DE INFINITIES INFINITIS GRADIBVS TAM INFINITE MAGNORVM QVAM INFINITE PARVORVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Si x denotet quantitatem infinite magnam, tum ista progressio geometrica $1, x, xx, x^3, x^4, x^5$, etc. ita est comparata, vt quilibet terminus sit infinities maior praecedente, at vero infinities minor sequente. Vnde si potestatem x^{1000} tanquam vltimum terminum huius progressionis spectemus, inter terminum primum 1 et eum statui poterunt mille gradus diuersi infinite magnorum, vbi quidem ad eundem gradum referimus omnes quantitates finitam rationem inter se tenentes. Neque tamen iste numerus millenarius omnes gradus intermedios inter 1 et x^{1000} exhibet; vbi obseruandum, quae hic de numero determinato 1000 dicuntur, de quolibet alio numero, quantumuis magno, esse intelligenda.

§. 2. Plurimum abest, vti modo diximus, vt illa progressione omnes gradus intermedii inter 1 et x^{1000}, qui quidem sint diuersi, repraesententur. Si enim ponamus $z = y^{1000}$ vt sit

$y =$

$y = \sqrt[1000]{x}$, ob x quantitatem infinitam etiamnunc y erit quantitas infinita; vnde fequitur, quia inter 1 et y^{1000} denuo mille gradus intermedii affignari poffunt, quorum quilibet pariter infinities maior eft quam praecedens, infinities vero minor quam fequens, etiam inter vnitatem et x denuo mille gradus intermedios conftitui poffe, etiamfi ante x fuiffet primus gradus infiniti. Simili vero modo etiam inter praecedentem gradum primum x et fecundum xx iterum mille gradus intermedii conftitui posfunt, atque adeo inter binos quosuis gradus proximos, qui omnes ita funt comparati, vt quilibet fit infinities maior quam praecedens, infinities vero minor quam fequens.

§. 3. Neque vero hic fubfiftere cogimur. Cum enim fit y quantitas infinite magna, fi ponamus $y = z^{1000}$, etiamnunc z erit quantitas infinite magna; vnde intelligitur, inter 1 et z^{1000}, hoc eft, inter 1 et y, denuo mille gradus intermedios infinitorum conftitui poffe, atque hoc modo vlterius progredi licet, quousque libuerit, ita vt numerus omnium graduum diuerforum reuera in infinitum augeri poffit.

§. 4. Haec eadem quoque inuerfo modo valent de infinite paruis. Si enim x denotet quantitatem infinite paruam huius progreffionis geometricae: $1, x, xx, x^3 \ldots x^{1000}$, quilibet terminus infinities minor eft quam praecedens, at vero infinities maior quam fequens, hincque inter 1 et x^{1000} adipifcimur mille gradus intermedios infinite paruorum, omnes diuerfos; quandoquidem quilibet infinities minor eft praecedente, infinities vero maior fequente.

§. 5.

§. 5. Quod ſi iam vlterius ponamus $x = y^{1000}$, vt ſit $y = \sqrt[1000]{x}$, etiamnunc y erit quantitas infinite parua; vnde patet inter 1 et y^{1000}, hoc eſt inter 1 et x, denuo mille gradus infinite paruorum intermedios conſtitui poſſe, quod etiam fieri poterit inter x et xx, ſimilique modo inter xx et x^3, atque in genere inter binos quosuis proximos praecedentis ſeriei; et quia, poſito vlterius $y = z^{1000}$, etiamnunc z eſt quantitas infinite parua, numerus graduum diuerſorum denuo millies euadet maior, quae multiplicatio vlterius ſine fine continuari poterit.

§. 6. Haec quidem, quae ex conſideratione poteſtatum ſunt deducta, in vulgus ſunt notiſſima, atque adeo ad Algebram communem referri poſſunt; verum Analyſis ſublimior praeterea ſuppeditat innumerabiles alios gradus tam infinite magnorum quam paruorum, quae nullo modo in vllo eorum graduum, quos modo commemorauimus, quantumuis etiam multiplicentur, comprehendi poſſunt, ſed perpetuo vel infinities maiores, vel minores deprehenduntur quam vllus graduum praecedentium, quod cum nusquam ſatis clare explicatum eſſe memini, operae pretium erit hic fuſius perpendiſſe.

