DETERMINATIO ONERVM, QVAE COLVMNAE GESTARE VALENT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo XIII. Actorum Academiae Berolinensis exhibui commentationem de vi columnarum; vbi ex principio prorsus singulari, quod ab hoc argumento penitus alienum videatur, determinaui quantitatem oneris, quod data quaeuis columna sustinere valeat, quin rumpatur. Ista determinatio mihi ob hanc causam non solum prorsus noua, sed etiam maxime memorabilis est visa, quandoquidem in gestatione onerum vera natura columnarum constitui debet, idque eo magis, quod vulgo ab Auctoribus, qui doctrinam de columnis tractauerunt, hoc argumentum penitus negligi solet, dum potissimum in describendis ordinibus et ornamentis columnarum sunt occupati. Quin etiam Scriptores physici, qui tenacitatem et cohaesionem corporum solidorum sunt perscrutati, experimenta quidem instituerunt circa vires, quas exiguae columnae sustinere valeant, neque vero in legem et proportionem inquisiuerunt, quam quantitas

oneris ſuſtinendi, tam ratione craſſitiei, quam altitudinis ſequatur.

§. 2. Non parum igitur ſum miratus, cum nuper celeberrimam Encyclopediam Gallicam euoluerem, quod ſub titulo columnarum diſertis verbis ipſa mea proportio, quaſi in vulgus cognita, in medium profertur, ſecundum quam onera, quae columnae cylindricae eiusdem diametri geſtare valent, rationem reciprocam duplicatam altitudinum tenere perhibentur; ita vt columna duplo altior quartam tantum partem oneris ſuſtinere queat; neque vero vllus auctor allegatur, qui hanc proportionem ſiue ex experimentis concluſerit, ſiue per theoriam confirmauerit.

§. 3. Quando autem quaeritur, quantum onus O data quaeuis columna A B C D pro ratione altitudinis et craſſitiei geſtare valeat, quaeſtio ſine dubio maxime eſt ardua; neque enim video, quomodo ea ex cognitis principiis, circa ſoliditatem corporum ſtabilitis, reſolui poſſit. Quoniam enim onus O perpendiculariter deorſum premit, nulla prorſus vis adeſſe videtur, quae columnam rumpere tendat, quantumuis etiam magnum fuerit onus; propterea quod nulla ratio deprehenditur, cur columna potius verſus vnam regionem, quam quamuis aliam inflectatur et frangatur. Interim tamen experientia ſatis declarat, tale onus non vltra certos limites augeri poſſe, atque adeo in natura nunquam cauſae deſunt, quae rupturam in vnam plagam potius, quam omnes alias producant. Neque tamen a quoquam Auctore eiusmodi principia ſtabilita eſſe reperio, vnde ſolutionem huius quaeſtionis petere liceat.

Tab. II. Fig. 1.

§. 4.

§. 4. Quin etiam ipſe praeter omnem expectationem ad enodationem huius quaeſtionis ſum perductus, cum olim incuruationem laminarum elaſticarum, quae ipſis a viribus quibuscunque inducatur, inueſtigarem. Cum enim laminam elaſticam A C B eſſem contemplatus, quae tenſione chordae A B in ſtatum incuruatum A C B fuerit reducta, et pro quouis gradu incuruationis quantitatem tenſionis chordae eſſem perſcrutatus, non ſine admiratione inveni, incuruationem adeo infinite paruam iam tenſionem finitam poſtulare, ita vt, quamdiu chorda A B, vtrique termino laminae elaſticae alligata, vi quacunque minore intendatur, laminam nullam plane inflexionem, ne infinite quidem paruam, eſſe paſſuram, cum tamen eidem laminae A C B, parieti in B infixae, etiam a minima vi A α quaedam incuruatio inducatur. Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

§. 5. Quanquam autem columna maxime diſcrepat a lamina elaſtica, tamen in hoc egregie conueniunt, quod columna a pondere incumbente rumpi nequeat, niſi ipſi ante vel minima quaedam inflexio inducatur. Quoniam igitur pondus incumbens ſimili modo in columnam agit, quo lamina elaſtica A C B (Fig. 2.) a chorda A B ſollicitatur, euidens eſt, etiam columnae ne minimam quidem inflexionem induci poſſe, niſi pondus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit. Conſideremus enim columnam A B C D, cui ab incumbente pondere iam inflexio infinite parua ſit inducta, qua eius axis curuaturam infinite paruam O V P acceperit, ita vt recta O P ſit verticalis, et quoniam onus incumbens ſecundum hanc ipſam directionem O P vrget, eandem vim manifeſto exerit, ac ſi chorda recta O P pari vi ſe contrahere anniteretur; ex Fig. 4.

quo ſimilitudo cum lamina elaſtica ſupra conſiderata manifeſto elucet, ſimulque intelligitur, columnam talem inflexionem, etiamſi infinite paruam, recipere non poſſe, niſi onus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit, atque hic ipſe limes nobis maximum onus indicat, quod columna ſuſtinere valebit.

§. 6. Quemadmodum autem quaeuis incuruatio, quae laminae elaſticae induci debet, certam requirit vim, ita etiam facile intelligitur, certam quandam vim requiri, quae columnae noſtrae incuruationem inducere valeat, quandoquidem ea tam ob ſoliditatem quam cohaeſionem partium omni incuruationi reſiſtit, quae reſiſtentia ſine dubio eo maior eſt cenſenda, quo craſſior fuerit ipſa columna et quo maior ſimul fuerit incuruatio. Ad talem effectum explicandum in calculum introduci ſolet formula quaepiam rigorem abſolutum corporis inflectendi exprimens, quae per radium curuaturae diuiſa praeciſe aequalis euadat momento virium ad hanc ipſam incuruationem producendam requiſito; vnde cum momenta virium ſint producta ex vi agente ſeu quodam pondere per quampiam lineam rectam multiplicato, euidens eſt formulam, qua rigor abſolutus exprimitur, eſſe debere productum ex quopiam pondere et quadrato cuiuspiam lineae rectae, ita vt ſi per radium oſculi diuidatur, prodeat formula ſimilis ei, qua momenta virium exprimuntur.

