

DE

MOTU OSCILLATORIO

PENDULI CUIUSCUNQUE, DVM ARCUS DATAE
AMPLITVDINIS ABSOLVIT.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Quando vulgo doctrina de motu pendulorum in elementis Mechanicae tractatur, potissimum spectari solent pendula simplicia, quae, dum oscillantur, excursions infinite paruas peragunt; vnde longitudo penduli simplicis singulis minutis oscillantis sollicite determinari solet. Cum autem pendula, quibus experimenta institui solent, neque sint simplicia, neque oscillationes, quantumuis fuerint exiguae, tanquam infinite paruae spectari queant, illa theoria duplici correctione indiget, quarum altera per centrum oscillationis remedium affertur, dum scilicet, proposito pendulo quocunque, longitudo penduli simplicis quaeritur, quod paribus temporibus oscillationes suas infinite paruas absolvat: altera vero correctio, quam oscillationes per arcus maiores factae exigunt, etsi a Geometris iam omni studio est definita, tamen non ita in vulgus est cognita, vt ad quosuis casus facile accommodari queat. Praeterea vero etiam ista posterior correctio tantum ad pendula simplicia restringi solet; vnde non inutile videtur istud argumentum ita in genere pertractare, vt inde sine vilo labore correctiones pro pendulis vtcunque compositis et pro quavis arcuum

arcuum descriptorum amplitudine peti queant; in quo quidem negotio animum a resistentia aëris aliisque impedimentis abstrahemus, quandoquidem oscillationes inde oriundae iam satis accurate a Geometris sunt inuestigatae.

Tab. III.
Fig. I.

§. 2. Denotet igitur in figura punctum A axem horizontalem, circa quem pendulum quodcunque AG oscillationes peragat, vbi quidem planum tabulae verticale est concipiendum, ad quod axis A sit normalis, ita vt pendulum in hoc plano verticali oscillationes suas absoluat, in quo porro concipiatur recta verticalis AB, quae situm naturalem penduli, in quo acquiescere possit, referat; id quod coninget, quando centrum grauitatis totius penduli in ista recta verticali AB extiterit. Tum vero angulus $BAG = \zeta$ repraesentet excursionem maximam, ad quam pendulum in motu suo oscillatorio a recta verticali AB vtrunque alternatim digrediatur; ita vt iam nobis incumbat tempus definire, quo pendulum ex situ obliquo AG ad rectam verticalem AB sit peruenturum, quippe quod bis sumptum indicabit tempus vnius oscillationis. Per se autem manifestum est, rectam AG, vnde angulus excursionis $BAG = \zeta$ aestimatur, per centrum grauitatis totius penduli ab axe A duci debere.

§. 3. Sit igitur punctum G centrum grauitatis totius penduli, vteunque fuerit compositum, ac ponatur eius distantia ab axe $AG = a$; tota vero penduli massa indicetur littera M, qua simul eius pondus designetur; vnde vis grauitatis in hoc pendulum ita aget, ac si ipsi in ipso centro grauitatis G applicata esset vis $= M$, in directione verticali GH sollicitans. Praeterea vero principia motus postulant, vt innotescat momentum inertiae totius penduli respectu axis per centrum grauitatis G ducti et axi gyrationis

nis A paralleli, quod reperitur, si singula penduli elementa per quadrata distantiarum suarum ab isto axe per G ducto multiplicentur atque omnia ista producta in vnam summam colligantur. Statuatur igitur istud momentum inertiae $= M k k$, quandoquidem semper assignare licebit eiusmodi longitudinem k , ut productum $M k k$ aequetur summae omnium memoratorum productorum elementarium. Cognito autem isto momento inertiae respectu puncti G ex Mechanica constat, eius momentum inertiae respectu axis gyrationis A fore $= M (a a + k k)$.

§. 4. Consideremus nunc situm penduli quemcunque, quem inter oscillandum teneat, vbi recta $A G = a$, cum recta verticali $A B$ constituat angulum $B A G = \Phi$, qui igitur est variabilis, dum a situ verticali, vbi $\Phi = 0$, alternatim vtrinque vsque ad $\Phi = \zeta$ excrescere potest, siquidem ζ amplitudinem excursionis maximae denotat. Cum igitur pendulum a sola vi grauitatis vrgeri statuatur, vim sustinebit centro grauitatis G in directione verticali $G H$ applicatam $= M$, cuius ergo momentum respectu axis gyrationis A erit $= M a \sin. \Phi$, cuius actio tendit ad angulum $B A G = \Phi$ diminuendum. Vnde, si pendulum ad situm verticalem $A B$ accedat, eius motus ab ista vi accelerabitur; contra vero, si pendulum a situ naturali recedat, eius motus ab hac vi tantundem retardabitur; ex quo intelligitur, tam accessiones quam recessiones aequalibus temporibus absolui debere.

§. 5. Concipiamus igitur pendulum a situ naturali $A B$ recedere, et elapso tempore t peruenisse in situm $A G$, confecto angulo $B A G = \Phi$. Sumamus porro tempus t in minutis secundis exprimi, et quoniam pendulum elemento

Tab. III.
Fig. 2.

temporis dt conficiet angulum $GA g = d\Phi$, eius celeritas angularis erit $\frac{d\Phi}{dt}$, ideoque eius differentiale per dt diuisum dabit accelerationem $= \frac{d^2\Phi}{dt^2}$, sumpto scilicet elemento dt constante, quae acceleratio secundum principia motus proportionalis est momento vis sollicitantis diuiso per momentum inertiae totius corporis respectu axis gyrationis, qui est in A. Vidimus autem momentum vis sollicitantis esse $= Ma \sin. \Phi$, quod, quia tendit ad motum retardandum, negatiue accipi debet; tum vero ostendimus momentum inertiae esse $= M(aa + kk)$. Quod si iam littera g denotet altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, praeccepta Mechanicae nobis suppeditant istam aequationem differentialem secundi gradus:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{2gMa \sin. \Phi}{M(aa + kk)} = -\frac{2ga \sin. \Phi}{aa + kk}$$

ex qua totum penduli motum deriuare oportet.