§. 7. Tales autem quantitates in Analyſi ſublimiori occurrentes ad duas claſſes referri poſſunt, quarum altera complectitur logarithmos, altera vero quantitates exponentiales. De logarithmis igitur primum agamus, ac denotante x numerum infinite magnum conſtat quoque eius logarithmum eſſe infinite magnum. Perinde autem hic eſt, quonam canone logarithmorum vti velimus, ſiue communibus, ſiue hyperbolicis, ſiue quouis alio genere.

§. 8.

§. 8. Quando autem x eſt numerus infinite magnus, per ſe ſatis clarum eſt, eius logarithmum, hoc eſt $l\,x$, infinitum quidem, attamen infinities eſſe minorem ipſo numero x, quam ob rem ad gradum quempiam inferiorem referri debebit. Quoniam igitur gradus ipſo x inferiores per $x^{\frac{1}{n}}$ repraeſentari poſſunt, denotante ſcilicet n numerum quantumuis magnum, haud difficulter oſtendi poteſt, ſemper eſſe $l\,x$ infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro n accipiatur.

§. 9. Sequenti autem modo demonſtrare licet, ſemper $x^{\frac{1}{n}}$ infinities maius eſſe quam $l\,x$, ſiquidem $x = \infty$, ſiue valorem huius fractionis $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$ ſemper eſſe infinite magnum. Statuatur enim iſte valor $= v$, vt ſit $v = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$, ac ponatur $p = \frac{1}{l\,x}$ et $q = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, eritque $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator p quam denominator q fit $= 0$ caſu $x = \infty$; quam ob rem ſecundum regulam notiſſimam erit quoque $v = \frac{d\,p}{d\,q}$. Cum igitur ſit $d\,p = -\frac{d\,x}{x\,(l\,x)^2}$ et $d\,q = \frac{-d\,x}{n\,x^{\frac{1}{n}+1}}$ erit $v = \frac{n\,x^{\frac{1}{n}}}{(l\,x)^2}$, quem ergo valorem praecedenti $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$ aequalem eſſe oportet. At vero ſumtis quadratis ex praecedente fit $v\,v = \frac{x^{\frac{2}{n}}}{(l\,x)^2}$, qui valor per

 poſteri-

posteriorem diuisus praebet $v = n x^{\frac{1}{n}}$, qui cum manifesto sit infinitus, etiam patet esse $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l x}$ quantitatem infinite magnam, siue semper esse $l x$ quantitatem infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro n accipiatur.

§. 10. Hinc igitur manifestum est, si fuerit $x = \infty$, tum eius logarithmum $l x$ ad nullum gradum superiorum infinitorum referri posse, quantumuis etiam illi gradus per continuam multiplicationem coarctentur. Quam ob rem hic constitui debebit nouus plane gradus infiniti, classificationi logarithmi $l x$ conueniens, ad quem scilicet potestas $x^{\frac{1}{n}}$ continuo propius accedat, quo maior statuatur numerus n. Neque tamen idcirco casus quo $n = \infty$ satisfacit, quia ob $\frac{1}{n} = 0$ foret $x^{\frac{1}{n}} = 1$, cum tamen $l x$ sit infinitus; verum probe notandum est, demonstrationem ante allatam praebuisse $n x^{\frac{1}{n}}$, vnde sumto etiam $n = \infty$ nihilominus prodit $v = n$, ideoque adhuc infinitum.