§. 7. Quo noſtram inueſtigationem a caſu ſimpliciſſimo exordiamur, contemplemur primo eiusmodi columnam, quae per totam ſuam altitudinem eandem habeat craſſitiem, ita vt rigor abſolutus, quo omni incuruationi reſi-

resistit, habeat vbique eandem quantitatem, quam ergo exprimamus formula $E k k$, vbi E certum designet pondus, k autem certam lineam rectam. Hic quidem in genere statim patet, quo crassior fuerit columna, et quo maiore soliditate praedita, eo maiorem fore valorem formulae $E k k$. Infra autem ostendemus, si huiusmodi columnae fuerint cylindricae, ex materia eiusdem soliditatis formatae, tum formulam $E k k$ proportionalem fore biquadrato diametri crassitiei.

§. 8. Dum autem columnae cylindricae certae crassitiei tribuimus rigorem $= E k k$, valorem huius formulae haud difficulter per experimenta assignare licebit. Concipiamus enim, talem columnam, cuius axem tantum hic in figura repraesentamus, in B pauimento firmo ita firmiter esse infixam, vt inde dimoueri prorsus nequeat, cuius ergo rigor vbique sit $= E k k$, longitudo autem eius vocetur $AB = a$. Iam huic columnae in summitate A applicetur vis horizontalis AV, quae aequiualeat pondere $= F$, a qua igitur ipsa columna incuruabitur in situm $By a$, hancque curuaturam tanquam minimam spectemus, scilicet vis illa horizontalis F maior capi non debet, quam vt punctum supremum A per spatiolum $Aa = \alpha$ detorqueat. Quibus positis ostendam, quomodo formula nostra rigorem exprimens, scilicet $E k k$, ex vi sollicitante F et altitudine $AB = a$ cum spatiolo $Aa = \alpha$ determinari possit. Tab. II. Fig. 5.

§. 9. Hunc in finem ante omnia in naturam curvae $By a$ inquiri oportet. Ducta igitur ex quouis curuae puncto y ad verticalem AB, normali yx, vocetur abscissa $Bx = x$ et applicata $xy = y$, quae ergo per hypothesin

eſt quam minima, ita vt longitudo curuae B y, quae ſit $= s$, ab ipſa abſciſſa B $x = x$ non diſcrepet. Quare ſi radius oſculi huius curuae in y fuerit $y\,r$, eius longitudo, vti conſtat, eſt $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque ob $ds = dx$ iſte radius oſculi erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, ex quo rigor per hunc radium oſculi diuiſus erit $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, quae formula aequalis ſtatui debet momento vis ſollicitantis F hanc curuaturam producentis, quod momentum cum ſit F. A $x = F(a - x)$, habebitur pro noſtra curua haec aequatio: $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = F(a - x)$, ex qua ante omnia naturam curuae definire oportet.

§. 10. Multiplicemus hanc aequationem per dx atque integratio nobis dabit:

$$\frac{Ekk\,dy}{dx} = \tfrac{1}{2}F(2ax - xx) + C$$

quae conſtans C ita debet eſſe comparata, vt poſito $x = 0$, hoc eſt in ipſo puncto B, non ſolum fiat $y = 0$, ſed etiam $\frac{dy}{dx} = 0$, propterea quod recta A B in B firmiter eſt infixa, vnde patet ſumi debere $C = 0$, ita vt hanc habeamus aequationem: $Ekk\,dy = \frac{1}{2}F\,dx\,(2ax - xx)$, quae denuo integrata praebet $Ekky = \frac{1}{6}F(3axx - x^3)$, vnde poſito $x = 0$ iam fit $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in ipſam extremitatem a, ſumendo $x = a$, et quoniam nouimus, tum fieri applicatam $= A\,a = \alpha$, aequatio noſtra dabit $Ekk\alpha = \frac{1}{3}F a^3$, ex quo manifeſto prodit formula rigorem exprimens $Ekk = \frac{F a^3}{3\alpha}$, ſicque per vnicum experimentum pro quauis columna cylindrica eius rigor abſolutus ſeu valor formulae Ekk expedite determinari poterit, cum ex elementis cognitis, ſcilicet F, a et α ſtatui poſſit $E = F$ et $kk = \frac{a^3}{3\alpha}$.

§. 11.

§. 11. Postquam igitur exploratus fuerit valor formulae Ekk pro quapiam proposita columna cylindrica, ponamus istam columnam, cuius axem tantum A B in figura exhibemus, a pondere incumbente O infinite parum esse inflexam, ita vt curuam AyB induerit, ambaeque extremitates A et B immotae manserint; quoniam enim incuruatio supponitur infinite parua, ipsa curua AyB ab axe A B prorsus non discrepabit. His igitur positis vocemus altitudinem huius columnae $AB = a$, et pro puncto eius quocunque y ponamus abscissam $Ax = x$ et applicatam $xy = y$, ita vt y euanescere debeat tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$: modo ante autem vidimus radium osculi in hoc puncto y esse $= \frac{dx^2}{ddy}$, qui cum hic axem versus vergat, poni debet $yr = -\frac{dx^2}{ddy}$, ita vt momentum inflexioni resistens sit $-\frac{Ekkddy}{dx^2}$. Tab. II. Fig. 6.