§. 6. Multiplicemus hanc aequationem vtrinque per $2 d\Phi$, et quia $\int d\Phi \sin. \Phi = -\cos. \Phi$, hinc integrando consequimur hanc aequationem: $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{2ga \cos. \Phi}{aa + kk} + C$, vbi ad constantem rite determinandam notetur, formulam $\frac{d\Phi^2}{dt^2}$ exprimere quadratum celeritatis angularis, quae cum euanescere debeat, quando pendulum ad maximam excursionem pertigerit, hoc est, casu, quo fit $\Phi = \zeta$, haec constans ita definietur, vt sit $C = -\frac{2ga \cos. \zeta}{aa + kk}$ ita vt iam aequatio motum penduli definiens fit $\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{2ga(\cos. \Phi - \cos. \zeta)}{aa + kk}$. Ponamus breuitatis gratia $\frac{aa + kk}{a} = b$ et habebimus

$$\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{2g}{b} (\cos. \Phi - \cos. \zeta)$$

vbi notetur, longitudinem $b = a + \frac{kk}{a}$ exprimere distantiam centri oscillationis ab axe suspensionis, siue, quod eodem redit, longitudinem penduli simplicis isochroni, quod scilicet eundem motum oscillatorium esset recepturum, si quidem arcus eiusdem amplitudinis absolueret. Hinc igitur

tur

patet, ipso initio, quo pendulum ex situ verticali AB recessit, quadratum eius celeritatis fuisse $\frac{4g}{b} (1 - \cos. \zeta)$ huius formula simul exprimit altitudinem huic celeritati debitam.

§. 7. Quaeramus nunc ex hac aequatione valorem elementi temporis dt , qui erit $dt = \frac{d\Phi \sqrt{b}}{2\sqrt{g}(\cos. \Phi - \cos. \zeta)}$ cuius ergo formulae integrale erit inuestigandum. Hunc in finem ponamus $\sin. \frac{1}{2} \zeta = c$ et $\sin. \frac{1}{2} \Phi = z$, fietque $\cos. \zeta = 1 - 2cc$ et $\cos. \Phi = 1 - 2zz$; ac inde vero, cum sit $\cos. \frac{1}{2} \Phi = \sqrt{1 - 2zz}$, sumptis differentialibus erit $\frac{1}{2} d\Phi \cos. \frac{1}{2} \Phi = dz$; unde concluditur $d\Phi = \frac{2dz}{\sqrt{1 - 2zz}}$; quibus valoribus substitutis erit nostrum elementum temporis

$$dt = \frac{dz \sqrt{b}}{\sqrt{2g}(cc - 2zz)(1 - 2zz)} \text{ siue } \frac{dt \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(cc - 2zz)(1 - 2zz)}}$$

cuius integrale, ut totum tempus ascensus a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = \zeta$ exprimat, extendi debet a $z = 0$ vsque ad $z = c$, hocque modo obtinebitur tempus unius dimidiae oscillationis; ubi notetur, quantitatem c unitatem nunquam superare posse atque adeo in exiguis oscillationibus fore fractionem valde parvam.

§. 8. Ut ambo termini integrationis ad terminos 0 et 1 renocentur, statuatur $z = cy$ et aequatio nostra induet hanc formam: $\frac{dt \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)(1 - ccy y)}}$. Quo nunc hinc integrale per seriem infinitam expressum elicere queamus, postremum factorem $\frac{1}{\sqrt{(1 - ccy y)}} = (1 - ccy y)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem evolnamus, quae erit

$$1 + \frac{1}{2} ccy y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} c^2 y^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^3 y^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} c^4 y^4 + \text{etc.}$$

ita ut nunc habeamus

$$\frac{dt \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - yy}} \left(1 + \frac{1}{2} ccy y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} c^2 y^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^3 y^3 + \text{etc.} \right)$$

ubi singularum partium integralia ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$ sunt.

sunt extendenda. Nunc primo statim patet esse $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter = 1; pro reliquis vero, cum in genere pro iisdem terminis integrationis fit:

$$\int \frac{y^{n+1} dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{\pi}{n+1} \int \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{(1-y^2)}} \text{ erit}$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^5 dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{y^7 dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{2}$$

etc. etc.

His igitur valoribus substitutis integratio singularum partium nos perducit ad sequentem seriem:

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2}cc + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} c^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c^6 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} c^8 + \text{etc.} \right)$$

§. 9. Hinc igitur innotescit tempus t pro dimidia oscillatione, quod duplicatum praebebit tempus unius oscillationis integrae, quod si indicetur littera T , erit.

$$T = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \left(1 + \frac{1}{2}cc + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} c^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c^6 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} c^8 + \text{etc.} \right)$$

quod tempus adeo exprimitur in minutis secundis, siquidem g denotet altitudinem, per quam grauia vno minuto secundo libere delabuntur. Atque hinc statim patet, si oscillationes fuerint infinite paruae, quo casu fit $\zeta = 0$,

ideoque $c = 0$, tempus cuiusque oscillationis futurum esse $T = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$, vbi b designat longitudinem penduli simplicis

isochroni, siue distantiam centri oscillationis ab axe gyrationis A . Vnde si velimus, vt pendulum singulas oscillationes vno minuto secundo absoluat, fieri debet $\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} = 1$, vnde colligitur longitudo talis penduli simplicis $b = \frac{2g}{\pi^2}$.

Quare

Quare cum in pedibus Rhenanis sit $g = 15\frac{1}{2}$ ped. ideoque
 $2g = 31$ ped. erit longitudo talis penduli $b = 3,16621$.
 Sin autem longitudo penduli fuerit maior vel minor, tum
 tempora oscillationum, uti in vulgus est notum, sequentur
 rationem subduplicatam longitudinis penduli b ; ubi au-
 tem probe notandum, oscillationes hic considerari infinite
 parvas.