§. 11. Cum igitur $l x$ constituat quasi gradum infimum omnium quantitatum infinite magnarum, euidens est, hinc numerum graduum supra constitutorum, qui iam erat infinitus, insuper in infinitum augeri debere. Si enim contemplemur gradum quemcunque potestate x^{α} designatum, manifestum est, hanc formulam: $x^{\alpha} l x$, infinities esse maiorem quam x^{α}; statim vero atque exponens α fractione quam minima $\frac{1}{n}$ augetur, tum certe formula $x^{\alpha} l x$ infinities

nities erit minor quam $x^{\alpha+\frac{1}{n}}$, ideoque necessario inter gradus x^{α} et $x^{\frac{1}{n}}$ constitui debebit.

§. 12. Verum hoc modo neutiquam adhuc multitudo omnium graduum diuersorum exhauritur. Etsi enim $(lx)^2$ sit infinities maior, quam lx, ideoque peculiarem gradum constituere debeat: tamen adhuc infinities minor est quam potestas $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam numerus n augeatur. Simili porro modo omnes diuersae potestates ipsius lx peculiares prorsus praebent casus infinitorum, id quod adeo ad exponentes fractos est extendendum, cum $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ certe infinities maior sit quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, attamen infinities minor quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$, ideoque peculiarem gradum constituere debeat. Totidem vero etiam noui Casus exsurgent, si insuper per potestatem quamcunque ipsius x multiplicemus: scilicet formula $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ infinities maior quam $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, interim tamen infinities minor est quam $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$.

§. 13. Neque vero adhuc hoc modo omnes gradus infinitorum enumerari possunt. Quia enim lx est quantitas infinite magna, etiamnunc eius logarithmus llx erit infinitus, etiamsi infinities minor quam lx; vnde patet, ex hac formula: llx, eiusque potestatibus $(llx)^{\frac{\alpha}{\epsilon}}$ insuper infinitos nouos gradus infinitorum statui debere, imprimis si haec formula non solum cum pote-

statibus

ſtatibus ipſius lx ſed etiam cum poteſtatibus ipſius x combinetur; haecque conſideratio adeo vlterius ad formulas llx, $lllx$, etc. extendi poterit.

§. 14. Immenſa haec graduum multitudo etiam locum habet in infinite paruis, quippe quae ſpectari poſſunt vt reciproca infinite magnorum, quoniam quodlibet infinitum ∞, ſi vnitas per id diuidatur, ſcilicet $\frac{1}{\infty}$, peculiarem gradum infinite parui conſtituere cenſeri debet. Ita ſi x ſit quantitas infinita, non ſolum haec ſeries: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; etc. infinitos gradus infinite paruorum ſuppeditat, ſed etiam haec ſeries: $\frac{1}{lx}$; $\frac{1}{(lx)^2}$; $\frac{1}{(lx)^3}$; $\frac{1}{(lx)^4}$; etc. vna cum omnibus poteſtatibus ſingulorum terminorum nouos gradus infinite paruorum praebet; tum vero etiam ſeries $\frac{1}{llx}$; $\frac{1}{(llx)^2}$; $\frac{1}{(llx)^3}$; etc. atque adeo omnes ſequentes, vbi ſignum logarithmi vlterius multiplicatur, hanc multitudinem in immenſum adaugent.

§. 15. Quae hactenus de logarithmis ſunt tradita ſimili modo extendi poſſunt ad quantitates exponentiales, vnde pariter innumerabiles noui gradus tam infinite magnorum quam infinite paruorum conſtitui poſſunt, qui a praecedentibus prorſus erunt diuerſi. Si enim vt hactenus x denotet numerum infinitum, notum eſt valorem poteſtatis a^x etiam eſſe infinite magnum, quoties ſcilicet numerus a vnitatem ſuperauerit; ſin autem fuerit $a < 1$, eandem poteſtatem a^x exhibere quantitatem infinite paruam. Conſideremus autem primo infinite magna, ſumendo $a > 1$, atque

atque

atque manifestum est potestatem a^x infinities non solum superare ipsum exponentem, verum adeo demonstrari potest, semper fore a^x quantitatem infinities maiorem quam potestatem x^n, quantumuis magnus etiam fuerit exponens n. Demonstratio autem sequenti modo se habet.