§. 12. Quoniam nunc onus columnae incumbens O secundum directionem verticalem A B deorsum vrget, eius momentum respectu puncti y erit $= Oy$, vnde statim deducitur haec aequatio: $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = Oy$, pro qua breuitatis gratia scribamus $\frac{Ekk}{O} = cc$, vt habeamus hanc aequationem: $\frac{ccddy}{dx^2} + y = 0$, quae ducta in $2dy$ et integrata dat $\frac{ccdy^2}{dx^2} + yy = ff$, vnde elicimus

$$dx^2 = \frac{ccdy^2}{ff-yy}, \text{ ideoque } dx = \frac{cdy}{\sqrt{(ff-yy)}}.$$

Hinc denuo integrando peruenimus ad hanc aequationem: $x = c$ Arc. sin. $\frac{y}{f} + C$, ita vt duae constantes f et c in calculum sint ingressae, quas ita definiri oportet, vt y euanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$; prior autem conditio statim nobis dat $C = 0$, ita vt habeamus

$x = c$

$x = c$ Arc. sin. $\frac{y}{f}$. Fiat nunc $x = a$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus $a = c$ Ar. sin. 0. Tales autem arcus sunt $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc. quorum primus iam pro termino A valuit; hic igitur valebit valor π, ita vt sit $a = \pi c$. Posueramus vero $cc = \frac{Ekk}{O}$, quamobrem habebimus $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$.

§. 13. Hic notatu dignum est, alteram constantem ff prorsus ex calculo esse egressam. Quoniam igitur inuenimus $x = c$ A. sin. $\frac{y}{f}$, erit inuertendo $y = f$ sin. $\frac{x}{c}$; vnde patet, quo maior fuerit quantitas f, eo magis incuruationem augeri; ideoque aequationem nostram finalem $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$ perinde subsistere, siue columnae curuatura inducta fuerit tantillo maior siue minor, dummodo fuerit quam minima. Nunc vero ex ipsa hac aequatione innotescet pondus O, quod talem incuruationem producere valeat: reperietur enim $O = \frac{\pi\pi Ekk}{aa}$; vnde intelligitur, quamdiu onus, columnae incumbens, non maius fuerit quam $\frac{\pi\pi Ekk}{aa}$, columnam omnino firmam consistere, neque vllum esse periculum, vt oneri succumbat. Hinc igitur statim patet, quod iam dudum inueneram, onera, quae columnae cylindricae eiusdem crassitiei sustinere valent, tenere rationem reciprocam duplicatam altitudinum a, ita vt columna duplo altior tantum quartam partem oneris gestare valeat.

§. 14. Vt nunc etiam columnas diuersae crassitiei inter se comparare queamus, inuestigari oportet, quomodo quouis casu formula rigorem exprimens Ekk a crassitie pendeat, id quod ex principiis physicis et experimentis super cohaesione et firmitate corporum institutis deriuari debet; vbi imprimis ad ipsam materiam, ex qua columnae paran-

parantur, erit respiciendum; et quoniam corpora incuruari nequeunt, nisi quaedam elementa a se inuicem longius remoueantur, eiusmodi experimenta consulere debebimus, quibus talis diductio vel elongatio a viribus quibuscunque produci potest. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo adgrediamur.

§. 15. Ex eadem materia, qua columnae constant, paretur bacillus cylindricus, vel prismaticus E E F F, qui altero termino E E pauimento M N ita firmiter infigatur, vt aliter inde diuelli nequeat, nisi dirumpatur, in altero vero termino pondus P appendi concipiatur, quod eo vsque augeri potest, vt iste bacillus dirumpatur. Ante autem quam ipsa ruptura euenit, bacillus aliquantillum elongabitur per spatiolum F f, quod eo minus erit, quo firmior et solidior fuerit massa bacilli. Concipiamus ergo tale experimentum institui cum bacillo, cuius longitudo E F $= f$ et crassities $= g\,g$, tum vero istum bacillum ab appenso pondere P elongari per spatiolum F $f = \phi$; ac primo quidem patet, istam elongationem ϕ ipsi longitudini bacilli f esse proportionalem: si enim bacillus duplo esset longior, ab eodem pondere P duplo maior elongatio ϕ produceretur; vnde si statuamus $\phi = \delta f$, dabitur certa relatio inter pondus P et litteram δ, ita vt non amplius opus sit ipsam longitudinem f in computum ducere. Tab. II. Fig. 7.

§. 16. Euidens autem est, quo maius fuerit pondus P, eo maiorem quoque esse debere litteram δ, hanc autem non vltra certum terminum augeri posse, quin bacillus penitus dirumpatur. Quamdiu autem istae elongationes sunt satis paruae, dubitari nequit, quin valor litterae δ

ipsi ponderi P sit proportionalis, quandoquidem in omnibus huiusmodi mutationibus minimis effectus caussae semper est proportionalis. Deinde etiam euidens est, si bacillus esset duplo crassior, tum ad eandem elongationem producendam requiri pondus duplo maius; ex quo intelligitur, pondus P tenere rationem compositam ex littera δ et crassitie, quam posuimus $= gg$, ita vt ipsum pondus P semper proportionale sit formulae δgg.

§. 17. Quo nunc etiam crassitiem gg ex calculo expellamus, loco ponderis P commode substitui poterit pondus voluminis ex eadem materia constantis, quod ergo per similem bacillum, cuius longitudo sit $= p$, repraesentari poterit, ita vt sit $P = pgg$, hoc est vt P aequetur ponderi cylindri ex ipsa materia columnae confecti, cuius basis sit $= gg$ et altitudo $= p$. Quo constituto, cum istud pondus pgg semper sit proportionale formulae δgg, eandem proportionem tenebit p ad δ; vnde si statuatur $p = \delta h$, erit h certa quaedam longitudo, quae pro omnibus bacillis ex eadem materia confectis erit eadem, quandoquidem neque a longitudine f neque a crassitie gg pendet; ex quo hanc longitudinem h tanquam veram mensuram tenacitatis seu firmitatis materiae spectare poterimus, de qua quouis casu agitur, ita vt cuique materiae determinata quaedam longitudo h conueniat. Hac igitur semel cognita, si fuerit $\frac{\Phi}{f} = \delta$, semper erit $p = \delta h$, eritque p longitudo similis bacilli crassitiei gg, cuius pondus aequetur ponderi appenso P.