§. 10. Quod autem ad oscillationes per arcus
 maiores attinet, in genere quidem patet ex nostra for-
 mula, quo maiores fuerint hi arcus, quoniam quantitas
 $t = \sin. \frac{1}{2} \zeta$ etiam augetur, tempora oscillationum fieri ali-
 quanto minora; quod quo clarius ob oculos ponamus,
 sumamus quantitatem cc tam esse parvam, ut eius altio-
 res potestates c^4, c^6 etc. negligere liceat, ac tum tempus

vnus oscillationis erit $T = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}} (1 + \frac{1}{4} cc)$, unde, si Θ
 denotet tempus vnus oscillationis infinite peruae eiusdem
 penduli, ob $\Theta = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$ erit nunc $T = \Theta (1 + \frac{1}{4} cc)$, siue

erit $\Theta : T = 1 : 1 + \frac{1}{4} cc$, id quod valet pro oscillationi-
 bus satis exiguis: si enim arcus maiores absoluantur,
 etiam plures terminos seriei inuentae assumi oportebit. Ut
 nunc hanc formulam ad vsum practicum accomodemus,

consideremus nostrum pendulum $A G O$ in excursionem
 maxima, ita ut cum recta verticali $A B$ faciat angulum
 $B A O = \zeta$ sitque G , ut hactenus, centrum grauitatis pen-
 duli, punctum O vero centrum oscillationis, ita ut sit
 $A O = b = \frac{aa + kk}{a}$. Iam ducta ex O horizontali $O D$
 erit $O D = b \sin. \zeta$ et $A D = b \cos. \zeta$, unde fiet sagitta
 $B D = b (1 - \cos. \zeta) = 2b \sin. \frac{1}{2} \zeta^2$; erit ergo hoc inter-
 vallum $B D = 2b c c$. Quoniam igitur, data amplitudine
 siue angulo ζ , hoc interuallum $B D$ facile metiri licet, vo-
 cemus id $B D = d$, eritque $cc = \frac{d}{2b}$; quam ob rem pro

Tab. III.
Fig. 3.

oscillationibus satis exiguis erit $\Theta : T = 1 : 1 + \frac{d}{8b}$ sive
 $\Theta : T = 8b : 8b + d$, hoc est vt $8AB : 8AB + BD$
 qua regula iam passim in experimentando vti solent.

§. II. Sin. autem oscillationes per maiores arcus
 peragantur, atque Θ vt ante denotet tempus vnus oscil-
 lationis infinite paruae penduli propositi, ob

$$\Theta = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \text{ et } cc = \frac{d}{2b}$$

tempus vnus oscillationis pro angulo $BAO = \zeta$ ita ex-
 primetur vt sit

$$T = \Theta \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{d}{2b} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{dd}{4bb} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{d^3}{8b^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{d^4}{16b^4} + \text{etc.} \right)$$

vnde si pendulum inter oscillandum totum semicirculum
 percurrat, ita vt angulus ζ euadat $= 90^\circ$ erit $b = d$ ideo-
 que hoc casu tempus vnus oscillationis erit

$$T = \Theta \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{1}{16} + \text{etc.} \right)$$

cuius valor in fractionibus decimalibus computatus colligi-
 tur proxime $T = 1,1805 \Theta$, quae ratio proxime est vt
 5 : 6. Si arcus percurfi adeo maiores euadant quam se-
 micirculus, tempora oscillationum continuo magis incre-
 scent, atque adeo si pendulum totam peripheriam percur-
 rere debeat, tempus vsque in infinitum augetur; postquam
 enim pendulum in locum supremum fuerit perductum, si-
 tum tenebit verticalem et nunquam ex eo delabetur; vnde
 mirum non est calculum tempus infinite magnum osten-
 dere. Caeterum, quia hoc casu fit $d = 2b$, series supra
 inuenta abibit in haec:

$$1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \text{etc.}$$

cuius summam infinitam esse ex prima formula inte-
 grali manifesto liquet, quae, ob $c = 1$, erit $\int \frac{dz}{1-2z}$ a
 $z = 0$ ad $z = 1$ extendenda; eius vero integrale est
 $\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-2z}$, qui valor, posito $z = 1$, manifesto fit infinitus.

Addita-

Additamentum ad dissertationem de motu
pendulorum.

§. 12. Cum circa finem superioris dissertationis ostendissem tempus oscillationis in infinitum augeri, si angulus ζ usque ad 180 grad. excrecat, quaestio hic se offert non parum curiosa, quantum futurum sit tempus oscillationis, quando angulus ζ propemodum ad 180 grad. augetur, ita ut quantitas $c = \sin. \frac{1}{2} \zeta$ tantum non unitati fiat aequalis, siue quam minime ab ea deficiat, tum enim series inuenta

$$T = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \left(1 + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} c^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 + \text{etc.} \right)$$

etsi summam habet finitam, tamen eius termini nimis lente convergunt, quam ut eius verum valorem saltem proxime inde determinare liceat; neque etiam vlla via patere videtur, illam seriem ita transformandi, ut eius summa satis exacte inde definiri queat.

§. 13. Constituto igitur axe gyrationis in A, Tab. III. circa eum radio $AB = Ab = b$ describatur circulus, in Fig. 4 quo diameter Bb situm teneat verticalem. Iam sursum ducatur radius Ag parum a situ verticali discrepans, unde pendulum per peripheriam circuli descendere incipiat, ita ut angulus bAg sit valde exiguus, quem vocemus $bAg = \eta$. Quare cum in calculo praecedenti littera ζ designasset angulum BAg , erit nunc $\zeta = 180 - \eta$, hincque $c = \sin. (90 - \frac{1}{2} \eta) = \cos. \frac{1}{2} \eta$ propemodum unitati aequabitur. Ponamus nunc elapso tempore $= t$ pendulum ex g descendisse in Z et vocemus angulum $bAZ = \psi$ ita ut sit angulus $BAZ = \Phi = 180 - \psi$, ideoque, cum posuissimus $z = \sin. \frac{1}{2} \Phi$ erit nunc $z = \cos. \frac{1}{2} \psi$; quam ob rem aequatio pro motu penduli supra inuenta

$$\frac{dt \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)(cc-zz)}}$$

per istos novos valores evolui debet.

§. 14.