§. 16. Ponatur $\frac{a^x}{x^n} = v$, sitque $p = \frac{1}{x^n}$ et $q = \frac{1}{a^x}$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator p quam denominator q casu $x = \infty$ euanescit, sicque erit etiam $v = \frac{dp}{dq}$. Est vero $dp = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}}$ et $dq = -\frac{dx\,la}{a^x}$, vnde fit $v = \frac{n\,a^x}{x^{n+1}\,la}$, quae quidem formula multo magis est complicata quam ipsa proposita $v = \frac{a^x}{x^n}$, ita vt hinc nihil concludi posse videatur. Interim tamen ex harum formularum comparatione verus valor ipsius v concludi poterit. Cum enim ex priore sit $v^{n+1} = \frac{a^{x(n+1)}}{x^{n(n+1)}}$, ex posteriore vero $v^n = \frac{n^n\,a^{nx}}{x^{n(n+1)}\,(la)^n}$, prior valor per posteriorem diuisus dabit $v = \frac{a^x\,(la)^n}{n^n}$, qui valor manifesto est infinitus. Sicque demonstratum est, formulam a^x semper esse infinities maiorem quam x^n, quatumuis etiam magnus capiatur exponens n, dummodo fuerit $a > 1$. Hinc igitur

tur patet, quantitatem exponentialem a^x omnes gradus infinitorum ex poteſtate x^n oriundorum infinities ſuperare. Hinc, quamquam x eſt quantitas infinita, tamen omnes iſtae fractiones: $\frac{a^x}{x}$; $\frac{a^x}{xx}$; $\frac{a^x}{x^3}$; et in genere $\frac{a^x}{x^n}$ ad tantum gradum infiniti exſurgunt, vt omnes gradus infinitorum primae claſſis excedant. Manifeſtum autem eſt haec eadem valere de formulis $a^{\alpha x}$, dummodo fuerit $\alpha > 0$; atque adeo etiam valet de formulis $a^{\alpha x^\beta}$, ſi modo literis α et β valores poſitiui tribuantur; quae ergo infinita infinities ſunt altiora quam poteſtates ipſius x, quantumuis fuerint magnae.

§. 17. Praeterea etiam notandum eſt, etiamſi formula a^x ad gradum infiniti infinite alti pertineat: tamen, ſimul ac valor litterae a quam minime augeatur, valorem huius formulae adhuc infinities euadere altiorem. Si enim fuerit $b > a$, tum formula a^x ſe habebit ad formulam b^x, vt 1 ad $(\frac{b}{a})^x$, hoc eſt, vt 1 ad infinitum infiniteſimi gradus.

§. 18. Quando autem $a > 1$, tum omnes huiusmodi poteſtates a^x reuocari poſſunt ad poteſtates numeri fixi e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, cum ſit $a^x = e^{x\,la}$; ſicque omnia huius generis infinita repraeſentari poterunt ſub hac forma $e^{\alpha x^\beta}$, exiſtente $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; tum vero etiamnunc iſta formula $\frac{e^{\alpha x^\beta}}{x^n}$ ad gradum infi-

niteſi-

nitesimum infinitorum referri debebit. Multo magis etiam hi gradus infinitesimi in infinitum elenari poterunt, si loco αx^{ϵ} scribamus $e^{\alpha x^{\epsilon}}$, quo pacto peruenietur ad hanc formam: $e^{e^{\alpha x^{\beta}}}$; haecque augmentatio vlterius sine fine continuari poterit.

§. 19. Omnia haec inuerso modo ad infinite parua transferri possunt, quae iam aliquanto accuratius perpendamus. Denotet igitur litera x quantitatem infinite paruam, cuius ergo potestates singulae x^{α} innumeros gradus infinite paruorum suppeditant, quoniam aucto vel minimum exponente α formula euadit infinities minor. Hos autem gradus omnes sub prima classe infinite paruorum complectamur, si modo exponenti α omnes valores positiui tribui intelligantur.

