# SUR L'EFFET DE LA REFRACTION DANS LES OBSERVATIONS TERRESTRES

Par

*Mr. L. EULER.*

Comme à cause de la réfraction les étoiles nous paroissent plus élevées au dessus de l'horison, qu'elles ne le sont effectivement, le même phénomène se rencontre aussi dans les observations terrestres, où les objets nous paroissent toujours plus hauts, que s'il n'y avoit point de réfraction. La raison en est, que les rayons de lumière ne viennent jamais par des lignes droites jusqu'à nos yeux, comme on le suppose ordinairement, mais qu'ils se trouvent tant soit peu courbés, en tournant leur concavité vers le bas. Ainsi supposant un objet en O, d'où un rayon parvient en A suivant la ligne courbe OA, la direction de ce rayon en A est la droite AZ, qui touche la courbe en A, & l'oeil, qui reçoit ce rayon, jugera que l'objet se trouve quelque part dans cette tangente AZ & par conséquent plus élevé, que si le rayon étoit parti de O en ligne droite OA. Je me propose donc, de développer ici cet effet de la réfraction & de déterminer tous les phénomènes, qui en résultent. Tab. II. Fig. 1.

Pour mettre cette question dans tout son jour, il faut aussi avoir égard à la courbure de la Terre. Soit donc C le centre de la Terre & que le cercle AET en représente la surface, dont tous les points soyent situés au même niveau, & en supposant le rayon $CA = a$, qu'on a Fig. 2.

trouvé être de 3269297 Toises, soit A le lieu de l'observateur & Z un objet quelconque, d'où un rayon de lumière parvienne par la ligne ZA dans l'oeil du spectateur en A, où la tangente de cette courbe ZA fait avec la direction verticale AB l'angle $BAT = \zeta$, qui marquera donc la distance apparente de l'objet au zénith B. Qu'on tire du centre de la Terre C à l'objet Z la droite CZ, & qu'on nomme l'angle $ACZ = \Phi$, de sorte que l'arc AX sera exprimé par $a\Phi$, qui sera la distance horizontale entre le lieu de l'observateur en A & celui de l'objet en Z. Cela posé, & conoissant les deux angles $\zeta$ & $\Phi$, on demande quelle sera la veritable élévation de l'objet Z au dessus de la surface de la Terre, ou bien on cherche la ligne droite XZ, que je nommerai dans la suite $= x$, & la ligne $CZ = z$, de sorte $= z = a + x$; & la ligne XZ sera l'élévation de l'objet au dessus du niveau au point A.

Tab. II. Fig. 3. Puisque la courbure de ce rayon ZA est causée par la différente densité de l'Atmosphère entre l'objet en Z & l'oeil en A, il faut commencer par déterminer la loix, suivant laquelle la densité de l'air diminue en montant en haut; puisqu'il est certain, qu'à égales hauteurs au dessus de la surface de la Terre la densité de l'air est partout la même; attendu que sans cette condition l'atmosphère ne sçauroit être en équilibre. Posant donc pour le lieu de l'observateur en A la densité de l'air $= c$, & si à une hauteur AQ quelconque $= x$ il y a la densité $= q$, il s'agit de déterminer le rapport entre $c$ & $q$ pour chaque hauteur $AQ = x$. Pour cet effet on peut ici hardiment supposer, que les densités de l'air sont proportionelles à son élasticité, ou à la hauteur du baromètre; donc posant la hauteur du baromètre en $A = k$ & celle qui

qui se trouve en $Q = p$, on aura $\frac{q}{c} = \frac{p}{k}$. Montons à présent au dessus de Q à une hauteur infiniment proche $q$, desorte que $Qq = dx$, & on aura la densité en $q = q + dq$ & la hauteur du baromètre $= p + dp$; où il est clair, que les différentielles $dq$ & $dp$ auront des valeurs négatives. Cela posé, puisque le Baromètre a baissé de la quantité $dp$, pendant qu'on est monté dans l'air par l'espace $dx$, il faut qu'une colonne de Mercure de la hauteur $= dp$ ait le même poids qu'une colonne d'air de la hauteur $= dx$.

Posons donc la gravité spécifique du Mercure à celle de l'air en A, dont la densité est $= c$, comme $m$ à 1, où l'on sçait, qu'il y a à peu près $m = 10000$ & partant, si la densité de l'air en Q étoit encore $= c$, une colonne de Mercure de la hauteur $= dp$ auroit le même poids qu'une colonne d'air de la hauteur $m\,dp$. Mais puisque la densité en Q qui est $= q$ est moindre que $c$, cette hauteur trouvée $m\,dp$ doit être augmentée dans la raison de $q$ à $c$, d'où elle sera $= \frac{mc\,dp}{q}$, qu'il faut par conséquent égaler à la hauteur $dx$; d'où nous tirons cette équation: $dx = -\frac{mc\,dp}{q}$, ou bien $dx = -\frac{mk\,dp}{p}$, dont l'intégrale nous donne $x = -mk\,lp +$ const. & cette constante doit être déterminée en sorte, que faisant $x = 0$ il devienne $p = k$; d'où l'on tire $x = mk\,l\frac{k}{p}$, ou bien $x = mk\,l\frac{c}{q}$. Or sur la surface de la Terre on peut supposer $k = 28$ pouces, ou bien $k = 2\frac{1}{3}$ pieds de Paris, de sorte que $mk$ exprimera une hauteur de 23333 pieds, ou bien en toises de six pieds on aura à peu près $mk = 4000$ Toises.



Ayant

Ayant donc trouvé l'équation $\frac{x}{mk} = l\frac{k}{p} = l\frac{c}{q}$ on peut aisément déterminer pour chaque hauteur $x$ la densité de l'air $q$, qui répond à cette hauteur; car prenant $e$ pour le nombre, dont le logaritme hiperbolique $= 1$, on aura $\frac{c}{q} = e^{\frac{x}{mk}}$, ou bien $\frac{q}{c} = e^{-\frac{x}{mk}}$. Donc puisque dans les observations terrestres la hauteur $x$ est toujours très petite par rapport à $mk$, on aura à peu près $\frac{q}{c} = 1 - \frac{x}{mk} + \frac{xx}{2mmkk} - \frac{x^3}{6m^3k^3}$; où l'on pourra se contenter pour la plupart de pareilles observations des deux premiers termes $1 - \frac{x}{mk}$, à moins qu'on n'ait à mesurer des montagnes de hauteur considérable.

Après avoir déterminé la densité de l'air pour toutes les hauteurs du niveau de l'observateur en A, il faut développer la réfraction, que soufre un rayon de lumiere, en passant d'un air quelconque dans une autre couche de densité différente. Pour cet effet considérons un rayon, qui passe du vuide dans un air ordinaire, dont la densité $= c$, & supposons la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction comme $1$ à $1 - \delta$, où l'on sçait, que $\delta$ est une fraction très petite, dont la valeur peut être estimée à $\frac{3}{10000}$. De là il s'ensuit, que si l'air étoit plus ou moins dense que $c$, la réfraction seroit aussi plus ou moins forte selon le même rapport. Ainsi lorsqu'un rayon passe du vuide dans un air de la densité $= q$, on peut supposer la raison de réfraction comme $1$ à $1 - \frac{\delta q}{c}$. Donc réciproquement, quand un rayon passe de cet air dans le vuide, la raison de réfraction sera comme $1 - \frac{\delta q}{c}$ à $1$. Que ce même rayon passe à présent du vuide dans un air de la densité $= r$, & la raison

raison de réfraction sera comme $1$ à $1 - \frac{\delta r}{c}$; par conséquent, en faisant évanouir le vuide entre ces deux airs, de sorte que le rayon passe d'un air de la densité $q$ dans un autre de la densité $r$ immediatement, la raison de réfraction sera comme $1 - \frac{\delta q}{c}$ à $1 - \frac{\delta r}{c}$, ou bien, puisque $\delta$ est une fraction extrêmement petite, comme $1 : 1 + \frac{\delta (q - r)}{c}$.

Supposons maintenant que ces deux densités $q$ & $r$ différent infiniment peu l'une de l'autre, ou bien posons $r = q + dq$, & pour le cas, où un rayon passe de l'air $q$ dans l'air $q + dq$, la raison de réfraction sera comme $1.$ à $1 - \frac{\delta dq}{c}$ & partant réciproquement, lorsque le rayon passe de l'air de la densité $q + dq$ dans un air de la densité $q$, la raison de réfraction sera comme $1 - \frac{\delta dq}{c}$ à $1$, ou bien comme $1$ à $1 + \frac{\delta dq}{c}$. Ayant donc trouvé ci-dessus $l \frac{c}{q} = \frac{x}{mk}$, en différentiant on aura $\frac{dq}{q} = - \frac{dx}{mk}$, ou bien $dq = - \frac{q dx}{mk}$, & partant la raison de réfraction pour le dernier cas sera comme $1$ à $1 - \frac{\delta q dx}{cmk}$.