§. 14. Cum igitur sit $cc = \cos. \frac{1}{2} \eta^2 = 1 - \sin. \frac{1}{2} \eta^2$ et $zz = \cos. \frac{1}{2} \psi^2 = 1 - \sin. \frac{1}{2} \psi^2$ fiet, $\frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2} d\psi$ cui signum + tribuimus, quia hic corpus descendere assumimus, dum ante ascensus fuisset consideratus. His igitur valoribus substitutis postea aequatio differentialis erit

$$\frac{dt \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \frac{d\psi}{2\sqrt{(\sin. \frac{1}{2} \psi^2 - \sin. \frac{1}{2} \eta^2)}}$$

vbi probe notetur terminum $\sin. \frac{1}{2} \eta^2$ esse quam minimum

§. 15. Quoniam descensus ex puncto g incipere assumitur, existente angulo $bAg = \eta$, evidens est, integrale evanescere posito $\psi = \eta$; quo observato valor litterae t dabit tempus in minutis secundis expressum, quo pendulum ex situ initiali Ag pervenerit in situm quemcumque alium Az . Quoniam igitur hic quantitas $\sin. \frac{1}{2} \eta^2$ mox prae termino $\sin. \frac{1}{2} \psi^2$ evadet quam minima, formula dif-

ferentialis $\frac{d\psi}{2\sqrt{(\sin. \frac{1}{2} \psi^2 - \sin. \frac{1}{2} \eta^2)}}$ commode in hanc seriem evolvetur

$$\frac{1}{2} d\psi \left(\frac{1}{\sin. \frac{1}{2} \psi} + \frac{1 \cdot \sin. \frac{1}{2} \eta^2}{2 \cdot \sin. \frac{1}{2} \psi^3} + \frac{1 \cdot 3 \sin. \frac{1}{2} \eta^4}{2 \cdot 4 \sin. \frac{1}{2} \psi^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \sin. \frac{1}{2} \eta^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \sin. \frac{1}{2} \psi^7} + \text{etc.} \right)$$

vbi integrale primi termini statim per logarithmos ita exprimi potest, ut fit

$$\int \frac{d\psi}{2 \sin. \frac{1}{2} \psi} = l \frac{\text{tg.} \frac{1}{4} \psi}{\text{tg.} \frac{1}{4} \eta}$$

vnde intelligitur, si angulus η plane evanesceret, valorem huius integralis fore infinitum; vnde statim patet, quo minor accipiatur angulus η , eo minus prodire debere tempus; quam ob rem, si praeter primum terminum sequentes negligere liceret, iam haberemus

$$\frac{t \sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = l \frac{\text{tg.} \frac{1}{4} \psi}{\text{tg.} \frac{1}{4} \eta} \text{ ideoque } t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} l \frac{\text{tg.} \frac{1}{4} \psi}{\text{tg.} \frac{1}{4} \eta}$$

§. 16. Manifestum autem est, ex hac formula tempus totius descensus, quo pendulum ex situ initiali A. g. vsque ad situm infimum AB perueniet, definiri posse, quandoquidem posito $\psi = 180^\circ$ tempus istud fiet

$$t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} l \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} l \operatorname{cot.} \frac{1}{2} \eta.$$

Quaquam autem haec expressio primam tantum partem totius valoris continet, tamen ex ea iam satis exacte tempus totius descensus definiri poterit; quem in finem operae pretium erit inuestigare, quantam correctionem sequentes termini seriei supra inuentae producere valeant.

§. 17. Quod quo commodius fieri possit, statuamus $\frac{1}{2} \psi = \omega$ et $\frac{1}{2} \eta = \alpha$, vnde integrale primi termini

prodit $= l \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}$; Pro secundo autem termino habebimus

differentialiale $\frac{d \omega \sin. \alpha^2}{\sin. \omega^3}$, ad cuius integrale inueniendum fingamus $\int \frac{d \omega}{\sin. \omega^3} = \frac{A \operatorname{col.} \omega}{\sin. \omega^2} + B \int \frac{d \omega}{\sin. \omega}$; vnde sumptis differentialibus erit $\frac{1}{\sin. \omega^3} = -\frac{A}{\sin. \omega} - \frac{2A \operatorname{col.} \omega^2}{\sin. \omega^3} + \frac{B}{\sin. \omega}$, quae aequatio, loco $\operatorname{col.} \omega^2$ substituto valore $1 - \sin. \omega^2$, transit in hanc:

$$\frac{1}{\sin. \omega^3} = \frac{A}{\sin. \omega} - \frac{2A}{\sin. \omega^3} + \frac{B}{\sin. \omega}$$

ex qua patet, sumi debere, $2A = -1$ et $B + A = 0$, ita vt sit $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$, vnde ergo colligitur

$$\int \frac{d \omega}{\sin. \omega^3} = -\frac{\operatorname{col.} \omega}{2 \sin. \omega^2} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega + C$$

vbi ad constantem inueniendam statuatur $\omega = \alpha$, fierique debet $0 = -\frac{\operatorname{col.} \alpha}{2 \sin. \alpha^2} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + C$, ideoque $C = \frac{\operatorname{col.} \alpha}{2 \sin. \alpha^2} - \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, quo substituto erit

$$\int \frac{d \omega}{\sin. \omega^3} = \frac{\operatorname{col.} \alpha}{2 \sin. \alpha^2} - \frac{\operatorname{col.} \omega}{2 \sin. \omega^2} + \frac{1}{2} l \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}$$

quo circa, binis partibus prioribus coniungendis, consequetur hunc valorem:

$$\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha\right) \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha} + \frac{1}{4} \operatorname{cof} \alpha - \frac{\operatorname{cof} \omega \sin \alpha^2 A}{4 \sin \omega} \right]$$

Hinc pro toto descensu, ponendo $\omega = 90^\circ$, fiet

$$\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{b}} = \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha\right) \left[\operatorname{cot} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \operatorname{cof} \alpha \right],$$

unde patet nobis secundum terminum imprimis accessisse quantitatem satis notabilem $\frac{1}{4} \operatorname{cof} \alpha$, cuius valor propemodum est $\frac{1}{4}$; quam ob rem eo magis necesse est etiam sequentes terminos exsequi.