§. 20. Ad secundam vero classem referamus ea infinite parua, quae ex logarithmis nascuntur. Quoniam enim $l\frac{1}{x}$ est infinitus, eius reciprocum $\frac{1}{l\frac{1}{x}}$ erit infinite paruum. Ponamus autem commoditatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, vt ista forma fiat $\frac{1}{u}$, quae erit tale infinite paruum, quod omnia infinite parua primae classis infinities superat. Ad hanc classem quoque pertinebunt formulae $\frac{1}{uu}$; $\frac{1}{u^3}$; $\frac{1}{u^4}$ etc. et in genere $\frac{1}{u^{\alpha}}$. Tum vero etiam huc referendae erunt

formae

formae $\frac{x^{\alpha}}{u^{\epsilon}}$, quae quasi mixtae sunt ex prima et secunda classe. Praeterea vero, quia adhuc est $l\,u$ infinite magnum, sed infinities minor quam u, eius reciprocum $\frac{1}{l\,u}$ erit infinite paruum, sed infinities maius quam $\frac{1}{u}$. Simili modo hae formulae: $\frac{1}{l.\,l.\,u}$ et $\frac{1}{l.\,l.\,l.\,u}$ erunt infinite parua continuo infinities maiora praecedentibus; vnde ergo per compositionem cum superioribus innumerabiles noui gradus infinite paruorum constitui poterunt, quos enumerare nequaquam licet.

§. 21. In hoc genere autem imprimis notari debet, quod, etiamsi $u = l\frac{1}{x}$ sit infinite magnum, tamen producta $x^n\,u$ omnia esse infinite parua, si modo fuerit $n > o$. Etsi hoc ex praecedentibus sequatur, tamen ita succincte demonstrari potest. Ponatur $x^n\,u = v$, sitque $x^n = p$ et $\frac{1}{u} = q$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator quam denominator euanescit casu $x = 0$, vnde quoque erit $v = \frac{dp}{dq}$. Est vero $d\,p = n\,x^{n-1}\,d\,x$, et quia $u = l\frac{1}{x}$, siue $u = -l\,x$, erit $d\,u = -\frac{d\,x}{x}$, ideoque $d\,q = \frac{d\,x}{x\,u\,u}$, vnde fit $v = n\,x^n\,u\,u$. Quare cum ex priore valore fit $v\,v = x^{2n}\,u\,u$, hic per modo inuentum diuisus dat $v = \frac{x^n}{n}$; vnde patet valorem ipsius v esse infinite paruum, id quod etiam valebit de formula $x^n\,u^{\alpha}$, hocque non solum quando α est numerus positiuus, sed etiam quando do eſt negatiuus, cum formula $\frac{x^n}{u^m}$ per ſe ſit infinite parua.

§. 22. Praeter has autem duas claſſes infinite paruorum quantitates exponentiales tertiam nobis praebebunt claſſem. Cum enim ob $x = 0$ formula $e^{\frac{1}{x}}$ praebeat infinite magnum quaſi ſupremi ordinis, eius reciprocum $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{1}{x}}$ dabit infinite paruum etiam ſupremi ordinis, quod ſcilicet infinities erit minus quam vllum infinite paruum primae claſſis, id quod etiam tenendum eſt de formula generali $\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}}$. Ponamus autem breuitatis gratia $e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v$, vt haec infinite parua comprehendi queant in hac forma $\frac{1}{v}$. Cum igitur hinc ſit $l\,v = \frac{\alpha}{x^\beta}$, erit differentiando,

$$\frac{d\,v}{v} = -\frac{\alpha\beta\,d\,x}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } d\,v = -\frac{\alpha\beta\,v\,d\,x}{x^{\beta+1}}.$$

Praeterea vero hic imprimis notandum eſt, etiamſi x ſit quantitas euaneſcens, tamen has formulas $\frac{1}{x^n\,v}$ etiamnunc exprimere infinite parua ſupremi ordinis.