Ayant déterminé ces deux articles, nous n'avons qu'à envisager toute l'Atmosphère comme composée d'une infinité de couches d'air infiniment minces & toutes concentriques entre elles, ensorte que le centre de la Terre soit leur centre commun, & il nous est permis ici de faire abstraction de la véritable figure de la Terre, de la même manière que nous n'avons pas besoin de tenir compte des différens degrés de chaleur, qui pourroient troubler l'estime de la densité différente, attendu que nous nous bornons uniquement à des objets terrestres qui ne sauroient jamais s'étendre à des distances si grandes que l'effet des différentes modifications de la chaleur pourroient devenir sensibles.

Après ces préparations soit O l'objet que le spectateur en A observe & qu'il voit par le rayon courbé O Z A, qui fasse avec la verticale A B l'angle B A Z $= \zeta$, le rayon de la Terre étant comme ci-dessus A C $= a$. Maintenant considerons un élément quelconque Z $z$ de la courbe A Z $z$ O & ayant tiré au centre les droites Z C & $z$ C, qui coupent la surface de la Terre en X & $x$, nommons l'angle A C Z $= \Phi$ & la distance C Z $= z$, de sorte que, posant la hauteur du point Z au dessus du niveau de A, ou bien la ligne X Z $= x$, il y ait Z $= a + x$; donc pour le point $z$ nous aurons l'angle A C $z = \Phi + d\Phi$ & partant l'angle Z C $z = d\Phi$ & la distance C $z = z + dz$. Outre cela tirons aussi au point Z la tangente Z T & en baissant du point C la perpendiculaire C T $= t$ & nommant l'angle C Z T $= \omega$ on aura sin. $\omega = \frac{t}{z}$.

Tab. II. Fig. 4.

Maintenant qu'on décrive du centre C par le point Z l'arc de cercle N Z $u$, qui nous représentera la couche de l'Atmosphère, qui passe par le point Z & qui sépare l'air superieur de celui qui est plus près de la surface, & alors l'élément $z$ Z nous représente la direction du rayon, qui entre dans la couche N Z $u$; & puisque la droite C Z continuée jusqu'en $s$ est perpendiculaire à cette couche, l'angle $z$ Z $s$ sera l'angle d'incidence. Puis donc que nous venons de nommer l'angle C Z T $= \omega$, nous aurons l'angle C $z$ Z $= \omega + d\omega$; or l'angle $z$ Z $s$, étant externe par rapport au triangle C Z $z$, sera égal à la somme des angles C $z$ Z & Z C $z$, & partant on aura l'angle d'incidence $z$ Z $s = \omega + d\omega + d\Phi$; & il est évident qu'à cet angle d'incidence répond l'angle de réfraction C Z T $= \omega$, d'où le sinus d'incidence sera sin. $(\omega + d\omega + d\Phi) =$ sin. $\omega$

+ ( $d\omega$

$+ (d\omega + d\Phi)$ coſ. ω, le ſinus de réfraction étant $=$ ſin. ω, ce qui donne cette analogie:

ſin. d'incidence à ſin. de réfraction $=$ ſin. $\omega + (d\omega + d\Phi)$ coſ. ω : ſin. ω
$= 1 : 1 - \frac{(d\omega + d\Phi) \cos. \omega}{\sin. \omega}$.

Suppoſant à préſent la denſité de l'air en $Z = q$, comme ci-deſſus, celle en $z$ ſera $= q + dq$, deſorte que nous avons ici le cas, où le rayon paſſe d'un air de la denſité $q + dq$ dans un air de la denſité $q$, pour lequel nous avons vu ci deſſus, que la raiſon de réfraction eſt $= 1 : 1 + \frac{\delta\, dq}{c}$ & partant nous en tirons cette égalité: $\frac{\delta\, dq}{c} = -(d\omega + d\Phi) \cot. \omega$. Or nous avons vu auſſi que pour la hauteur $XZ = x$ on aura $l\frac{c}{q} = \frac{x}{mk}$, d'où il s'enſuit $dq = -\frac{q\,dx}{mk} = -\frac{q\,dz}{mk}$ & cette valeur ſubſtituée nous fournit l'équation $\frac{\delta\, q\, dz}{mck} = (d\omega + d\Phi) \cot. \omega$, ou bien à cauſe de $\frac{q}{c} = e^{-\frac{x}{mk}}$ il y aura

$$\frac{\delta\, e^{-\frac{x}{mk}} dz}{mk} = (d\omega + d\Phi) \cot. \omega;$$

d'où il faut déterminer la nature de la courbure du rayon AZO, pour en déduire enſuite tous les phénomènes de la réfraction.

Cette équation pourra être ſimplifiée en réduiſant toutes les quantités, qui y entrent, aux deux variables $CZ = z$ & $CT = t$; car d'abord nous aurons ſin. $\omega = \frac{t}{z}$ & partant coſ. $\omega = \frac{\sqrt{zz - tt}}{z}$ & de là en prennant la différentielle $d\omega = \frac{z\,dt - t\,dz}{z\sqrt{zz - tt}}$. Enſuite en vertu de la ſimilitude des triangles CZT & $Zzu$ & à cauſe de $Zu = z\,d\Phi$ & $uz = dz$, nous aurons $CT : ZT = Zu : zu$ c'eſt à dire $t : \sqrt{zz - tt} = z\,d\Phi : dz$

d'où

d'où l'on tire $d\Phi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{zz-tt}}$; par consequent nous aurons $d\omega + d\Phi = \frac{dt}{\sqrt{zz-tt}}$, & puisque cot. $\omega = \frac{\sqrt{(zz-tt)}}{t}$, l'équation trouvée se réduit à cette forme : $\frac{\delta e^{-\frac{x}{mk}} dz}{mk} = \frac{dt}{t}$ qui à cause de $x = z - a$, ne renferme que deux variables $z$ & $t$, & dont l'intégration n'a aucune difficulté.

Mais avant que de prendre l'integrale de cette équation, elle nous fournit une manière fort aisée de déterminer le rayon de courbure au point Z, dont l'expression, comme on sçait, est $\frac{z\,dz}{dt}$ : Puis donc que l'équation trouvée nous donne d'abord $\frac{dz}{dt} = \frac{mk\,e^{-\frac{x}{mk}}}{\delta t}$ le rayon de courbure en Z sera $\frac{mk\,z\,e^{\frac{x}{mk}}}{\delta t} = \frac{mk\,e^{\frac{x}{mk}}}{\delta \text{ fin. } \omega}$. Transportons à présent le point Z en A, lieu du spectateur, en supposant $z = a$, $x = 0$ & $\omega = \zeta$, d'où le rayon de courbure au point A divient $= \frac{mk}{\delta \text{ fin. } \zeta}$. Or il est évident que puisque l'intevalle A O ne sçauroit jamais devenir considerable par rapport au rayon de la Terre, la même courbure doit sensiblement regner par toute l'étendue du rayon A Z O, de sorte, qu'on peut regarder cette courbe comme un arc de cercle décrit du rayon $= \frac{mk}{\delta \text{ fin. } \zeta}$, & cela nous fournit une manière très facile de resoudre toutes les questions, qu'on pourroit proposer sur les observations de cette nature. Començons de profiter de cet avantage dans les observations ordinaires du nivellement, où l'angle $\zeta$ est de 90 degrés.

Applica-

## Application de cette Théorie à la correction du nivellement.

120. Les instrumens, dont on se sert pour niveller, nous découvrent la veritable direction horizontale à l'endroit de l'observateur en A; par consequent la direction du rayon, qui entre dans l'oeil du spectateur, est horizontale & partant, l'angle $\zeta = 90°$. Supposons donc, qu'on veuille pousser le nivellement jusqu'à l'endroit D de la surface de la Terre, où l'on érige verticalement une pique, sur la quelle on marque le point O, qu'on decouvre en visant par le Niveau, de sorte, que le rayon de lumière, qui passe du point O dans l'oeil du spectateur placé en A, décrit la ligne courbe O A, que nous venons de determiner. Pour cet effet ayant tiré du centre de la Terre la ligne C D O, nommons l'angle $ACO = \Phi$ & la distance horizontale, ou l'arc $AD = s$, de sorte que $s = a\Phi$; cela posé on demande la hauteur D O, à la quelle la marque O sera élevée au dessus du vray horison A D; où il faut remarquer que le point D est en niveau avec le point A. Tab. II. Fig. 5.