§. 18. Haec autem operatio ut in genere institui queat, lemma generale praemittamus pro integratione formulae $\int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n+1}}$, quem in finem ponamus

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n+1}} = \frac{A \operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^{n+1}} + B \int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n-1}}$$

quae forma differentiata praebet

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{A \operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^{n+1}} + B \int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n-1}} \right] = \frac{-n A \operatorname{cof} \omega^2}{\sin \omega^{n+1}} + \frac{B}{\sin \omega^{n-1}}$$

quae ob $\operatorname{cof} \omega^2 = 1 - \sin \omega^2$ abit in hanc:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{A \operatorname{cof} \omega}{\sin \omega^{n+1}} + B \int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n-1}} \right] = \frac{(n-1)A}{\sin \omega^{n+1}} - \frac{nA}{\sin \omega^{n+1}} + \frac{B}{\sin \omega^{n-1}}$$

unde patet esse debere $A = -\frac{1}{n}$ & $B = \frac{1}{n}$, ita ut, introducta constante debita, qua integrale evanescat posito $\omega = \alpha$, habeamus in genere hanc reductionem:

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n+1}} = \frac{\operatorname{cof} \alpha}{n \sin \alpha^n} - \frac{\operatorname{cof} \omega}{n \sin \omega^n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{d\omega}{\sin \omega^{n-1}}$$

quod postremum integrale tanquam cognitum spectare licet.

§. 19. Hoc lemmate confituito fumamus primo $n = 2$ eritque

$$\int \frac{d\omega}{\sin^2 \omega} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha^2} - \frac{\cos \omega}{2 \sin \omega^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{tag} \frac{1}{2} \omega}{\operatorname{tag} \frac{1}{2} \alpha}$$

quemadmodum iam ante inuenimus. Nunc igitur ponamus porro $n = 4$ eritque pro tertio termino

$$\int \frac{d\omega}{\sin^4 \omega} = \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha^2} - \frac{\cos \omega}{4 \sin \omega^2} + \frac{3}{4} \int \frac{d\omega}{\sin^2 \omega}$$

Fiat porro $n = 6$ hoc pro termino quarto habebimus

$$\int \frac{d\omega}{\sin^6 \omega} = \frac{\cos \alpha}{6 \sin \alpha^2} - \frac{\cos \omega}{6 \sin \omega^2} + \frac{5}{6} \int \frac{d\omega}{\sin^4 \omega}$$

Simili modo, posito $n = 8$, pro termino quinto habebimus

$$\int \frac{d\omega}{\sin^8 \omega} = \frac{\cos \alpha}{8 \sin \alpha^2} - \frac{\cos \omega}{8 \sin \omega^2} + \frac{7}{8} \int \frac{d\omega}{\sin^6 \omega}$$

Uterius, vero, ponendo $n = 10$, reperietur

$$\int \frac{d\omega}{\sin^{10} \omega} = \frac{\cos \alpha}{10 \sin \alpha^2} - \frac{\cos \omega}{10 \sin \omega^2} + \frac{9}{10} \int \frac{d\omega}{\sin^8 \omega}$$

etc. etc.

§. 20. Quoniam autem nobis imprimis propositum est in tempus totius descensus, quo fit $\omega = 90^\circ$, inquirere, inuenta integralia ad hunc casum accommodata ita se habebunt:

$$\int \frac{d\omega}{\sin \omega} = \int \cot \frac{1}{2} \alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin^3 \omega} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha^2} + \frac{1}{2} \int \cot \frac{1}{2} \alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin^5 \omega} = \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha^2} + \frac{3 \cos \alpha}{2 \cdot 4 \sin^3 \alpha^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \int \cot \frac{1}{2} \alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin^7 \omega} = \frac{\cos \alpha}{6 \sin \alpha^2} + \frac{5 \cos \alpha}{4 \cdot 6 \sin^3 \alpha^2} + \frac{3 \cos \alpha}{2 \cdot 4 \cdot 6 \sin^5 \alpha^2} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \int \cot \frac{1}{2} \alpha$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin^9 \omega} = \frac{\cos \alpha}{8 \sin \alpha^2} + \frac{7 \cos \alpha}{8 \cdot 8 \sin^3 \alpha^2} + \frac{5 \cdot 7 \cos \alpha}{2 \cdot 4 \cdot 6 \sin^5 \alpha^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \alpha}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \sin^7 \alpha^2} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \int \cot \frac{1}{2} \alpha$$

etc. etc.

§. 21. Substituamus nunc singulos istos valores in-
tegrales in aequatione differentiali, quae erat

$$\frac{d\sqrt{zg}}{\sqrt{b}} = d\omega \left(\frac{1}{\sin \omega} + \frac{1 \cdot \sin \omega^2}{2 \cdot \sin \omega^3} + \frac{1 \cdot 3 \sin \omega^4}{2 \cdot 4 \sin \omega^5} + \text{etc.} \right)$$

atque integrale quaesitum per totum arcum descensus gzB
extensum erit:

$$\frac{1\sqrt{zg}}{\sqrt{b}} = \left\{ \begin{array}{l} \int \cot. \frac{1}{2} \alpha \\ + \frac{1^2}{2^2} \sin. \alpha^2 \int \cot. \frac{1}{2} \alpha + \frac{1^2}{2^2} \cos. \alpha \\ + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin. \alpha^4 \int \cot. \frac{1}{2} \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} \cos. \alpha + \frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^2 \\ + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin. \alpha^6 \int \cot. \frac{1}{2} \alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} \cos. \alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^2 \\ + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^4 \\ + \frac{1^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \sin. \alpha^8 \int \cot. \frac{1}{2} \alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} \cos. \alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^2 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^4 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cos. \alpha \sin. \alpha^6 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

vbi cum α denotet angulum valde paruum, ita vt prope-
modum fit $\cos. \alpha = 1$, secunda columna, cuius omnes ter-
mini simpliciter continent $\cos. \alpha$, prae reliquis valores no-
tabiles exhibet, dum reliqui, qui continent vel $\sin. \alpha^2$, vel
 $\sin. \alpha^4$ vel $\sin. \alpha^6$ etc. sine sensibili errore negligi possunt.