§. 23. His iam claſſibus conſtitutis inſignia ſubſidia tam pro differentiatione quam integratione talium infinite paruorum reperiri poſſunt, quemadmodum enim, ſi pro prima claſſe ponatur $a\,x^\alpha = y$ fit $\frac{d\,y}{d\,x} = \alpha\,a\,x^{\alpha-1}$ et

$\int y\,dx = \frac{a}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$, patet, hoc integrale infinities minus esse quam y, dum contra differentiale $\frac{dy}{dx}$ infinities est maius, atque adeo fieri queat infinite magnum, si $\alpha < 1$; id quod etiam de infinite paruis reliquarum classium est intelligendum.

§. 24. Consideremus nunc infinite paruum secundae classis, ac posito $l\frac{1}{x} = u$, vt sit $du = -\frac{dx}{x}$, statuamus $y = a\,x^{\alpha}u^{m}$, vbi sit $\alpha > 0$, m vero numerus siue positiuus, siue negatiuus, siquidem vtroque casu haec formula est infinite parua. Hinc igitur fiet

$\frac{dy}{dx} = \alpha a\,x^{\alpha-1}u^{m} - a m\,x^{\alpha-1}u^{m-1} = a\,x^{\alpha-1}u^{m-1}(\alpha u - m)$, quia autem u est infinitum, reiecto termino posteriore $-m$ erit $\frac{dy}{dx} = \alpha a\,x^{\alpha-1}u^{m}$, vnde per dx multiplicando et integrando fit $\int \alpha a\,x^{\alpha-1}u^{m}\,dx = y = a\,x^{\alpha}u^{m}$, vnde hanc nanciscimur integrationem satis memorabilem:

$\int x^{\alpha-1}u^{m}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,x^{\alpha}u^{m}$, siue loco $\alpha - 1$ scribendo $\mathfrak{6}$ erit

$$\int x^{\mathfrak{6}}u^{m}\,dx = \frac{1}{\mathfrak{6}+1}\,x^{\mathfrak{6}+1}u^{m}.$$

§. 25. Hinc ergo si concipiamus lineam curuam, cuius abscissae x respondeat applicata $y = a\,x^{\mathfrak{6}}u^{m}$, vbi sit $\mathfrak{6} > 1$, et exponens m siue positiuus siue negatiuus, huius curuae applicata in ipso initio, vbi $x = 0$, euanescet, area vero huius curuae abscissae x infinite paruae respondens erit

erit $\int y\,dx = \frac{a}{\beta+1} x^{\beta+1} u^m = \frac{1}{\beta+1} xy$: aequabitur ſcilicet rectangulo ex abſciſſa x in applicatam y, diuiſo per $\beta+1$, quod eo magis eſt memorabile, quia formula $x^\beta u^m dx$ nullo modo integrari poteſt, praeter caſus pauciſſimos, quibus exponens m eſt numerus integer poſitiuus.

§. 26. Conſideremus nunc quoque infinite parua tertiae claſſis, ac ponamus breuitatis gratia vt ſupra

$$e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v, \text{ vt ſit } dv = -\frac{\alpha\beta v\,dx}{x^{\beta+1}},$$

eritque, vt vidimus, haec formula $\frac{x^m}{v}$ ſemper quantitas infinite parua, ſiue exponens m fuerit poſitiuus, ſiue negatiuus. Quodſi ergo ponatur $\frac{x^m}{v} = z$, erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m x^{m-1} + \alpha\beta x^{m-\beta-1}}{v} = \frac{x^{m-\beta-1}}{v}(m x^\beta + \alpha\beta)$$

vbi quia $m x^\beta$ euaneſcit prae $\alpha\beta$ erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha\beta x^{m-\beta-1}}{v}$$

vnde viciſſim integrando erit

$$z = \alpha\beta \int \frac{x^{m-\beta-1}\,dx}{v} = \frac{x^m}{v},$$

ideoque ſi loco $m-\beta-1$ ſcribamus n, ita vt n ſit numerus quicunque ſiue poſitiuus ſiue negatiuus, ſemper erit

$$\int \frac{x^n\,dx}{v} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{x^{n+\beta+1}}{v},$$

quae integratio vera eſt, quamdiu x eſt infinite paruum,

cum

cum tamen formula differentialis omnem integrationem respuat.