Puisque le rayon, qui va de O en A, est un arc de cercle, dont le rayon est $= \frac{mk}{\delta}$, & dont la quantité (à cause de $mk = 4000$ toises & $\delta = \frac{3}{10000}$) exprimée en toises se trouve $= 13333333$, pendant que le rayon de la Terre n'est que de 3269297 Toises, il est clair que le centre de cet arc de cercle A O tombera quelque part dans le rayon A C prolongé, qui soit en G, & nommant pour abreger ce second rayon $AG = g$, il y aura $g = 13333333$. Maintenant pour trouver la hauteur D O baissons du point G sur la droite prolongée O C la perpendiculaire G K & tirons aussi la droite $GO = g$; ce

 qui

ce qui étant fait, puisque l'angle GCK est connu égal à $\Phi = \frac{s}{a}$, à cause de $CG = g - a$ nous aurons $GK = (g-a)\,\text{fin.}\,\Phi$ & $CK = (g-a)\,\text{cof.}\,\Phi$. Ainsi le triangle rectangle OGK nous fournit:

$$OK^2 = GO^2 - GK^2 = gg - (g-a)^2\,\text{fin.}\,\Phi^2 = gg\,\text{cof.}\,\Phi^2 + 2ag\,\text{fin.}\,\Phi^2 - aa\,\text{fin.}\,\Phi^2$$

& partant

$$OK = \sqrt{(gg\,\text{cof.}\,\Phi^2 + 2ag\,\text{fin.}\,\Phi^2 - aa\,\text{fin.}\,\Phi^2)}.$$

Retranchons de là l'intervalle $DK = a + (g-a)\,\text{cof.}\,\Phi$ & il nous restera la hauteur cherchée DO, qui sera

$$DO = \sqrt{(gg\,\text{cof.}\,\Phi^2 + 2ag\,\text{fin.}\,\Phi^2 - aa\,\text{fin.}\,\Phi^2)} - a - (g-a)\,\text{cof.}\,\Phi$$

où il est à remarquer, que puisque l'angle $\Phi$ ne sçauroit presque jamais surpasser un degré, de sorte qu'il y aura toujours $\text{fin.}\,\Phi < \frac{1}{57}$ & $\text{fin.}\,\Phi^2 < \frac{1}{3249}$, on aura à fort peu près

$$\sqrt{gg - (g-a)^2\,\text{fin.}\,\Phi^2} = g - \frac{(g-a)^2\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2g}$$

d'où l'on tire la hauteur

$$DO = g - a - (g-a)\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{(g-a)^2\,\text{fin.}\,\Phi^2}{2g}.$$

Or puisque l'angle $\Phi$ est si petit, on peut supposer $\text{fin.}\,\Phi = \Phi$ & $\text{cof.}\,\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, ce qui nous conduit à cette formule

$$DO = \frac{(g-a)\Phi^2}{2g}\,(g - (g-a)) = \frac{a(g-a)\Phi^2}{2g}.$$

Puis donc que $\Phi = \frac{s}{a}$, cette hauteur sera $\frac{(g-a)ss}{2ag} = \frac{ss}{2a}\cdot\frac{g-a}{g}$, d'où l'on voit, que, si la réfraction évanouissoit entièrement, de sorte qu'il fut $g = \infty$ & partant $\frac{g-a}{g} = 1$, cette hauteur seroit $\frac{ss}{2a}$, comme on la suppose dans les nivellemens ordinaires.

On voit donc facilement, que les tables ordinaires, dont on se sert dans les nivellemens, & qui marquent

 pour

pour chaque distance horizontale $s$ les valeurs de la formule $\frac{ss}{2a}$ peuvent aisément être corrigées en sorte, qu'on pourra s'en servir pour trouver dans chaque cas la veritable hauteur D O; vu qu'on n'a qu'à multiplier les hauteurs marquées dans les tables ordinaires par la fraction $\frac{a-e}{a}$, dont la valeur est $= \frac{3}{4}$ à fort peu près, ensorte que la hauteur cherchée sera $DO = \frac{3}{4} \cdot \frac{ss}{2a}$; ou bien, on n'a qu'à multiplier les hauteurs marquées dans les tables ordinaires par $\frac{3}{4}$. De cette manière la table, que Mr. *Picard* a donné autrefois dans son Traité du nivellement pour l'élévation de la ligne horizontale apparente au dessus du vray horison nous servira de base, & en instituant l'opération indiquée ci dessus, nous en tirerons une autre, qui marquera la correction entière à apporter au nivellement, c'est à dire qui renferme tant la difference des horisons vray & apparent que l'effet de la refraction, depuis 100 jusqu'à 4000 Toises françoises de distance. Voici la table: pour toutes ces distances:

 Distance

| Distance Toises. | Correction Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|
| 100 | 0 | 0 | 0 |
| 150 | 0 | 0 | $2\frac{1}{4}$ |
| 200 | 0 | 0 | 4 |
| 250 | 0 | 0 | $6\frac{1}{4}$ |
| 300 | 0 | 0 | 9 |
| 350 | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ |
| 400 | 0 | 1 | 4 |
| 450 | 0 | 1 | $8\frac{1}{4}$ |
| 500 | 0 | 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 550 | 0 | 2 | $7\frac{1}{2}$ |
| 600 | 0 | 3 | 0 |
| 650 | 0 | 3 | 6 |
| 700 | 0 | 4 | 0 |
| 750 | 0 | 4 | $8\frac{1}{4}$ |
| 800 | 0 | 5 | $3\frac{1}{4}$ |
| 850 | 0 | 5 | $11\frac{1}{2}$ |
| 900 | 0 | 6 | $8\frac{1}{4}$ |
| 950 | 0 | 7 | 6 |
| 1000 | 0 | 8 | 3 |
| 1250 | 1 | 0 | $10\frac{3}{4}$ |
| 1500 | 1 | 6 | $6\frac{3}{4}$ |
| 1750 | 2 | 1 | $3\frac{1}{2}$ |
| 2000 | 2 | 9 | 0 |
| 2250 | 3 | 5 | 10 |
| 2500 | 4 | 3 | $6\frac{3}{4}$ |
| 3750 | 5 | 2 | $5\frac{1}{2}$ |
| 3000 | 6 | 2 | 3 |
| 3250 | 7 | 3 | $2\frac{1}{2}$ |
| 3500 | 8 | 5 | 0 |
| 3750 | 9 | 8 | $1\frac{1}{2}$ |
| 4000 | 11 | 0 | 0 |

Par le moyen de cette Table il sera fort aisé de connoître la pente d'une rivière, qui coule de $a$ en $v$, ou bien, après avoir tirée la ligne horizontale $ad$, qui est un arc de cercle décrit du centre de la Terre, on pourra failement déterminer l'intervalle $dv$, dont la surface de l'eau en $v$ se trouve au dessous du point $d$; vû que cet intervalle $dv$ mésure la pente de la rivière depuis $a$ jusqu'à $v$. Pour cet effet soit A le lieu de l'oeil élevé au dessus de l'eau en $a$ de l'intervalle A$a$, & qu'on conçoive tirée de A la véritable ligne horizontale AD qui est pareillement un arc de cercle décrit du centre de la Terre, & aprés avoir érigé auprés de $v$ verticalement une pique, qu'on y vise par un bon instrument de niveau fixé en A, par le quel on y découvre le point O, dont le rayon de lumière passe par les dioptres de l'instrument. Ce point étant bien marqué sur la pique on n'a qu'à mésurer son élévation O$v$ au dessus de la surface de l'eau en $v$; de cette hauteur O$v$ on retranche prémièrement l'intervalle OD marqué dans la table, qui repond à la distance AD = s, & qui est $\frac{ss}{2r}$, outre céla on en rétranche aussi l'intervalle D$d$ = A$a$, & il restera la pente cherchée, ou bien l'intervalle $dv$. Ainsi si la distance AD étoit de 1500 Toises, la table marque pour cette distance l'intervalle OD $= 1'. 6''. 6\frac{1}{2}'''$. Suppofant donc l'élévation de l'oeil au dessus de $a$, ou bien A$a$ = 4 pieds, à la quelle est égale l'intervalle D$d$, & qu'on ait trouvé la hauteur entière $v$O de $7'. 3''$. la pente de la rivière de $a$ en $v$, en retranchant de $7'. 3''$. la hauteur O$d = 5'. 6''. 7\frac{1}{2}'''$, sera $vd = 1'. 8''. 5\frac{1}{2}'''$, ou bien à peu près $20\frac{1}{2}$ pouces.