§. 18. Hinc igitur vbicunque materia, ex qua columna est confecta, de statu suo naturali diducitur, ex ipsa di-

diductione determinari poterit vis ad eam producendam requisita. Consideremus igitur elementum columnae quodcunque $EeFf$, cui ob incuruationem inducta sit figura elementi annularis $EeFf$ ex centro R descripti, cuius radius sit $ER = r$, ipsum vero elementum curuae $Ee = ds$, vbi quidem solam crassitiem EF in figura exhibere licuit, latitudinem autem in singulis punctis x mente suppleri conuenit. Iam intra columnam consideremus punctum quodcunque X, per quod centro R describatur arculus Xx, ac posito interuallo $EX = x$ erit iste arculus Tab. II. Fig. 8.

$$Xx = \frac{(r+x)ds}{r} = ds + \frac{xds}{r}$$

cuius longitudo cum in statu naturali fuerit $= Ee = ds$, nunc spatium elongationis, quod supra vocauimus Φ, erit $= \frac{xds}{r}$: hic vero pro longitudine f habemus $Ee = ds$. Hinc ergo cum fuerit $\delta = \frac{\Phi}{f}$, hoc casu erit $\delta = \frac{x}{r}$, quae fractio ducta in longitudinem illam constantem h, si per totam columnae crassitiem extendatur, dabit pondus, quod ista incuruatio postulat.

§. 19. Promoueamus punctum X more solito per elementum dx, sitque latitudo columnae in $X = y$, atque elementum voluminis basi ydx insistens in statu naturali erit $ydxds$, quod cum elongationem littera $\delta = \frac{x}{r}$ indicatam sit passum, vis ad hoc requisita aequabitur ponderi voluminis $= \frac{bxydx}{r}$, cuius ergo integrale, per totam amplitudinem sectionis sumtum, dabit totam vim ad incuruationem elementi $FfEe$ requisitam.

§. 20. Pro nostro autem instituto non tam ipsam hanc vim quam eius momentum respectu puncti E, a quo

 in-

incuruatio incipit, exigimus; quam ob rem illa formula $\frac{bxydx}{r}$ insuper in distantiam $EX = x$ duci debet, prodibitque elementum huius momenti $= \frac{bxxydx}{r}$, cuius integrale per totam crassitiem sumtum, quod est $\frac{b}{r}\int xxy\,dx$, ipsum dabit momentum virium ad hanc curuationem producendam requisitum. Quoniam igitur ante idem momentum ex formula rigoris absoluti Ekk ita expressimus, vt esset $\frac{Ekk}{r}$: nunc manifestum est, qualis valor formulae Ekk pro quouis casu tribui debeat; semper enim erit $Ekk = b\int xxy\,dx$, si modo hoc integrale rite capiatur, ac per amplitudinem columnae circa sectionem EF extendatur.

§. 21. Pendet igitur ista determinatio a figura istius sectionis columnae per EF factae, siue a relatione, quam latitudo y pro quauis abscissa x tenet. Ponamus primo latitudinem vbique esse eandem, scilicet $y = c$, crassitiem vero $EF = b$, atque formula integranda erit

$$\frac{cb}{r}\int xx\,dx = \frac{1}{3}\frac{cbx^3}{r}$$

quae formula vsque ad terminum F extensa, posito $x = b$, dabit momentum ad incuruationem requisitum $= \frac{b^3cb}{3r}$ qui hoc casu est valor formulae superioris $\frac{Ekk}{r}$, ita vt sit $Ekk = \frac{1}{3}b^3cb$. Hinc si aliam columnam consideremus, cuius crassities sit $EF = B$, latitudo vero $= C$, valores formulae Ekk inter se erunt vt $b^3c : B^3C$; vnde iam intelligitur, si sectiones columnae fuerint inter se similes, quod fit, si fuerit $B : C = b : c$, tum valores formulae Ekk fore in ratione $b^4 : B^4$, quod de omnibus sectionibus similibus valet. Vnde si sectiones fuerint circuli, vt supra assumsimus, valores formulae Ekk tenebunt rationem biquadraticam diametrorum.

§. 22.

§. 22. Parum quidem refert, pro aliis figuris valores absolutos formulae $E\,k\,k$ euoluere; interim tamen speciminis loco computemus casum, quo sectio $E\,F\,f\,e$ est circulus, diametro $E\,F = b$ descriptus. Hinc ergo pro abscissa $E\,X = x$ tota latitudo erit $y = 2\sqrt{bx - xx}$, ita vt sit $E\,k\,k = 2\,b \int x\,x\,dx \sqrt{bx - xx}$, si quidem hoc integrale ab $x = 0$ vsque ad $x = b$ extendatur. Pro illo inueniendo ponamus $x = b$ sin. Φ^2, erit $b - x = b$ cos. Φ^2, hincque $\sqrt{bx - xx} = b$ sin. Φ cos. $\Phi = \frac{1}{2} b$ sin. $2\,\Phi$; tum vero erit $dx = 2\,b\,d\Phi$ sin. Φ cos. $\Phi = b\,d\Phi$ sin. $2\,\Phi$, quibus substitutis fiet $E\,k\,k = b^4\ b \int d\Phi$ sin. Φ^4 sin. $2\,\Phi^2$, quod integrale extendi debet a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = 90°$.

