbi conſtantem ita definire oportet, vt omnes curuae in eodem puncto A incipiant. Ponamus ergo pro hoc initio ſieri $x = f$ et $y = g$, ita vt hae litterae neutiquam ab a pendeant. Quare, vt hoc eueniat, conſtans illa debet eſſe $2\sqrt{(af-ga)} - g$; ſicque pro curuis ſecundis habetur haec aequatio: $2\sqrt{(ax-aa)} - 2\sqrt{(af-aa)} = y - g$; vbi euidens eſt litteram a, etſi variabilem, vltra f augeri non poſſe. Tum autem pro traiectoriis capi debebit $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)}} = C$, et integrando vt ſupra eſt praeſcriptum, ſcilicet vt integrale pro initio A euaneſcat:

2 (

$$2\left(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}x\right)\sqrt{(x-a)} - 2\left(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}f\right)\sqrt{(f-a)}$$

quod cuipiam quantitati datae, puta c, aequale positum dat:

$$(2a + x)\sqrt{(x-a)} - (2a+f)\sqrt{(f-a)} = \tfrac{3c}{2}.$$

Ex qua aequatione pro data curua A M, ad quam A refertur, definiatur abscissa x, indeque porro applicata y ope aequationis superioris:

$$y = 2\left(\sqrt{(ax - aa)} - \sqrt{(af - aa)}\right) + g,$$

vt innotescat punctum M. At si quis desideret aequationem pro traiectoria ista orthogonali inter easdem coordinatas x et y, is tantum ex binis aequationibus inuentis quantitatem a eliminet, vt obtineat aequationem, in qua tantum occurrant litterae x, y cum constantibus f, g et c. Hac enim aequatione natura traiectoriae exprimetur.

§. 45. Ex hoc exemplo perspicuum est, quomodo huiusmodi casus tractari oporteat, vbi integratio non succedit: semper enim integratio tamquam cognita est spectanda, etiamsi fuerit transcendens, quo pacto quasi nouae litterae f et g ingrediuntur, quippe quae sunt coordinatae pro initio curuarum dato; deinde vero ipsa rei natura satis monstrat, quomodo reliquae operationes suscipi debeant.

§. 46. Cum olim problema traiectoriarum orthogonalium tanto studio esset tractatum, casus quem modo euoluimus imprimis omni attentione dignus est visus, atque hoc modo erat vere enunciatus:

Si curuarum secundarum natura expressa fuerit tali aequatione differentiali: $dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$, tum traiectoria determinari debet ex hac aequatione: $\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} = C$. Verum sequentes conditiones necessario subintelligi debent: vt primo omnes curuae secundae in communi quodam puncto incipiant; deinde vt posterius integrale in ipso illo initio euanescat.