§. 22. At vero terminus $\cos. \alpha$ multiplicatus repe-
ritur per hanc seriem infinitam:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12^2} + \text{etc.}$$

ad cuius summam inuestigandam contemplemur in genere
hanc seriem:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-vv)}} = 1 + \frac{1}{2} vv + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} v^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} v^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} v^8 + \text{etc.}$$

quae diuisa per v praebet

$$\frac{1}{v\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1}{v} + \frac{1}{2} v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} v^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} v^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} v^7 + \text{etc.}$$

ex

ex hac vero ducta in dv et integrata, prodit

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = l v + \frac{1}{2} v v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} v^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} v^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} v^7 + \text{etc.}$$

unde patet, summam nostrae seriei resultare ex formula

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = l v, \text{ si post integrationem statuat} v = 1.$$

Ponamus nunc $\sqrt{1-vv} = u$ eritque $vv = 1 - uu$, hinc

$$2lv = l(1 - uu) \text{ et } \frac{dv}{v} = -\frac{u du}{1 - uu}$$

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = -\int \frac{u du}{1 - uu} = -\frac{1}{2} l \frac{1+u}{1-u} = -l(1+u) + \frac{1}{2} l(1-uu) + C.$$

Iam loco u restituatur valor $\sqrt{1-vv}$ eritque

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} = C - l(1 + \sqrt{1-vv}) + lv$$

consequenter expressio proposita erit

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{1-vv}} - lv = C - l(1 + \sqrt{1-vv})$$

quod integrale quia ita sumi debet, vt evanescat posito

$v = 0$, dabit constantem $C = l 2$; qua inuenta faciamus

$v = 1$ atque seriei nostrae

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} + \text{etc.}$$

summa nunc nobis est cognita, scilicet $= l 2$.

§. 23. Quodsi etiam termini tertiae columnae, qui

singuli continent $\cos. \alpha \sin. \alpha^2$ aliqua attentione digni videantur, id quod evenit, quando initium descensus $A g$

aliquanto longius a situ summo $A b$ accipiat: haud difficulter quoque summa seriei, quae est

investigari poterit. Cum enim iam inuenerimus

$$\frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \text{etc.}$$

investigari poterit. Cum enim iam inuenerimus

$$l 2 - l(1 + \sqrt{1-vv}) = \frac{1}{2^2} v v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} v^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} v^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} v^7 + \text{etc.}$$

diuidamus vtrinque per v , vt habeamus

$$\frac{l 2}{v} - \frac{l(1 + \sqrt{1-vv})}{v} = \frac{1}{2^2} v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} v^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} v^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} v^7 + \text{etc.}$$

quae aequatio differentiatâ, pro parte sinistra, omisso dv , praebet

$$-\frac{l^2}{vv} + \frac{l}{vv} l (1 + \sqrt{1 - vv} + \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - vv})\sqrt{1 - vv}}$$

cuius postremum membrum facile mutatur in hanc formam: $\frac{1}{vv\sqrt{1 - vv}} - \frac{l}{vv}$; ita ut iam membrum sinistrum fit

$$-\frac{1 - l^2}{vv} + \frac{l}{vv\sqrt{1 - vv}} + \frac{l}{vv} l (1 + \sqrt{1 - vv}).$$

Pro dextra autem parte habebimus

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3^2}{2 \cdot 4^2} vv + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} v^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} v^6 + \text{etc.}$$

§. 24. Pro parte sinistra scribamus simpliciter V , ut fit

$$V = \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3^2}{2 \cdot 4^2} vv + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} v^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} v^6 + \text{etc.}$$

Hic valor ductus in $\frac{dv}{v}$ et integratus praebet

$$\int \frac{V dv}{v} = \frac{1}{2^2} l v + \frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} vv + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} v^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot 8^2} v^6 + \text{etc.}$$

vnde patet summam nostrae seriei fore $= \int \frac{V dv}{v} - \frac{1}{4} l v$, si-

quidem statuatur $v = 1$. Iam quia V constat tribus par-

tibus, quarum prima est $-\frac{1 - l^2}{vv}$; secunda: $\frac{l}{vv\sqrt{1 - vv}}$ et

tertia: $\frac{l}{vv} l (1 + \sqrt{1 - vv})$; ex prima parte eruitur

$$\int -\frac{dv}{v^2} (1 + l^2) = \frac{1 + l^2}{2vv}$$

Ex secunda parte fit

$$\int \frac{dv}{v^2 \sqrt{1 - vv}} = -\frac{\sqrt{1 - vv}}{2vv} - \frac{1}{2} l (1 + \sqrt{1 - vv}) + \frac{1}{2} l v.$$

Pro parte tertia habemus $\int \frac{d^2 v}{v^3} l (1 + \sqrt{1 - vv})$, quae re-
ducta per formulam integram notissimam praebet

$$\int \frac{d^2 v}{v^3} l (1 + \sqrt{1 - vv}) = -\frac{l}{2vv} (1 + \sqrt{1 - vv}) - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2} \frac{(1 - \sqrt{1 - vv})}{\sqrt{1 - vv}}$$

Quia autem est

$$\int \frac{dv}{v^2 \sqrt{1 - vv}} = -\frac{\sqrt{1 - vv}}{2vv} - \frac{1}{2} l (1 + \sqrt{1 - vv}) + \frac{1}{2} l v$$

ex

ex hac tertia parte nascitur ista quantitas :

$$\frac{1}{2vv} l(1 + \sqrt{1 - vv}) + \frac{\sqrt{1 - vv}}{4vv} + \frac{1}{4} l(1 + \sqrt{1 - vv}) - \frac{1}{4} l v - \frac{1}{4vv}$$

His igitur partibus omnibus collectis totum membrum finitum erit

$$\frac{1}{4vv} l v - \frac{\sqrt{1 - vv}}{4vv} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv} \right) l(1 + \sqrt{1 - vv}) + C.$$

§. 25. His inventis et adiecta constante, qua tota expressio ad nihilum redigatur posito $v = 0$, habebimus

$$l v = C + \frac{1 + 2l 2}{4vv} - \frac{\sqrt{1 - vv}}{4vv} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv} \right) l(1 + \sqrt{1 - vv})$$

unde, si statuamus $v = 1$, prodit valor seriei quaesitae. Quoniam vero constans C ita debet esse comparata, ut tota expressio evanescat posito $v = 0$, insigne incommodum hic se offert, quod posito $v = 0$ omnes partes in infinitum excrescant. Nullum autem est dubium, quin singula haec infinita se mutuo destruant, quandoquidem pro C valor determinatus prodire debet. Ad hoc incommodum evitandum recurrendum est ad remedium in omnibus huiusmodi casibus usitatum, quo quantitas v non ipsi nihilo aequalis, sed infinite parva concipitur; tum enim vitique eveniet, ut omnes termini per vv divisi se sponte tollant, uti hic clarius ostendemus.