§. 33. Nunc per notam angulorum Analysin primo est sin. $\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2\,\Phi$, hincque

$$\text{sin. } \Phi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \text{ cos. } 2\,\Phi + \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 4\,\Phi,$$

porro vero sin. $2\,\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $4\,\Phi$, vnde conficitur

$$\text{sin. } \Phi^4 \text{ sin. } 2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 2\Phi - \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 4\,\Phi + \tfrac{1}{8} \text{ cos. } 6\,\Phi - \tfrac{1}{32} \text{ cos. } 8\,\Phi,$$

quae formula ducta in $d\Phi$ et integrata dat

$$\int d\Phi \text{ sin. } \Phi^4 \text{ sin. } 2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32}\,\Phi - \tfrac{1}{16} \text{ sin. } 2\,\Phi - \tfrac{1}{32} \text{ sin. } 4\,\Phi + \tfrac{1}{48} \text{ sin. } 6\,\Phi - \tfrac{1}{256} \text{ sin. } 8\,\Phi,$$

quae expressio iam euanescit facto $\Phi = 0$. Sumatur igitur $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$, ac totum hoc integrale euadet $= \frac{5\pi}{64}$, ita vt sit $E\,k\,k = \frac{5\pi b^4 b}{64}$, quae formula ergo vtique biquadrato diametri est proportionalis.

§. 24. Regrediamur nunc ad columnam cylindricam supra tractatam, cuius altitudo erat $A\,C = a$ (Fig. I.)

 eius

eius vero diametrum nunc ponamus $= b$, et quoniam modo inuenimus $E k k = \frac{5 \pi b^4 b}{64}$, erit onus quod ista columna sustinere valebit ante quam incurnetur $O = \frac{5 \pi^3 b^4 b}{64 a a}$, cuius quantitas aequatur ponderi voluminis ex eadem materia confecti, cuius soliditas est haec ipsa quantitas $\frac{5 \pi^5 b^4 b}{64 a a}$, siue aequabitur ponderi paris cylindri, cuius diameter $= b$, altitudo vero $= \frac{5 \pi^3 b b b}{64 a a}$. Vnde si plures habeantur huiusmodi columnae cylindricae ex eadem materia confectae, onera, quae gestare valent, tenebunt rationem compositam ex directa quadruplicata diametrorum et reciproca duplicata altitudinum; sin autem ex diuersa materia fuerint factae, quoniam cuilibet materiae certa longitudo b conuenit, onera insuper erunt in ratione harum ipsarum altitudinum b.

§. 25. In solutione autem supra data assumsimus columnam a solo pondere incumbente O comprimi, ipsum autem columnae pondus negleximus; plerumque autem onus sustentatum tantopere superat pondus proprium columnae, vt error hinc oriundus tuto negligi queat. Interim tamen deinceps operam dabimus, vt etiam rationem proprii ponderis in solutione habeamus, quod in prima solutione, quam olim in loco initio allegato dederam, expedire non sum ausus, ob summas difficultates, quae in hac euolutione occurrebant. Facile autem intelligitur, tali columnae tantam altitudinem tribui posse, vt ne proprium quidem pondus sustentare valeat, etiamsi fuerit $O = 0$, qui ergo Casus vtique peculiarem solutionem postulat.

§. 26.

§. 26. His expositis consideremus aliquot experimenta, quae celeberrimus *Muschenbroekius* de vi columnarum instituit; non autem cylindros adhibuit, sed prismata quadrata, vnde valorem formulae $E\,k\,k$ pro sectionibus quadratis explorare oportet. Supra autem iam pro casu $y = c$ inuenimus $E\,k\,k = \frac{1}{3} b^3 c\,h$ (§. 21.), hinc pro experimentis modo memoratis erit $E\,k\,k = \frac{1}{3} b^4 h$, vbi h denotat latus sectionis quadratae. Quamobrem si altitudo talis columnae prismaticae fuerit $= a$, onus, quod gestare valebit erit $O = \frac{\pi\pi b^4 h}{3aa}$. Secundum hanc igitur formulam experimenta illa examinemus.

§. 27. Parauit autem primo *Muschenbroekius* ex abiete trabeculam, 4 pedes longam, prismaticam, cuius basis erat quadratum, cuius latus $= \frac{51}{100}$ digit. eaque in statu verticali constituta dirupta fuit ab imposito pondere 64 libr. 9. unc. Deinde alia trabecula ex eodem ligno confecta pariter quatuor pedes longa sed cuius baseos quadratae latus erat $\frac{70}{100}$ dig., dirupta fuit a pondere 226 libr. Hic ergo erat altitudo, quam vocauimus a, $= 4$ ped. et in posteriore experimento latus quadrati $b = 0,70$ digitis onus vero impositum $O = 226$ lib. Hinc ergo si ex eodem ligno paretur columna prismatica altitudinis $= A$ pedum, cuius baseos latus $= B$ digitor, ista columna sustinere poterit onus, cuius pondus $= \frac{226 . B^4 4^2}{(0,70)^4 A^2}$ libr. ideoque hoc onus erit $15060 \frac{B^4}{A^2}$ libr. Vnde si altitudo A esset $= 20$ ped. et crassities $B = 20$ dig. talis columna sustentare posset onus $= 6024000$ libr.

§. 28.