§. 27. Quodsi ergo linea curua concipiatur, cuius abscissae x respondeat applicata $y = \frac{a x^n}{v}$, existente $v = e^{\frac{\alpha}{x^{\beta}}}$, vbi α et β sint numeri positiui, exponens vero n quicunque siue positiuus siue negatiuus, applicata huius curuae in ipso initio vbi $x = 0$ etiam euanescet, huius vero curuae area abscissae x infinite paruae respondens erit

$$\int y\, d x = \frac{a}{\alpha \beta} \frac{x^{n+\beta+1}}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} x^{\beta+1} y,$$ hinc ergo si fuerit $y = \frac{a x^n}{e^{\frac{1}{x}}}$, vbi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ erit $\int y\, d x = x x y$. Hoc est area curuae aequabitur rectangulo ex quadrato abscissae in applicatam.

§. 28. Quodsi iam vicissim quaeramus curuam cuius area in genere debeat esse $\int y\, d x = x x y$, peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $y\, d x = 2 x y\, d x + x x\, d y$ vnde fit

$$\frac{d y}{y} = \frac{d x (1 - 2 x)}{x x}$$

denique integrando

$$l\, y = - \tfrac{1}{x} - 2\, l\, x,$$ atque ad numeros surgendo

$$y = \frac{a}{x x e^{\frac{1}{x}}},$$ quae in forma proposita continetur,

si cafi capiatur $n = -2$, at vero fuperior integratio locum habet quando x infinite paruum.

§. 29. Poftrema autem integratio etiam valet, fi quantitas infinite parua infuper claffem fecundam vtcunque inuoluat. Pofito enim $l\frac{1}{x} = u$, fi ftatuamus $z = \frac{a.x^m.u^n}{v}$ (vbi exponentes m et n tam negatiue quam pofitiue accipi poffunt, quandoquidem haec quantitas femper eft infinite parua, dummodo fuerit $v = e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}$) atque vt valorem $\frac{dz}{dx}$ facilius eruamus, fumamus logarithmos, erit

$$lz = la + mlx + nlu - lv \text{ ideoque}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{m\,dx}{x} + \frac{n\,du}{u} - \frac{dv}{v}. \text{ Quia vero eft}$$

$$du = -\frac{dx}{x} \text{ et } dv = -\frac{\alpha\beta\,dx}{x^{\beta+1}}\,v$$

binis his valoribus in fuperiore expreffione fubftitutis ea fequentem induet formam:

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{m}{x} - \frac{n}{ux} + \frac{\alpha\beta}{x^{\beta+1}},$$

vbi cum fit $\beta + 1 > 1$, ambo termini priores prae tertio euanefcunt, ficque erit concinnius

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{\alpha\beta}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dz = \frac{a\alpha\beta x^{n-\beta-1}u^m}{v}\,dx.$$

§. 30. Quodfi iam hic loco $n - \beta - 1$ fcribamus k, ita vt k aeque ac m denotent numeros quofcunque tam

pofitipoſitiuos quam negatiuos, ob $n = k + \beta + 1$ ſemper erit

$$\frac{\int x^k u^m dx}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} \cdot \frac{x^{k+\beta+1} u^m}{v}$$

ideoque ſi fuerit $\frac{x^k u^m}{v} = y$, et y ſpectetur vt applicata curuae, eius area erit

$$\int y\, dx = \frac{1}{\alpha \beta} y x^{\beta+1},$$

quamdiu ſcilicet fuerit x infinite paruum, quod eo magis eſt notatu dignum, quia nulla adhuc via inuenta eſt huiusmodi integrationes inſtituendi.