Tab. II. Fig. 6.

Tab. II. Fig. 7.

## Application de la Théorie à la méfure de la hauteur des objets terreftres.

Suppofons, qu'on demande la hauteur de l'objet O au deffus de la vraye ligne horizontale AD tirée par l'oeil du fpectateur en A, qu'on nomme la diftance $AD = s$, qu'on vife par le moyen d'un bon quart de cercle fixé en A vers l'objet O, dont on trouve la hauteur au deffus de l'horifon, ou bien l'angle $OAD = \theta$, de forte, qu'ayant tiré la verticale AB, l'angle OAB foit $= 90° - \theta$, qui ayant été nommé $= \zeta$, on aura $\zeta = 90° - \theta$. Il s'agit donc, qu'en connoiffant ces deux élémens, c'eft à dire la diftance $AD = s$ & l'angle $DAO = \theta$, on détermine la véritable hauteur DO.

Pour réfoudre cette queftion foit C le centre de la Fig. 8. Terre, d'où l'on décrive par le lieu du fpectateur A l'arc de cercle AD, qui nous repréfentera le vray horifon, au deffus duquel il faut chercher la hauteur DO. Ayant tiré de l'objet O au centre de la Terre C la droite OC l'on aura l'arc $AD = s$ & partant l'angle $ACD = \frac{s}{a} = \Phi$. Maintenant puisqu'on peut regarder le rayon de lumière OA comme un arc de cercle, dont le rayon eft $\frac{mk}{\delta\, cof.\, \theta}$, que nous nomerons $= g$, de forte que $g = \frac{mk}{\delta\, co f.\, \theta} = \frac{13333333}{cof.\, \theta}$ toifes, & puisque l'arc AO fait avec la horizontale AD un angle $= \theta$, on n'a qu'à prendre l'angle $CAG = \theta$ & le centre de cet arc AO fe trouvera en G à la diftance $AG = g$. Soit F l'interfection de cette ligne AG avec la droite CO, & on aura l'angle $AFO = \theta + \Phi$, que nous nommerons pour abreger $= \eta$, de forte que $\eta = \theta + \Phi$, & le triangle CAF nous donnera $CF = \frac{a\, fin.\, \theta}{fin.\, \eta}$ & $AF = \frac{a\, fin.\, \Phi}{fin.\, \eta}$,

d'où

d'où l'on aura $FG = g - \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\eta} = f$, pour abréger, de ſorte que $FG = f = g - a\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\eta}$.

Qu'on tire enſuite ſur la droite $OC$ prolongée du point $G$ la perpendiculaire $GK$, & puiſque dans le triangle $GFK$ on a le côté $FG = f$ & l'angle $GFK = AFO = \eta$, on aura la perpendiculaire $GK = f\,\text{ſin.}\,\eta$ & l'intervalle $FK = f\,\text{coſ.}\,\eta$. Enfin qu'on tire auſſi la ligne $GO$, & puiſque $GO = AG = g$, le triangle rectangle $GKO$ nous fournit le côté $OK = \sqrt{gg - ff\,\text{ſin.}\,\eta^2}$, d'où, retranchant l'intervalle $DK = DF + FK = a - \frac{a\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta} + f\,\text{coſ.}\,\eta$, il reſtera la hauteur cherchée $DO = \sqrt{gg - ff\,\text{ſin.}\,\eta^2} - a + \frac{a\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta} - f\,\text{coſ.}\,\eta$.

Avant que de developper cette formule, appliquons notre calcul à un cas déterminé, où la diſtance $AD = s$ ſoit $= 24000$ Toiſes, & $O$ le ſommet d'une montagne, qui paroiſſe elevée en $A$ au deſſus de l'horiſon ſous un angle $\theta = 3^\circ.\,20'$. Dans ce cas là pour trouver $OG$ on n'a qu'à diviſer 13333333 par coſ. $3^\circ.\,20'$, ce qui donne $OG = g = 13355930$; enſuite à cauſe de $\Phi = \frac{s}{a}$ on trouve $\Phi = 25'.\,14''$, par conſéquent $\eta = 3^\circ.\,45'.\,14''$ & partant on trouvera $CF = AF$, de la manière ſuivante:

| | |
|---|---|
| $l\,a = 6,5144543$ | $l\,a = 6,5144543$ |
| $l\,\text{ſin.}\,\theta = 8,7645111$ | $l\,\text{ſin.}\,\Phi = 7,8656968$ |
| $5,2789654$ | $4,3801511$ |
| $l\,\text{ſin.}\,\eta = 8,8160480$ | $l\,\text{ſin.}\,\eta = 8,8160480$ |
| $l\,CF = 6,4629174$ | $l\,AF = 5,5641031$ |
| $CF = 2903470$ toiſes | $AF = 366523$ toiſes |

d'où

d'où l'on tire l'intervalle $DF = 365827$ toises; ensuite pour le triangle $GFK$ on aura $FG = f = 12989407$. & de là $GK = 850427$. & $FK = 12961540$ toises & partant $DK = 13327367$. Maintenant pour calculer l'intervalle $OD$ cherchons d'abord l'angle $GOR = \psi$, dont on connoît le sinus, sçavoir $\sin.\psi = \frac{GK}{GO} = \frac{f \sin.\eta}{g}$, d'où l'on tire cet angle $\psi = 3°. 39'$, & il est clair, qu'il y aura $OK = g \cos.\psi = 13328840$; delà retranchons l'intervalle trouvé $DK = 13327367$, & nous aurons la hauteur cherchée $DO = 1473$ toises.

De cet exemple il est évident, que les angles $\Phi$, $\theta$ & $\eta$ sont ordinairement très petits, de sorte que pour leur sinus on peut substituer les angles mêmes. Introduisons en général l'angle $GOK = \psi$, pour que $g \sin.\psi = f \sin.\eta$, ou bien $g\psi = f\eta$ & partant $\psi = \frac{f\eta}{g}$. Delà on aura l'intervalle $DO = g \cos.\psi - a + \frac{a\theta}{\eta} - f \cos.\eta$. Mettons donc $\cos.\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi\psi = 1 - \frac{ff\eta\eta}{2gg}$, pour avoir

$$DO = g - \frac{ff\eta\eta}{2g} - a + \frac{a\theta}{\eta} - f\cos.\eta$$

& en mettant au lieu de $f$ la valeur $g - \frac{a\Phi}{\eta}$ & partant $g - f = \frac{a\Phi}{\eta}$ on aura $DO = \frac{1}{2}f\eta\eta\left(1 - \frac{f}{g}\right) = \frac{af\Phi\eta}{2g}$.

Voici donc une formule assés simple, qui nous exprime la hauteur cherchée $DO$, qui est ouvertement proportionelle à l'angle $\Phi$, ou bien à l'espace $s$ & à l'angle $\eta = \theta + \Phi$. Mettant donc au lieu de $a\Phi$ sa valeur $s$, nous aurons $DO = \frac{fs\eta}{2g}$: ensuite puisque $f = g - \frac{a\Phi}{\eta} = g - \frac{s}{\eta}$, nous aurons $\frac{f}{g} = 1 - \frac{s}{g\eta}$; & puisque $g = \frac{mk}{\delta \cos.\theta}$, nous aurons $\frac{f}{g} = 1 - \frac{\delta s \cos.\theta}{mk\eta}$. Cette valeur substituée donne l'intervalle $DO = \frac{s\eta}{2} - \frac{\delta ss \cos.\theta}{2mk}$.