§. 28. Ex hoc experimento etiam ipſam longitudinem b pro iſta ſpecie ligni definire licebit ope aequationis $b = \frac{3aaO}{\pi\pi b^4}$, ſi modo loco O ſubſtituatur maſſa ex eodem ligno conſtans, cuius pondus valeat 226 libr. Cum nunc pedis cubici aquae pondus ſit circiter 70 libr. grauitas autem ſpecifica huius ligni ſit duplo minor quam grauitas ſpecifica aquae, vnus pes cubicus talis ligni pondus habebit 35 libr. quare fiat 35 libr. : 1 = 226 libr. : O, ſicque erit $O = \frac{226}{35}$, ideoque in pedibus cubicis erit O = 6,457. Reliquas igitur quantitates etiam in pedibus exprimamus, eritque $a = 4$ et $b = 0{,}058$; vnde ex ſequente calculo ipſa longitudo b eruetur

$l.\ 3aa = 1{,}6812412$	$l.\ \pi\pi = 0{,}9942996$
$l.\ O = 0{,}8100308$	$l.\ b^4 = 5{,}0537120$
$l.$ Num. $= 2{,}4912720$	$l.$ Denom. $= 6{,}0480116$
ſub. $l.$ Denom. $= 6{,}0480116$	
$l.\ b = 6{,}4432604$	ergo $b = 2774980$

conſequenter pro hac ſpecie ligni longitudo b, qua tenacitatem metimur, valet 2774980 ped. vnde, quantum trabecula ex tali ligno parata a quauis vi elongari poſſit, definire poterimus. Ita ſi ipſam trabeculam ab auctore vſurpatam conſideremus, cuius longitudo $a = 4$ ped. et baſeos quadratae latus $= \frac{7}{10}$ digit. eamque a pondere 226 libr. non comprimi ſed diſtendi concipiamus, ſecundum praecepta ſupra data hoc pondus 226 libr. per talem trabeculam exprimamus, tam longam, vt eius pondus ſit 226 libr. ſitque haec longitudo $= p$. et quoniam vidimus pondus 226 libr. conuenire maſſae ligneae, cuius volumen = 6,457 ped.

ped. cubicor. eritque $b\,b\,p = 6{,}457$ ped. cubicor. Cum igitur in pedibus ſit $b = 0\,058$, reperietur $p = 1919$. Quodſi iam elongatio iſtius trabeculae, a tanta tenſione orta, vocetur vt ſupra $= \delta\,a$, erit $p = \delta\,b$, ideoque $\delta = \frac{p}{b} = 0{,}00069$, ideoque ipſa elongatio $\delta\,a = 0{,}00276$ ped. in digitis vero erit $\delta\,a = 0{,}03312$, ſiue propemodum $\frac{1}{30}$ digit. id quod ab experientia non abhorrere videtur.

§. 29. In hoc ligno auctor iam obſeruauit, vim, qua columna dirumpitur, ſatis exacte eſſe proportionalem biquadrato craſſitiei b^4; in aliis autem lignis, praecipue in quercu, animaduertit, vim rumpentem in minore ratione quam quadruplicata augeri, cuius phoenomeni ratio ſine dubio in indole fibrarum, ex quibus hoc lignum conſtat, eſt quaerenda; ſcilicet, quia aſſumſimus, elongationem duplo maiorem etiam vim duplo maiorem poſtulare, concludere debemus, in ligno quercino plures fibrillas rumpi, antequam elongatio fiat duplo maior, vnde etiam renitentia tanto erit minor. Hinc intelligitur, formulae noſtrae inuentae, quatenus biquadratum craſſitiei b^4 continet, in praxi non nimium tribui poſſe, et pro varia materiae, ex qua columnae conficiuntur, natura quandam correctionem admitti debere, ex pluribus experimentis determinandam.

§. 30. Quae hactenus de Columnis cylindricis in medium attulimus, haud difficulter ad eiusmodi Columnas transferuntur, quarum craſſities certa quadam lege aſcendendo decreſcit, quod argumentum hic de nouo tractare ſuperfluum foret, propterea quod iam fuſius id expoſui in diſſertatione mea initio allegata. Verum quia tum temporis non videbam, quomodo ipſum quoque pondus colum-

nae in computum duci queat, istum defectum hic supplere conabor; vbi imprimis sum inuestigaturus, ad quantam altitudinem columna cylindrica extendi possit, ne sub proprio pondere succumbat; etiamsi superne nullum onus sustentet.

§. 31. Referat igitur vt supra curua $AqyB$ axem columnae, qui a proprio pondere iam ad hanc figuram sit reductus, ac ponatur altitudo, quam quaerimus, $AB = a$, et abscissae cuicunque $Ax = x$ respondeat applicata $xy = y$, quae prae abscissa pro infinite parua haberi queat, ita vt in puncto y radius osculi sit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$; tum vero denotet Ekk, vt supra, formulam rigoris, ita vt incuruatio in puncto y postulet virium momentum $= \frac{Ekk}{r} = -\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$.

Tab. II. Fig. 9.

§. 32. Quoniam igitur ista incuruatio a solo pondere portionis superioris columnae Aqy producitur, consideremus eius elementum quodcunque in q, quod respondeat abscissae $Ap = p$ et applicatae $pq = q$, sitque bb crassities columnae per totam eius longitudinem; et cum elementum arcus Aq ipsi elemento abscissae dp aequale spectari possit, eius pondus exprimi poterit formula $bb\,dp$, quod agit in directione verticali qs; quam ob causam etiam in formula rigoris Ekk pondus E per massam eiusdem materiae, ex qua columna constat, exhiberi oportebit. Nunc igitur consideremus punctum y tanquam fixum, ad quod vsque puncta q ab A promoueantur, et momentum vis elementaris $bb\,dp$, in directione qs agentis, respectu puncti y erit $= bb\,dp\,(y-q)$, cuius integrale, ob y constans, erit $= bbpy - bb\int q\,dp$, quo momentum ex pondere