§. 26. Tribuamus igitur litterae v valorem infinite parvum, ac primo habebimus $\sqrt{1 - vv} = 1 - \frac{1}{2} vv$, unde membrum dabit $\frac{1}{4vv} + \frac{1}{4}$, demde vero erit

$$l(1 + \sqrt{1 - vv}) = l(2 - \frac{1}{2} vv) = l 2 + l(1 - \frac{1}{2} vv).$$

Est vero

$$l(1 - \frac{1}{2} vv) = -\frac{1}{2} vv$$

sicque habebimus

$$l(1 + \sqrt{1 - vv}) = l 2 - \frac{1}{2} vv$$

quibus

quibus valoribus substitutis expressio nostra hanc induet formam:

$$C + \frac{1+2l^2}{4vv} - \frac{1}{4vv} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv}\right) (l^2 - \frac{1}{4}vv)$$

ex qua, postremo membro euoluto, expressio nostra fiet $C + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}l^2$, ad nihilum redigenda; vnde prodit $C = \frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{4}$.

§. 27. Definita igitur nostra constante C debitus valor nostrae expressionis $\int \frac{v dv}{v} - \frac{1}{4}lv$ erit

$$= \frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{4} + \frac{1+2l^2}{4vv} - \frac{v^2 - vv}{4vv} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2vv}\right) l(1 + \sqrt{1 - vv})$$

quam ob rem, si hic statuamus $v = 1$, prodibit valor ipsius seriei infinitae, cuius summam quaerimus, qui ergo erit $= \frac{1}{4}l^2$; ita vt tertia columna, cuius singuli termini continent productum $\cos. \alpha \sin. \alpha^2$ abeat in hanc simplicem expressionem $\frac{1}{4} \cos. \alpha \sin. \alpha^2 l^2$.

§. 28. Simili modo inuestigare liceret summam seriei in quarta columna occurrentis; verum calculus requireretur adhuc multo magis operosus ac taediosus quam pro columna tertia, quo autem facile supersedere poterimus, cum ista columna contineat productum $\cos. \alpha \sin. \alpha^4$, quod, quia $\alpha = \frac{1}{2}\eta$, angulus vero η pro satis exiguo assumitur, ob potestatem quartam $\sin. \alpha^4$ tam paruum erit, vt tuto negligi queat. Caeterum satis probabile videtur, coefficientem huius termini pariter proditurum esse huius formae βl^2 , vbi β erit fractio minor quam $\frac{1}{4}$. Quibus obseruatis sequens problema alioquin difficillimum resolvere poterimus.

Problema.

Si pendulum, dum circa axem A oscillatur, tam ascendendo quam descendendo percurrat arcus parum a 180 gradibus deficientes, inuenire tempus cuiusque oscillationis.

Solutio.

Solutio.

§. 29. Denotet Θ tempus cuiusque oscillationis, T idem pendulum arcus tantum infinite paruos percurreret, nunc autem sit g punctum, a quo nostrum pendulum descendere incipit. Huius declinationem a sito verticali Ab ponimus $\angle A g = \eta$; tum vero fecimus $\alpha = \frac{1}{2} \eta$. Hinc primo quaeratur valor seriei

$$1 + \frac{1}{2} \sin. \alpha^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin. \alpha^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin. \alpha^6 + \text{etc.}$$

quae ob angulum α minimum vehementer conuergit, ita ut plerumque sufficiat ternos quaternosue eius terminos sumisse. Tam vero tempus unius oscillationis quaesitae, quod littera T indicauimus, erit

$$T = \Theta / \cot. \frac{1}{2} \alpha \left(1 + \frac{1}{4} \sin. \alpha^2 + \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 16} \sin. \alpha^4 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{4 \cdot 16 \cdot 36} \sin. \alpha^6 + \cos. \alpha / 2 + \frac{3}{4} \cos. \alpha^2 / 2 \right).$$

ubi meminisse oportet esse $\Theta = \frac{\pi \sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$. Manifestum autem est semissem huius temporis praebere tempus cuiusque ascensus vel descensus nostri penduli.

Exemplum.

§. 30. Si pendulum ab angulo $\angle A g = 5^\circ$ descendere incipiat, nunc quoque in sequente ascensu ad eandem altitudinem affingat, erit $\eta = 5^\circ$ ideoque $\alpha = 2^\circ, 30'$, unde habebimus $l \cos. \alpha = 9,9995865$, $l \sin. \alpha = 8.6396796$ et

$$l \sin. \alpha^2 = 7,2793592$$

$$l \sin. \alpha^4 = 4,5587184$$

$$l \sin. \alpha^6 = 1,8380776.$$

Ex his igitur computemus primam seriem, qua $l \cot. \frac{1}{2} a$ afficitur, et quae erit $= 1,0004801$.

§. 31. Quoniam istam summam in logarithmum hyperbolicum ipsius $l \cot. \frac{1}{2} a$ duci oportet, quaeramus primo logarithmum vulgarem istius cotangentis $1^{\circ}, 15'$ qui reperitur $= 1,6611437$ et in logarithmum hyperbolicum conuertitur, si multiplicetur per $2,30258509$, hicque totum primum membrum nostrae expressionis constabit his tribus factoribus:

$$1,0004801. 2,3025851. 1,6611437$$

qui per logarithmos euoluti primum membrum $l \cot. \frac{1}{2} a$ involuens praebent $= 3,82675$.