Or

Mais la formule, que nous venons de trouver pour la hauteur $DO = \frac{fs\eta}{2g}$, eſt ouvertement fauſſe. Pour s'en aſſurer on n'a qu'à conſiderer le cas, où la diſtance AO eſt extrêmement petite & où par conſequent l'obſervation ne ſçauroit être troublée ni par la courbure de la Terre ni par celle du rayon de lumière; de ſorte que dans ce cas on doit trouver $DO = s \operatorname{tang}\theta$; ou bien, ſi l'angle $\theta$ eſt très petit, $DO = s\theta = s\eta$, à cauſe de $\Phi = 0$. Or pour le même cas (à cauſe de $f = g - \frac{a \sin\Phi}{\sin\eta} = -\frac{s}{\sin\eta} + g$, d'où il s'enſuit $\frac{f}{g} = 1 - \frac{s}{g \sin\eta}$, infiniment petit) la formule trouvée nous donneroit $DO = \frac{1}{2} s\eta$, qui n'eſt que la moitié de la valeur véritable. Cependant on ne trouve presque aucune faute dans le raiſonnement, qui nous a conduit à cette formule: mais puisque nous avons employées pluſieures approximations, il n'y a aucun doute, qu'elle manque d'exactitude. Il faut donc développer plus ſoigneuſement ce calcul extrèmement délicat, & rien négliger de ce qui pourroit contribuer la moindre choſe à la détermination de la hauteur cherchée DO, & c'eſt ce qui ſera l'objet des recherches ſuivantes.

D'abord je remarque, que puisque nous avons trouvé $g = \frac{mk}{b\cos\theta^2}$, il y aura à fort peu près $g = \frac{4a}{\cos\theta}$; car ayant trouvée dans le calcul du cas rapporté ci-deſſus, où $\theta = 0$, la valeur de $g = 13333333$, qui eſt à peu près le quadruple du rayon de la Terre, nous aurons aſſés exactement le rayon de courbure $g = \frac{4a}{\cos\theta}$ & partant toujours plus grand que $4a$. En ſecond lieu j'obſerve qu'on ne ſçauroit tirer les approximations que de l'extrême petiteſſe de l'angle $\Phi$, puisque les angles $\theta$ & $\eta$ pourroit bien devenir aſſés conſidérables en certains cas; deſorte qu'il qu'il ne seroit plus permis de supposer $\sin.\eta = \eta$ & $\cos.\eta = 1 - \frac{1}{2}\eta^2$, comme nous faisions tantôt. Cela remarqué, puisqu'il s'agit de trouver l'intervalle $DO = OK - DK$, développons séparément tant la valeur de $OK$ que celle de $DK$. Or nous avons vu que $OK = \sqrt{gg - ff \sin.\eta^2}$, & puisque $f = g - \frac{s}{\sin.\eta}$, nous aurons $f \sin.\eta = g \sin.\eta - s$, ce qui étant substitué nous donne

$$OK = \sqrt{gg \cos.\eta^2 + 2gs \sin.\eta - ss}.$$

Ici on voit que le premier terme surpasse très considérablement les deux autres; d'où en extrayant la racine par approximation nous aurons

$$OK = g \cos.\eta + s \,\mathrm{tang}.\eta - \frac{ss}{2g \cos.\eta},$$

où il sera même permis de rejetter le dernier terme.

De la même manière ayant trouvé l'intervalle

$$DK = a - \frac{a \sin.\theta}{\sin.\eta} + f \cos.\eta.$$

si nous substituons au lieu de $f$ sa valeur $g - \frac{s}{\sin.\eta}$, cet intervalle deviendra

$$DK = a - \frac{a \sin.\theta}{\sin.\eta} + g \cos.\eta - s \cot.\eta;$$ & puisque $\theta = \eta - \Phi$, & partant $\sin.\theta = \sin.\eta - \Phi \cos.\eta$, à cause de $\Phi$ quasi infiniment petit, nous aurons

$$DK = g \cos.\eta + \frac{a \Phi \cos.\eta}{\sin.\eta} - s \cot.\eta = g \cos.\eta.$$

Retranchons donc cette valeur de la précédente & il restera la hauteur cherchée $DO = s \,\mathrm{tang}.\eta - \frac{ss}{2g \cos.\eta}$, ou bien à fort peu près $DO = s \,\mathrm{tang}.\eta$, expression qui est parfaitement bien d'accord avec le cas marqué ci-dessus, puisque les angles $\theta$ & $\eta$ ne différent que de l'angle extrêmement petit $\Phi$. Ayant trouvée cette formule si simple faisons en l'application au cas rapporté ci-dessus, où nous avons supposé $s = 24000$ Toises, l'Angle $\theta = 3^\circ\, 20'$ &

$\eta = 3^\circ$.

$\eta = 9^{\circ}\ 45'\ 14''$, & ces deux valeurs nous donnent la hauteur $DO = 1574,7$, qui eſt plus grande que celle que nous avons trouvée auparavant; mais dans cet exemple l'obſervation s'etend auſſi à une ſi grande diſtance que nous n'aurions pas dû négliger le dernier terme $\frac{ss}{2\,g\,cos.\,\eta}$ dans l'expreſſion $DO$, qui, à cauſe de $g = \frac{4a}{cos.\,\theta}$, devient $\frac{ss\,cos.\,\theta}{8\,a\,cos.\,\eta}$, ou fort à peu près $\frac{s \cdot s}{8\,a}$, dont la valeur ſe trouve de 22 Toiſes, qui étant otées de la premiere partie laiſſent la hauteur $DO = 1552$ Toiſes. Cependant la différence eſt encore très conſidérable; mais il faut ici bien remarquer, que la moindre faute commiſe dans le premier calcul logarithmique a neceſſairement du produire une erreur très conſidérable dans la hauteur $DO$.

Nous pourrons donc employer avec meilleur ſuccès la dernière formule pour la hauteur: $DO = s\ tang.\ \eta - \frac{ss\,cos.\,\theta}{8\,a\,cos.\,\eta}$ dont l'application dans chaque cas eſt ſi aiſée, qu'il ſeroit ſuperflû de conſtruire des tables, pour en faciliter les opérations. Car l'obſervation donne d'abord dans chaque cas tant la diſtance horizontale $AD = s$ que l'angle d'élévation $DAO = \theta$; enſuite par le moyen du rayon de la Terre $CA = a$ on n'a qu'à chercher l'angle $ACO = \phi = \frac{s}{a}$, qui étant ajouté à l'angle $\theta$ nous donne l'angle $\eta$, d'où l'on calculera aiſément la valeur de la formule trouvée, par rapport à la quelle il faut remarquer, que le dernier terme de notre formule $\frac{ss\,cos.\,\theta}{8\,a\,cos.\,\eta}$ renferme l'effet de la refraction, puisque il évanouiroit ouvertement, ſi le rayon venoit en ligne droite; car alors on auroit $g = \infty$ & partant le dernier terme $\frac{ss}{2\,g\,cos.\,\eta} = 0$.

## Evolution de l'équation différentielle trouvée ci-dessus : $\frac{dt}{t} = \frac{\delta e^{-\frac{x}{mk}} dz}{mk}$.

L'intégration de cette équation, nous fournit d'abord $lt = \text{const.} - \delta e^{-\frac{x}{mk}}$, où pour déterminer la constante on n'a qu'à considérer le cas, où le point indéterminé Z
Tab. II. Fig. 4. tombe en A & partant $x = 0$. Puis donc que $t$ exprime la perpendiculaire, tirée du centre de la Terre sur la tangente de la courbe en Z, en prenant Z en A, cette perpendiculaire deviendra $a$ sin. $\zeta$, à cause de l'angle B A O $= \zeta$. Or posons cette perpendiculaire $a$ sin. $\zeta = b$, & il est clair, que faisant $x = 0$ il doit devenir $t = b$, d'où l'on tire cette équation : $lb = \text{Const.} - \delta$ & partant $C = \delta + lb$ ; d'où notre équation intégrée sera $l\frac{t}{b} = \delta\left(1 - e^{-\frac{x}{mk}}\right)$ ; où il faut remarquer, que plus la hauteur $x$ augmente, plus la valeur de $e^{-\frac{x}{mk}}$ sera diminuée.

Posons pour abréger $1 - e^{-\frac{x}{mk}} = v$, de sorte que tant que la hauteur $x$ est peu considérable par rapport à $mk = 4000$ Toises, on aura à fort peu près $v = \frac{x}{mk} - \frac{xx}{2m^2k^2}$ ou pour les observations ordinaires, où la distance A O n'est par fort considérable, on peut toujours supposer $v = \frac{x}{mk}$ ; de là nous aurons cette équation : $l\frac{t}{b} = \delta v$ & partant $t = b\, e^{\delta v}$.