dere arcus Aq ortum, exprimitur. Nunc igitur punctum q vsque in y promoueatur, fietque $p = x$ et $q = y$; vnde totum momentum, incuruationem in y producens, erit $bbxy - bb\int y\,dx = bb\int x\,dy$, cui ergo aequalis esse debet formula $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, ita vt habeatur ista aequatio:

$$\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} + bb\int x\,dy = 0.$$

§. 33. Haec autem aequatio ita est comparata, vt nullo modo ad integrabilitatem perduci queat, quae etiam est ratio, cur olim hunc casum euoluere non sim ausus; verum deinceps perspexi, integratione actuali non esse opus, dummodo integrale completum per seriem infinitam euolui queat. Quod quo facilius fieri possit, statuamus breuitatis gratia $Ekk = mbb$, vt haec aequatio habeatur: $\frac{m\,ddy}{dx^2} + \int x\,dy = 0$, et quia abscissae $x = 0$ etiam applicata y euanescit, statuamus, saltem pro initio seriei quaesitae, $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4$, eritque

$$dy = \alpha\,dx + 2\beta x\,dx + 3\gamma xx\,dx + 4\delta x^3\,dx,$$

hincque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \tfrac{2}{3}\beta x^3 + \tfrac{3}{4}\gamma x^4 + \tfrac{4}{5}\delta x^5,$$

tum vero erit

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 2m\beta + 6m\gamma x + 2m\delta xx,$$

quae expressio, praecedenti iuncta, nihilo debet esse aequalis; vnde fit $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{24}\alpha m$; vnde intelligimus, seriem quaesitam a termino αx incipere, tum vero, ob $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sequentes potestates per x^3 increscere.

§. 34. Hoc obseruato fingamus pro y sequentem seriem:

$y = Ax$

$$y = Ax + Bx^4 + Cx^7 + Dx^{10} + Ex^{13} + Fx^{16} + Gx^{19} + \text{etc.}$$

eritque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}Axx + \tfrac{4}{5}Bx^5 + \tfrac{7}{8}Cx^8 + \tfrac{10}{11}Dx^{11} + \tfrac{13}{14}Ex^{14} + \tfrac{16}{17}Fx^{17} + \text{etc.}$$

ad quam feriem addere debemus iſtam:

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 3.4\,mBxx + 6.7\,mCx^5 + 9.10\,mDx^8 + 12.13\,mEx^{11} + \text{etc.}$$

quarum ſerierum ſumma, quia debet euaneſcere, dabit ſequentes determinationes:

1°. $\tfrac{1}{2}A + 3.4\,mB = 0$, hinque $B = -\frac{A}{2.3.4\,m}$.

2°. $\tfrac{4}{5}B + 6.7.m\,C = 0$, hinc $C = -\frac{4B}{5.6.7\,m} = \frac{1.4.A}{2.3.4..7\,m^2}$.

3°. $\tfrac{7}{8}C + 9.10\,m\,D = 0$, hinc $D = -\frac{7.C}{8.9..10.m} = -\frac{1.4.7\,A}{2.3.4...10\,m^3}$.

4°. $\tfrac{10}{11}D + 12.13\,mE = 0$, hinc $E = -\frac{10\,D}{11..12..13\,m} = \frac{1.4.7.10\,A}{2.3....13\,m^4}$.

§. 35. His valoribus inuentis applicata y per ſequentem feriem infinitam exprimetur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4\,m} + \frac{1.4.x^7}{2.3...7\,m^2} - \frac{1.4.7\,x^{10}}{2.3....10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,x^{13}}{2.3...13\,m^4} \text{ etc.}$$

quae expreſſio rite ad caſum noſtrum eſt accommodata: continet enim adhuc vnam conſtantem arbitrariam A; altera vero iam inde eſt determinata, quod facto $x = 0$ etiam fieri debeat $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in terminum imum B, ponendo $x = a$, et quia hic applicata y euaneſcere debet, prodibit iſta aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{1.a^3}{2.3.4\,m} + \frac{1.4\,a^6}{2.3..7\,m^2} - \frac{1.4.7\,a^9}{2.3...10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,a^{12}}{2.3...13\,m^4} \text{ etc.}$$

ex qua ipſam altitudinem columnae $AB = a$ eruere oportet: ſic enim inueniemus eam noſtrae columnae altitudinem, in qua iam a proprio ſuo pondere incuruari incipiet:

cipiet. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{a^2}{m} = v$, vt resoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{1.v}{2.3.4} + \frac{1.4vv}{2.3..7} - \frac{1.4.7v^3}{2.3..10} \text{ etc.}$$

sicque totum negotium huc est reductum, vt inueniatur valor litterae v, qui hanc seriem infinitam nihilo reddat aequalem; hoc enim valore inuento altitudo columnae quaesita erit $a = \sqrt[3]{mv}$.

§. 36. Euidens est hanc seriem vehementer convergere, quantumuis etiam magnus numerus pro v accipiatur. Primo autem hic obseruamus, quamdiu fuerit $v < 24$, quoniam termini iam ab initio continuo decrescunt, seriei summam necessario esse positiuam; vnde patet, numerum v necessario maiorem esse debere quam 24. Quo autem resolutionem huius aequationis faciliorem reddamus, ponamus $v = 6u$, vt sit $a = \sqrt[3]{6mu}$, et aequationem hinc natam hoc modo repraesentemus:

$$0 = 1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \text{ etc.}$$

eritque

$$\alpha = \tfrac{1}{4};\ \beta = \tfrac{4}{35}\alpha;\ \gamma = \tfrac{7}{120}\beta;\ \delta = \tfrac{10}{186}\gamma;\ \varepsilon = \tfrac{13}{500}\delta;$$
$$\zeta = \tfrac{16}{969}\varepsilon;\ \eta = \tfrac{19}{1540}\zeta;\ \theta = \tfrac{22}{2300}\eta;\ \iota = \tfrac{25}{3276}\theta;\ \kappa = \tfrac{28}{4495}\iota;$$
$$\lambda = \tfrac{31}{5984}\kappa;\ \mu = \tfrac{34}{7770}\lambda \text{ etc.}$$