§. 32. Porro pro secundo membro notetur logarithmum hyperbolicum binarii esse $= 0,69314718$ qui ducatur in $\cos. a = \cos. 2^{\circ}, 30'$ hoc modo

$$l 0,6931472 = 9,8408253$$

$$\text{et } l \cos. a = 9,9995865$$

$$\text{summa} = 9,8404118 = l \text{ membr. II.}$$

sicque erit ipsum membrum secundum $= 0,69249$. Hoc deinde secundum membrum, si ducatur in $\frac{2}{7} \sin. a^2$, dabit membrum tertium, quod ergo ita reperitur:

$l \text{ membr.}$

$$\begin{aligned} l \text{ membr. II.} &= 9,8404118 \\ l \frac{1}{2} &= 9,8750613 \\ l \sin. \alpha^2 &= 7,2793592 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \text{ membr. III.} &= 6,9948323 \text{ ergo} \\ \text{membr. III.} &= 0,00099 \end{aligned}$$

ex quo quia ne vnicam quidem partem millesimam efficit, manifestum est sequentia membra tuto omitti posse.

§. 33. His igitur partibus collectis tempus vnus integræ oscillationis prodibit $T = 4,52023 \Theta$; vnde si istud pendulum oscillationis suas infinite paruas singulis minutis secundis absoluat, pro eodem pendulo, dum motu suo arcum 350 grad. percurrit, tempus cuiusque oscillationis erit circiter $4\frac{1}{2}$ secund. Quodsi pendulum arcus adhuc maiores et propius ad totam circuli peripheriam accedentes absoluat, tempora oscillationum vehementer insuper augebuntur, dum pro tota peripheria, siue 360 grad. tempus adeo in infinitum excrescit: vnde adhuc vnum exemplum euoluamus, quo talis arcus descriptus duobus tantum gradibus a peripheria deficit.

Exemplum.

§. 34. Si pendulum ab angulo $bAg = 1^\circ$ descendere incipiat, ideoque in sequente ascensu ad eandem altitudinem affurgat, erit $\eta = 1^\circ$ ideoque $\alpha = 30'$; inde habebimus $l \cos. 30' = 9,9999835$ et $l \sin. \alpha = 7,9408419$, vnde colligimus $l \sin. \alpha^2 = 5,8816838$; $\sin. \alpha^2 = 1,7633676$. Ex his igitur computemus primam seriem $l \cot. \frac{1}{2} \alpha$ innotentem, quæ erit $= 1,00001904$.

§. 35. Quoniam istam summam in logarithmum hyperbolicum ipsius $\cot. \frac{1}{2} \alpha$ duci oportet, quaeramus primo logarithmum vulgarem ipsius $\cot. 15'$ qui reperitur $= 2,3601799$, qui in logarithmum hyperbolicum conuertitur, si multiplicetur per $2,30258509$ sicque totum primum membrum nostrae expressionis constabit his partibus $1,00001904. 2,3601799. 2,30258509$ quae per logarithmos hunc in modum euoluuntur:

$$\begin{aligned} l 1,00001904 &= 0,0000082 \\ l 2,30258509 &= 0,3622157 \\ l 2,3601799 &= 0,3729452 \\ \hline l \text{ membr. I.} &= 0,7351691 \\ \text{ergo membrum I.} &= 5,43461. \end{aligned}$$

§. 36. Porro pro secundo membro logarithmus hyperbolicus binarii ducatur in $\cot. \alpha$ hoc modo

$$\begin{aligned} l 0,6931472 &= 9,8408253 \\ l \cot. \alpha &= 9,9999835 \\ \hline l \text{ membri II.} &= 9,8408088 \\ \text{ergo membrum II.} &= 0,69312. \end{aligned}$$

Hoc membrum secundum si ducatur in $\frac{3}{4} \sin. \alpha^2$ dabit membrum tertium, quod ergo ita reperietur

$$\begin{aligned} l \text{ membr. II.} &= 9,8408088 \\ l \frac{3}{4} &= 9,8750613 \\ l \sin. \alpha^2 &= 5,8816838 \\ \hline l \text{ membri III.} &= 5,5975539 \\ \text{ergo membrum III.} &= 0,00004. \end{aligned}$$

His

Hinc patet, quo minor accipiatur angulus α tempus unius oscillationis non solum fieri maius, sed etiam minori opera assignari posse, cum contra, quo maior fuerit angulus α , investigatio temporis multo maiorem laborem requirat. Quin etiam, si angulus α tantus accipiatur, ut termini $\sin. \alpha^6$ involuentes non amplius negligi queant, ope huius methodi tempus ne quidem accurate assignare posset, propterea quod summae serierum quartae et sequentium columnarum nimis intricatos calculos postulerent; neque vllum artificium Analyticum adhuc est inuentum, quo labor iste subleuari posset. Huiusmodi autem casibus series in ipsa dissertazione tradita negotium multo commodius conficiet: quoniam enim tum angulus $\zeta = 180 - \eta$ iam ita erit comparatus, ut quantitas

$$c = \sin. \frac{1}{2} \zeta = \cos. \frac{1}{2} \eta$$

fatis notabiliter ab unitate deficiat, series ibi inuenta

$$1 + \frac{1^2}{2^2} c c + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} c^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} c^6 + \text{etc.}$$

fatis conuerget, ita ut eius summa, pluribus terminis actu inuicem addendis, satis exacte assignari possit, quae deinde ducta in Θ tempus unius oscillationis indicabit.

§. 38. Caeterum hoc additamentum circa oscillationes ampliffimas, ubi totus arcus a pendulo descriptus propemodum ad totam circuli peripheriam augetur, eo maiori

studio pertractare est visum, quod omnes, qui pendulorum motus sunt perscrutati, istum casum plane non attigerunt. Interim tamen est manifestum, istum casum summam attentionem mereri, propterea quod sine singularibus artificiis, tam in ipso calculo, quam integrationibus peragendis resolutionem nullo modo expectare liceat, tum vero etiam serierum quartae columnae et sequentium resolutio, quam hic praetermittere sumus coacti, Geometris ansam praebere poterit, istam egregiam partem Analyseos ulterius promouendi.