Maintenant puisque $\delta$ est une fraction extrêmement petite, nous aurons assés exactement $t = b(1 + \delta v)$ ou bien $t = b\left(1 + \frac{\delta x}{mk} - \frac{\delta xx}{2m^2k^2}\right)$. Or nous avons vu ci-dessus, fus, que $d\Phi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{zz-tt}}$, où $z = a + x$ & $dz = dx$, de forte que $d\Phi = \frac{t\,dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - tt}}$. Il s'agit donc de trouver l'intégrale de cette formule, qu'il faut déterminer en forte, que faifant $x = 0$ & partant $t = b$, il devienne $\Phi = 0$; & ayant trouvé cette intégrale on n'a qu'à fuppofer l'angle $\Phi$ égal à l'angle A C O, dont la méfure eft l'arc A D divifé par le rayon de la Terre A C $= a$, & alors on en doit tirer la valeur de $x$. Après donc avoir fait les fubftitutions de $t$, en negligeant le terme $\frac{\delta x^2}{2m^2k^2}$, on aura à intégrer cette équation :

$$d\Phi = \frac{b\left(1 + \frac{\delta x}{mk}\right)dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - bb\left(1 + \frac{\delta x}{mk}\right)^2}}.$$

Pour trouver cette intégrale confidérons d'abord le cas $\delta = 0$, pour avoir l'équation $d\Phi = \frac{b\,dx}{(a+x)\sqrt{(a+x)^2 - bb}}$ ou en mettant au lieu de $a + x$ fa valeur $z$, nous aurons $d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz-bb}}$. Soit à préfent $a + x = \frac{b}{u}$, de forte que $dx = -\frac{b\,du}{uu}$ & on aura $d\Phi = -\frac{du}{\sqrt{1-uu}}$, dont l'intégrale eft

$$- \text{A fin.}\, u = - \text{A fin.}\, \frac{b}{a+x} + C = \Phi,$$

où pour déterminer la conftante C on n'a qu'à faire $x = 0$ & $\Phi = 0$, ce qui donne ($C = \text{A fin.}\, \frac{b}{a} = \zeta$,) de forte que nous aurons $\Phi = \zeta - \text{A fin.}\, \frac{b}{a+x}$, de là il s'enfuit $\text{A fin.}\, \frac{b}{a+x} = \zeta - \Phi$ & par conféquent $\frac{b}{a+x} = \text{fin.}\,(\zeta - \Phi)$ & enfin la hauteur $x = \frac{b - a\,\text{fin.}\,(\zeta-\Phi)}{\text{fin.}\,(\zeta-\Phi)}$. Cette formule exprimeroit la véritable valeur de $x$, s'il n'y avoit point de réfraction : d'ailleurs à caufe de $b = a\,\text{fin.}\,\zeta$ elle fe change en celle-ci $x = \frac{a\,\text{fin.}\,\zeta}{\text{fin.}\,(\zeta-\Phi)} - a$. Donc puifque l'angle $\Phi$ eft toujours très petit, on aura fin.

$\text{sin.}(\zeta - \Phi) = \text{sin.}\,\zeta - \Phi \,\text{cos.}\,\zeta$ & réciproquement
$\frac{1}{\text{sin.}(\zeta - \Phi)} = \frac{1}{\text{sin.}\,\zeta} + \frac{\Phi\,\text{cos.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\zeta^2}$

ce qui donne $x = \frac{a\,\Phi\,\text{cos.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\zeta}$, ou bien en mettant l'arc AD $= s$, à cause de $a\,\Phi = s$, nous aurons $x = s\,\text{cot.}\,\zeta$; où la courbure de la Terre n'entre pas en considération; mais pour en tenir compte ou peut supposer l'angle $\zeta - \Phi = \psi$, pour avoir $\zeta = \Phi + \psi$ & partant

$$\text{sin.}\,\zeta = \text{sin.}\,\psi + \Phi\,\text{cos.}\,\psi$$

& on aura

$$x = \frac{a\,\Phi\,\text{cos.}\,\psi}{\text{sin.}\,\psi} = s\,\text{cot.}\,\psi\,;$$

ou bien sans recourir aux approximations on aura plus exactement

$$x = \frac{2\,a\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{cos.}\,(\zeta - \tfrac{1}{2}\Phi)}{\text{sin.}\,(\zeta - \Phi)}$$ ou bien

$$x = \frac{s\,\text{cos.}\,(\zeta - \tfrac{1}{2}\Phi)}{\text{sin.}\,(\zeta - \Phi)}.$$

En poursuivant le calcul de la même manière pour le cas, où $\delta$ n'est pas évanouissant, mettons d'abord $x$ au lieu de $a + x$, pour avoir

$$d\Phi = \frac{b\,d\,z\,(1 + \frac{\delta x}{m k})}{z\sqrt{z z - b b\,(1 + \frac{\delta x}{m k})^2}}.$$

Développons le dénominateur de cette formule, ou le radical $(z z - b b - \frac{2\delta b b x}{m k})^{-\frac{1}{2}}$, qui sera par l'évolution $(z z - b b)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\delta b b x}{(z z - b b)^{\frac{3}{2}}}$; cette valeur étant substituée, en mettant à part les termes affectés par $\delta^2$, nous fournit

$$d\Phi = \frac{b\,d\,z}{z\sqrt{z z - b b}} + \frac{\delta\,b\,x}{m k}\,\frac{d\,z}{z\sqrt{z z - b b}} + \frac{\delta\,x\,b^3\,d\,z}{m k\,(z z - b b)^{\frac{3}{2}}}$$

&

& ce-ci se reduit à cette forme :

$$d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz-bb}} + \frac{b\,\delta\,x}{mkz}\cdot\frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien à

$$d\Phi = \frac{b\,dz}{z\sqrt{zz-bb}} + \frac{\delta\,b\,x}{mk}\cdot\frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous voyons donc que la valeur de $d\Phi$ est composée de deux parties, dont la premiere a donnée par integration $\zeta - \text{A}\,\text{sin.}\frac{b}{z}$. Pour l'autre partie mettons $x=z-a$ & elle se décompose en ces deux membres :

$$-\frac{\delta\,a\,b}{mk}\cdot\frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta\,b}{mk}\cdot\frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

dont le premier est absolument integrable, donnant $+\frac{\delta\,a\,b}{mk}\cdot\frac{1}{\sqrt{zz-bb}}$ de sorte que tout revient maintenant à integrer la formule

$$\int\frac{zz\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{dz}{\sqrt{zz-bb}} + bb\int\frac{dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}}$$

dont le premier membre depend des logarithmes & donne

$$\int\frac{dz}{\sqrt{zz-bb}} = l(z+\sqrt{zz-bb})$$

& l'autre donne absolument

$$\int\frac{bb\,dz}{(zz-bb)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{z}{\sqrt{zz-bb}}$$

Ramassons ces parties ensemble & nous aurons

$$\Phi = \text{C} + \zeta - \text{A}\,\text{sin.}\frac{b}{z} - \frac{\delta\,b\,z}{mk\sqrt{zz-bb}} + \frac{\delta\,b}{mk}l(z+\sqrt{zz-bb}) + \frac{\delta\,a\,b}{mk}\cdot\frac{1}{\sqrt{zz-bb}}$$

ou bien

$$\Phi = \text{C} - \frac{\delta\,b\,x}{mk\sqrt{zz-bb}} + \zeta - \text{A}\,\text{sin.}\frac{b}{z} + \frac{\delta\,b}{mk}l(z+\sqrt{zz-bb})$$

Pour

Pour trouver la conſtante faiſons $x = 0$, $z = a$ & $\Phi = 0$ & puiſque $A\,\text{ſin.}\,\frac{b}{a} = \zeta$, nous aurons

$$C = -\frac{\delta b}{mk}\,l\,\overline{a + \sqrt{aa - bb}},$$

qui, à cauſe de $b = a\,\text{ſin.}\,\zeta$ & $\sqrt{aa - bb} = a\,\text{coſ.}\,\zeta$, ſe reduit à $C = -\frac{\delta b}{mk}\,l\,a\,(1 + \text{coſ.}\,\zeta)$; par conſéquent nous aurons l'équation ſuivante:

$$\Phi = \zeta - \frac{\delta b x}{mk\sqrt{zz - bb}} - A\,\text{ſin.}\,\frac{b}{z} + \frac{\delta b}{mk}\,l\,\frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a(1 + \text{coſ.}\,\zeta)}.$$

Or il eſt évident, que, quoique on faſſe $\Phi = \frac{s}{n}$, on ne ſçauroit jamais tirer de cette équation la juſte valeur de $x$ ou de $z$: cette circonſtance nous oblige, de nous arreter à la ſimple ſolution que nous avons donnée ci-deſſus.