Hinc in subsidium sequentium calculorum colligamus harum literarum logarithmos, eosque cum suis differentiis primis et secundis ordine referamus hoc modo:

Logarithmi literarum α, β, γ etc.	Differentiae primae.	Differentiae secundae.
$l\,\alpha = 9{,}3979400$	0,9420080	0,2920752
$l\,\beta = 8{,}4559320$	1,2340832	0,2222828
$l\,\gamma = 7{,}2218488$	1,4563660	0,1778786
$l\,\delta = 5{,}7654828$	1,6342446	0,1479592
$l\,\varepsilon = 4{,}1312382$	1,7822038	0,1265633
$l\,\zeta = 2{,}3490344$	1,9087671	0,1105380
$l\,\eta = 0{,}4402673$	2,0193051	0,0980988
$l\,\vartheta = 8{,}4209622$	2,1174039	0,0881678
$l\,\iota = 6{,}3035583$	2,2055717	0,0800582
$l\,\varkappa = 4{,}0979866$	2,2856299	0,0733122
$l\,\lambda = 1{,}8123567$	2,3589421	
$l\,\mu = 9{,}4534146$		

§. 37. His praeparatis ad radicem aequationis propositae $0 = 1 - \alpha u + \beta u u - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. inueniendam vtamur methodo per series recurrentes procedente, quae iubet talem seriem formare ex scala relationis $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon, -\zeta$ etc. quae sit 1, A, B, C, D, E, F etc. ita vt sit $A = \alpha$; $B = \alpha A - \beta$; $C = \alpha B - \beta A + \gamma$; $D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta$; $E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon$ etc. tum vero sequentes fractiones continuo propius ad radicem ipsius u appropinquabunt: $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; $\frac{C}{D}$; $\frac{D}{E}$ etc. Calculo igitur instituto termini huius seriei recurrentis sequenti modo determinabuntur:

$$A = 0{,}25$$
$$B = 0{,}033929$$
$$C = 0{,}00300610$$
$$D = 0{,}0001448750$$
$$E = -0{,}000006336562$$

Quo-

Quoniam hic litera F valorem fortita eſt negatiuum, hinc iam tuto concludere poſſumus, aequationem noſtram propoſitam nullam plane habere radicem realem, quod etiam inde patet, quod fractiones ſupra allatae $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; etc. ad nullum certum terminum conuergunt: ſit enim $\frac{1}{A} = 4$; $\frac{A}{B} = 7$; $\frac{B}{C} = 11$; $\frac{C}{D} = 20$; $\frac{D}{E} = -23$.

§. 38. Aequatio igitur infinita $0 = 1 - \alpha u + \beta u^2$ etc. ita eſt comparata, vt nullam plane radicem realem inuoluat, ideoque nullus datur numerus, quantumuis magnus accipiatur, pro u, qui ſummam huius ſeriei reddat nihilo aequalem, ſed quicunque numerus pro u accipiatur, ſumma ſeriei $1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. ſemper erit poſitiua, quam adeo quouis caſu aſſignare licebit. Ponamus enim verbi gratia $u = 10$, et ſingulos terminos iſtius ſeriei euoluamus; vbi quidem termini ab initio vehementer diuergent, mox autem ita conuergent, vt ſequentium omnium ſumma haud difficulter aſſignari queat. Singuli autem huius ſeriei termini ſequentes adipiſcentur valores:

$$
\begin{aligned}
+ 1 &= 1,0000000 \\
- \alpha u &= -2,5000000 \\
+ \beta u^2 &= 2,8571428 \\
- \gamma u^3 &= -1,6666666 \\
+ \delta u^4 &= 0,5827506 \\
- \varepsilon u^5 &= -0,1352814 \\
+ \zeta u^6 &= 0,0223375 \\
- \eta u^7 &= -0,0022603 \\
+ \theta u^8 &= 0,0002636 \\
- \iota u^9 &= -0,0000201 \\
+ \kappa u^{10} &= 0,0000012
\end{aligned}
$$

Quodſi

Quodſi iam huius ſeriei ab initio duo, tres, quatuor, quinque termini coniungantur, prodibunt numeri alternatim maiores, vel minores quam vera ſumma, veluti hic repraeſentatur.

Termini	Summa
1.	1,0000000
2.	— 1,5000000
3.	1,3571428
4.	— 0,3095238
5.	0,2732275
6.	0,1379461
7.	0,1602836
8.	0,1575233
9.	0,1577869
10.	0.1577668
11.	0,1577680

Vnde patet, veram ſummam contineri intra hos limites: 0,1577668 et 0,1577680, ideoque medium ſumendo vera ſumma aeſtimari poteſt = 0,1577674.

§. 39. His obſeruatis ſequens paradoxon maxime memorabile ſe nobis offert: quod columnae cylindricae, ad quamcunque altitudinem etiam porrigantur, nunquam ſub proprio pondere ſuccumbant, quod vtique eo magis eſt admirandum, quod aucta columnae altitudine onus ſuſtentandum decreſcat in ratione duplicata altitudinem, etiamſi proprium pondus columnae negligatur; ex quo concludi debere videbatur, ſi etiam proprii ponderis ratio habeatur, onus ſuſtentandum adhuc magis diminui, atque adeo

adeo tandem penitus euanescere debere, ita vt columna nimis alta nullum plane onus gestare valeret, quod tamen nunc longe aliter se habere inuenimus. Haec autem omnia accuratius examen requirunt, quod in sequente dissertatione instituemus.