---

Mais puiſque nous avons trouvée pour le cas $\delta = 0$, où la réfraction évanouit, cette équation: $x = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,(\zeta - \Phi)} - a$ & partant $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,(\zeta - \Phi)}$, nous mettrons pour abréger $\zeta - \Phi = \psi$, pour avoir $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$. Soit enſuite (en tenant compte de la réfraction) $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi} + \omega$, de ſorte-que $\omega$ renferme l'effet de la réfraction, qui étant extremement petit, on pourra regarder $\omega$ comme la différentielle de $z$, & il ſera bon de remarquer, que l'expreſſion $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ eſt rigoureuſement vraye dans le cas $\delta = 0$ & ne renferme aucune approximation.

Subſtituons donc maintenant dans la dernière équation que nous venons de trouver cette valeur $\frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi} + \omega$ au lieu de $z$, & puiſque $\omega$ eſt ſuppoſé quaſi infiniment petit, il ſuffira de mettre $z = \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ dans les termes affectés par $\delta$. Cela remarqué faiſons d'abord cette ſubſtitution dans les termes de nôtre équation, qui ne renferment

ment point δ, qui ſont $\Phi = \zeta - \text{A fin.}\,\frac{b}{z}$, où $b = a\,\text{fin.}\,\zeta$, & puisque en général $\text{A fin.}\,(v + dv) = \text{A fin.}\,v + \frac{dv}{\sqrt{1 - vv}}$, nous avons ici $v = \frac{b}{z}$ & partant

$$dv = -\frac{b\,dz}{zz} = -\frac{b\,\omega}{zz} \;\&\; \sqrt{1 - vv} = \frac{\sqrt{zz - bb}}{z}.$$

Poſant donc $z = \frac{a\,\text{fin.}\,\zeta}{\text{fin.}\,\psi}$, nous aurons $v = \text{fin.}\,\psi$ & partant $\text{A fin.}\,v = \psi = \zeta - \Phi$; enſuite nous aurons

$$dv = -\frac{\omega\,\text{fin.}\,\psi^2}{a\,\text{fin.}\,\zeta} \;\&\; \sqrt{1 - vv} = \text{cof.}\,\psi;$$

de ſorte que $\frac{dv}{\sqrt{1 - vv}} = -\frac{\omega\,\text{fin.}\,\psi^2}{a\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\psi}$. Ces valeurs étant ſubſtituées nous fourniſſent

$$\Phi = \zeta - \zeta + \Phi + \frac{\omega\,\text{fin.}\,\psi^2}{a\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\psi} \text{ ou bien } 0 = \frac{\omega\,\text{fin.}\,\psi^2}{a\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\psi},$$

où il faut encore ajouter les termes qui ſont affectés par δ.

Puisque dans ces termes il ſuffit de mettre $z = \frac{a\,\text{fin.}\,\zeta}{\text{fin.}\,\psi}$, à cauſe de $b = a\,\text{fin.}\,\zeta$ nous aurons $\sqrt{zz - bb} = a\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cot.}\,\psi$; par conſéquent le terme

$$-\frac{\delta\,b\,z}{mk\sqrt{zz - bb}} \text{ nous donnera } -\frac{\delta}{mk}\cdot\frac{a(\text{fin.}\,\zeta - \text{fin.}\,\psi)}{\text{cof.}\,\psi}.$$

Mais pour le dernier terme qui eſt

$$+\frac{\delta\,b}{mk}\,l\,\frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a(1 + \text{cof.}\,\zeta)} \text{ nous aurons d'abord}$$

$$z + \sqrt{zz - bb} = \frac{a\,\text{fin.}\,\zeta}{\text{fin.}\,\psi}(1 + \text{cof.}\,\psi) \text{ \& partant}$$

$$\frac{z + \sqrt{zz - bb}}{a(1 + \text{cof.}\,\zeta)} = \frac{\text{fin.}\,\zeta}{\text{fin.}\,\psi}\cdot\frac{1 + \text{cof.}\,\psi}{1 + \text{cof.}\,\zeta}.$$

Or cette formule ſe reduit à celle-ci

$$1 + \frac{\text{fin.}\,\zeta - \text{fin.}\,\psi + \text{fin.}\,(\zeta - \psi)}{\text{fin.}\,\psi(1 + \text{cof.}\,\zeta)}$$

mais puisqu'il y a $\text{fin.}\,(\zeta - \psi) = \text{fin.}\,\Phi$ & $\Phi$ extremement petit, il y aura $\text{fin.}\,\psi = \text{fin.}\,\zeta - \Phi\,\text{cof.}\,\zeta$, d'où l'expreſſion prendra la forme ſuivante:

$$1 + \frac{\text{fin.}\,\zeta - \text{fin.}\,\zeta + \Phi\,\text{cof.}\,\zeta + \Phi}{\text{fin.}\,\psi(1 + \text{cof.}\,\zeta)} = 1 + \frac{\Phi}{\text{fin.}\,\psi}.$$

dont le logarithme, à cause de $\Phi$ extrèmement petit sera assés exactement $\frac{\Phi}{\sin.\psi}$, desorte que le dernier terme se réduit à $\frac{\delta a \sin.\zeta}{mk}\cdot\frac{\Phi}{\sin.\psi}$. Ajoutons ces valeurs à l'équation précédente & nous aurons cette équation :

$$o = \frac{\omega \sin.\psi^2}{a \sin.\zeta \cos.\psi} - \frac{\delta}{mk}\cdot\frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\cos.\psi} + \frac{\delta a \sin.\zeta}{mk}\cdot\frac{\Phi}{\sin.\psi}$$

qui à cause de $\sin.\zeta - \sin.\psi = \Phi \cos.\zeta$ se réduit à celle-ci :

$$o = \frac{\omega \sin.\psi^2}{a \sin.\zeta \cos.\psi} + \frac{\delta a}{mk}\cdot\frac{\Phi \sin.\Phi}{\sin.\psi \cos.\psi};$$

d'où l'on tire la valeur $\omega = -\frac{\delta a a}{mk}\cdot\frac{\Phi^2 \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}$; & puisque nous avons mise la distance horisontale $AD = a\Phi = s$, nous aurons la valeur $\omega = -\frac{\delta}{mk}\cdot\frac{ss \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}$.

A cause de la réfraction nous aurons donc

$$z = \frac{a \sin.\zeta}{\sin.\psi} - \frac{\delta}{mk}\cdot\frac{ss \sin.\zeta}{\sin.\psi^3},$$

d'où nous concluons la hauteur de l'objet au dessus du vray horison, c'est à dire

$$DO = x = \frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\sin.\psi} - \frac{\delta}{mk}\cdot\frac{ss \sin.\zeta}{\sin.\psi^3}.$$

Or nous avions trouvé ci-dessus $\frac{mk}{\delta} = 4a$, d'où, en faisant usage de la réduction assignée, sçavoir :

$$\frac{a(\sin.\zeta - \sin.\psi)}{\sin.\psi} = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)},$$

nous aurons la hauteur cherchée

$$DO = x = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)} - \frac{ss \sin.\zeta}{4a \sin.(\zeta - \Phi)^3},$$

où le derniere membre $\frac{ss \sin.\zeta}{4a \sin.(\zeta-\Phi)^3}$ est l'effet de la réfraction. Or ayant supposé ci-dessus, que le rayon de lumière OA ait partout la même courbure, nous avons trouvé cet effet $= \frac{ss \cos.\theta}{8a \cos.\eta}$ où

$$\theta = 90° - \zeta \ \& \ \eta = \theta + \Phi = 90° - \psi = 90° - (\zeta - \Phi)$$

en

en introduirant dans cette formule $\frac{s s \cos. \theta}{s a \cos. \eta}$ au lieu des angles $\eta$ & $\theta$ les élémens préſens $\zeta$ & $\Phi$ nous obtiendrons celle-ci: $\frac{s s \sin. \zeta}{s a \sin. (\zeta - \Phi)}$.

Nous voyons que cette formule diffère trop de la précédente, pour qu'on en puiſſe attribüer la cauſe à quelque défaut de la première hypothèſe de courbure uniforme, qui ne ſçauroit jamais manquer pour des petites diſtances; d'où il faut conclure, que nous n'avons pas pouſſée aſſés loin l'approximation dans la dernière recherche.

En effet, puisque nous voyons, que la valeur de $\omega$ eſt déterminée par le quarré du petit angle $\Phi$, il eſt évident, que nous aurions dû pouſſer les approximations jusqu'à la ſeconde puiſſance de $\Phi$. Ainſi puisque $\psi = \zeta - \Phi$ & partant exactement $\sin. \psi = \sin. \zeta \cos. \Phi - \cos. \zeta \sin. \Phi$, nous pouvons bien mettre comme auparavant $\sin. \Phi = \Phi$, mais au lieu de $\cos. \Phi$ nous devons écrire $1 - \frac{1}{2} \Phi^2$, de ſorte qu'il y ait $\sin. \psi = \sin. \zeta - \Phi \cos. \zeta - \frac{1}{2} \Phi \Phi \sin. \zeta$. Or cela ne produit aucune différence dans la réduction de la première partie de nôtre équation; mais dans les parties affectées par $\delta$, la première ayant été reduite à cette forme: $-\frac{\delta a}{m k} \cdot \frac{\sin. \zeta - \sin. \psi}{\cos. \psi}$, l'approximation expoſée nous donnera $-\frac{\delta a}{m k} \cdot \left( \frac{\Phi \cos. \zeta}{\cos. \psi} + \frac{\Phi \Phi \sin. \zeta}{2 \cos. \psi} \right)$; enſuite l'autre partie logarithmique à été reduite à

$$\frac{\delta b}{m k} l \left( 1 + \frac{\sin. \zeta - \sin. \psi + \sin. (\zeta - \psi)}{\sin. \psi (1 + \cos. \zeta)} \right),$$

qui à cauſe de $\sin. \zeta - \sin. \psi = \Phi \cos. \zeta + \frac{1}{2} \Phi \Phi \sin. \zeta$ & $\sin. (\zeta - \psi) = \Phi$ ſe reduit à la forme ſuivante:

$$\frac{\delta a \sin. \zeta}{m k} l \left( 1 + \frac{\Phi + \Phi \cos. \zeta + \frac{1}{2} \Phi^2 \sin. \zeta}{\sin. \psi (1 + \cos. \zeta)} \right)$$

 d'où

d'où l'on voit que cette dernière fraction eſt extremement petite, & partant, ſi nous écrivons au lieu de cette fraction la lettre $\alpha$, pour avoir $l(1+\alpha)$ en montant jusqu'à la ſeconde puiſſance de $\Phi$ nous aurons $l(1+\alpha)=\alpha-\frac{1}{2}\alpha\alpha$; par conſéquent, puisque

$$\alpha=\frac{\Phi}{\sin.\psi}+\frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)} \quad \& \quad -\frac{1}{2}\alpha\alpha=-\frac{\Phi\Phi}{2\sin.\psi^2}$$

cette dernière partie nous donnera

$$\frac{\delta a\sin.\zeta}{mk}\left(\frac{\Phi}{\sin.\psi}+\frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)}-\frac{\Phi\Phi}{2\sin.\psi^2}\right).$$

Mettant donc ces valeurs au lieu de ces formules, nôtre équation pour déterminer la quantité $\omega$ ſera

$$0=\frac{\omega\sin.\psi^2}{a\sin.\zeta\cos.\psi}-\frac{\delta a}{mk}\left(\frac{\Phi\cos.\zeta}{\cos.\psi}+\frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\cos.\psi}\right)$$
$$+\frac{\delta a}{mk}\left(\frac{\Phi\sin.\zeta}{\sin.\psi}+\frac{\Phi\Phi\sin.\zeta^2}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)}-\frac{\Phi\Phi\sin.\zeta}{2\sin.\psi^2}\right).$$

Joignons enſemble les deux membres qui ne contiennent que les $\Phi$, qui donneront $\frac{\Phi\Phi}{\sin.\psi\cos.\psi}$, de ſorte que notre équation ſera:

$$0=\frac{\omega\sin.\psi^2}{a\sin.\zeta\cos.\psi}+\frac{\delta a\Phi\Phi}{mk}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sin.\psi\cos.\psi}+\frac{\sin.\zeta^2}{2\sin.\psi(1+\cos.\zeta)}\\-\frac{\sin.\zeta}{2\cos.\psi}-\frac{\sin.\zeta}{2\sin.\psi^2}\end{array}\right\}.$$

Maintenant on peut hardiment ſuppoſer $\psi=\zeta$, étant dejà parvenu au quarré $\Phi\Phi$, puisque la différence monteroit à une puiſſance encore plus haute de $\Phi$; & on peut faire la même choſe dans la première partie qui contient $\omega$, d'où nous parvenons à cette équation:

$$0=\frac{\omega\sin.\zeta}{a\cos.\zeta}+\frac{\delta a\Phi\Phi}{mk}\left(\frac{1}{\sin.\zeta\cos.\zeta}+\frac{\sin.\zeta}{2(1+\cos.\zeta)}-\frac{\sin.\zeta}{2\cos.\zeta}-\frac{1}{2\sin.\zeta}\right).$$

Ici il eſt bon de remarquer que le terme $\frac{\sin.\zeta}{2(1+\cos.\zeta)}$ ſe reduit à $\frac{\sin.\zeta^2}{2\sin.\zeta(1+\cos.\zeta)}=\frac{1-\cos.\zeta}{2\sin.\zeta}$, d'où notre équation devient:

$$0=\frac{\omega\sin.\zeta}{\cos.\zeta}+\frac{\delta a\Phi\Phi}{2mk}\left(\frac{2}{\sin.\zeta\cos.\zeta}-\frac{\cos.\zeta}{\sin.\zeta}-\frac{\sin.\zeta}{\cos.\zeta}\right)$$

qui

qui se reduit à celle-ci:

$\omega = \frac{\omega \sin.\zeta}{a \cos.\zeta} + \frac{\delta a \Phi\Phi}{2 mk \sin.\zeta \cos.\zeta}$ d'où l'on tire enfin $\omega = -\frac{\delta a a \Phi\Phi}{amk \sin.\zeta^2}$.

Or nous avons trouvé ci-dessus $\frac{mk}{\delta} = 4a$, & puisque $a\Phi = s$, nous aurons

$\omega = -\frac{ss}{8 a \sin.\zeta^2}$ & partant $z = \frac{a \sin.\zeta}{\sin.\psi} - \frac{ss}{8 a \sin.\zeta^2}$;

d'où, retranchant le rayon de la Terre $a$, nous aurons par la réduction employée ci-dessus

$$x = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)} - \frac{ss}{8 a \sin.\zeta^2}.$$

Cette valeur convient assés bien avec celle que la première hypothèse a fournie, qui étoit

$$x = \frac{s \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi)}{\sin.(\zeta - \Phi)} - \frac{ss \sin.\zeta}{8 a \sin.(\zeta - \Phi)},$$

qui dans le cas où $\zeta$ est près de $90°$ & $\Phi = 0$ ne différe absolument rien de l'autre.

Appliquons à cette dernière formule le cas où $s = 24000$ Tois. $\Phi = 25'. 14''$ $\zeta = 86°. 40'$ & partant $\zeta - \Phi = 86°. 14'. 46'$ & $\zeta - \frac{1}{2}\Phi = 86°. 27'. 23''$ & le calcul se fera comme il suit:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l\,s =$ | 4, 3802112 | $l\,\frac{s}{8}\frac{s}{a} =$ | 1, 3428781 |
| $l \cos.(\zeta - \frac{1}{2}\Phi) =$ | 8, 7910465 | $l \sin.\zeta =$ | 9, 9992646 |
| | 3, 1712577 | | 1, 3421427 |
| $l \sin.(\zeta - \Phi) =$ | 9, 9990672 | $l \sin.(\zeta - \Phi) =$ | 9, 9990672 |
| | 3, 1721905 | | 1, 3430755 |
| | 1487 Toises. | | 22 Toises. |

hauteur D O = 1465 Toises.

Tab. II. Fig. 8.

Mettons maintenant devant les yeux la dernière formule, que nous venons de trouver comme la plus exacte pour determiner la hauteur d'un objet terrestre. Soit donc O l'objet dont on veut trouver l'élévation au-dessus de l'horison A D, ou bien la perpendiculaire D O, & en supposant l'observateur en A soit la distance horizontale $AD = s$, & que l'objet lui paroisse élevé au dessus de l'horison de l'angle $DAO = \theta$, ensorte que $\zeta = 90^{\circ} - \theta$. Qu'on cherche alors l'angle $\Phi = \frac{s}{a}$, où $a$ marque le demi diamètre de la Terre $= 3269297$ & la hauteur cherchée de l'objet sera:

$$DO = \frac{s \sin. (\theta + \frac{1}{2}\Phi)}{\cos. (\theta + \Phi)} - \frac{s\, s \cos. \theta}{8\, a \cos. (\theta + \Phi)}.$$

Dont l'application à chaque cas n'aura aucune difficulté.

DE