EXAMEN INSIGNIS PARADOXI IN THEORIA COLVMNARVM OCCVRRENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Non solum maxime paradoxa, verum etiam vehementer suspecta videri debet conclusio, ad quam in superiore dissertatione, *de vi Columnarum* agentes, sumus perducti: quod scilicet nulla columna cylindrica, quantumuis fuerit alta, vnquam a proprio pondere frangatur. Cum enim, aucta altitudine columnae, eius vis onera gestandi secundum duplicatam rationem diminuatur, vtique tanta dabitur altitudo, qua columna ne leuissimum quidem pondusculum sustinere valeret; vnde maxime absurdum videtur, quod talis columna, etiamsi in immensum vlterius eius altitudo augeretur, tamen nunquam diffringi debeat. Hanc ob rem maxime necessarium videtur, omnes rationes, quibus ista conclusio innititur, accuratius perpendere.

§. 2. Totum autem iudicium super hac quaestione pendet a natura istius seriei infinitae:

$$1 - \frac{v}{4.1.} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \frac{v^5}{16.1.5.12.22.35} + \text{etc.}$$

vbi numeri 1, 5, 12, 22, 35, etc. seriem pentagonalium con-

conſtituunt, atque tota quaeſtio huc reducitur: vtrum ſumma huius ſeriei vnquam fieri poſſit nihilo aequalis, nec ne? Hic primo quidem ſtatim patet, quamdiu numerus v fuerit vnitate minor, ſummam huius ſeriei neceſſario ſemper eſſe poſitiuam, id quod etiam euenire deprehendi, etiamſi valor ipſius v multo maior accipiatur. Neque vero ob ſummas calculi difficultates centenario maiores valores ipſius v examini ſubiici poſſunt.

§. 3. Confugiendum ergo ſum arbitratus ad methodum, radices aequationum per ſeries recurrentes explorandi, quippe qua olim iam in ſimili quaeſtione, cum in motum oſcillatorium catenae libere ſuſpenſae inquirerem, felici ſucceſſu ſum vſus; verum praeſenti caſu iſta methodus penitus invtiliter eſt adhibita, vnde concludere non dubitaui, nullos prorſus pro v dari valores reales, quibus illa ſeries prorſus ad nihilum redigatur.

§. 4. Interim tamen certum eſt, iſtam methodum, radices aequationum per ſeries recurrentes explorandi, maxime eſſe lubricam, et ſaepiſſime in errores inducere poſſe, cuius defectus vnicum exemplum attuliſſe iuuabit, circa hanc aequationem tantum cubicam: $1 - 2z + 4zz - 3z^3 = 0$, cuius vna radix manifeſto eſt $z = 1$; at ſi ex ſcala relationis $2, -4, +3$ ſeries recurrens formetur, ea prodit

$$1 + 2 + 0 - 5 - 4 + 12 + 25 - 10 - 84, \text{ etc.}$$

vnde radix cognita nullo modo concludi poteſt. Ratio autem huius defectus in radicibus imaginariis eſt quaerenda, et quoniam noſtra aequatio ſine vllo dubio plurimas, ſi non omnes, inuoluit radices imaginarias, mirum non eſt hanc operationem ſucceſſu caruiſſe.

§. 5. Fateri igitur cogimur, hinc nihil tuto concludi posse, vtrum aequatio proposita radices habeat reales, nec ne, atque hic potius nostrum iudicium suspendere conueniet. Quamobrem ista ipsa aequatio:

$$0 = 1 - \frac{v}{4.1} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \text{etc.}$$

omnino digna videtur, vt Geometrae omni studio in eius naturam inquirant.

§. 6. Quoniam autem haec aequatio nata est ex consideratione illius lineae curuae, ad quam tales columnae, a sola grauitate sollicitatae, inflecti deberent ante quam corrumperentur, necesse erit huius curuae symptomata accuratius examini subiicere. Referat igitur recta verticalis AB huiusmodi columnam, sitque AYB ea linea curua, ad quam inflecti debet, antequam penitus corruat, atque inter eius coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ sequens inuenta est aequatio infinita:

Tab. III. Fig. 1.

$$\frac{Y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4x^7}{2.3\ldots7.m^2} - \frac{1.4.7x^{10}}{2.3\ldots10.m^3} + \text{etc.}$$

Quoniam igitur in infimo columnae termino B applicata y iterum euanescere debet, hic ante omnia inuestigari oportet abscissam illam x, cui respondeat applicata euanescens $y = 0$, quandoquidem haec ipsa abscissa aequabitur altitudini totius columnae AB; quamobrem si hoc, vti visum erat, nunquam euenire posset, sed, etiamsi abscissae x in infinitum augeantur, applicatae tamen semper positiuum sortirentur valorem, id vtique certum foret signum, columnam etiam infinite altam sub proprio pondere nunquam succumbere debere, propterea quod alter columnae terminus B in infinitum remoueretur.

§. 7.

§. 7. Vt igitur accuratius in formam huius columnae inquiramus, ponamus br. gr. $x^3 = m\,t$, vt fit $x = \sqrt[3]{m\,t}$, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{y}{A\,x} = 1 - \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} + \frac{1.\,4\,t^2}{2,\,3,\,\ldots\,7} - \frac{1.\,4.\,7\,t^3}{2.\,3.\,\ldots\,10} + \frac{1.\,4.\,7.\,10\,t^4}{2.\,3.\,\ldots\,13} - \text{etc.}$$

quam feriem littera s indicemus, ita vt fit $\frac{y}{A} = s\,x = s\sqrt[3]{m\,t}$. Ad hoc igitur examen inftituendum litterae t fucceffiue tribuamus valores continuo maiores, et pro fingulis computemus valores refpondentes tam ipfius s quam formulae $s\sqrt[3]{t}$, atque hos valores, prouti, inftituto calculo, fumus adepti, in fequenti tabula referamus:

t	s	$s\sqrt[3]{t}$
0	1, 0000	0, 0000
10	0. 6556	1, 4125
20	0, 4290	1, 1645
30	0, 2882	0, 8955
40	0, 2086	0, 7134
50	0, 1712	0, 6307
60	0, 1577	0, 6173
70	0, 1629	0, 6672
80	0, 1744	0, 7515
90	0, 1897	0, 8501
100	0, 2046	0, 9496
120	0, 2248	1, 1088
240	0, 1856	1, 1534
400	0. 1338	0, 9850

§. 8. Secundum hanc tabellam exftruximus binas curuas, ad axem, in quo abfciffae t capiuntur, relatas, quarum

Tab. III. Fig. 2. et 3. rum altera exhibet valores litterae s, altera vero (Fig. 3.) valores formulae $s\sqrt[3]{t}$, quae poſterior figura ergo ipſam curuam, quam columnae tribuimus, repraeſentabit, ſi modo notetur, applicatas ſecundum modulum multo maiorem eſſe expreſſas, quo variationes earum clarius in oculos inciderent. Principalis igitur quaeſtio huc redit, vtrum hae duae curuae, continuo magis prolongatae, tandem per axem ſint tranſiturae? Manifeſtum enim eſt, talem tranſitum in ambabus curuis ſimul contingere debere.

§. 9. Quod ſi iam ſiue illam tabellam, ſiue figuras inde delineatas attente conſideremus, circa valores litterae s generatim obſeruamus, eos propius verſus axem conuergere, interea autem miris inflexionibus modo magis ab axe recedere modo propius accedere, atque adeo in hac curua plura maxima et minima occurrere; veluti, primum minimum deprehenditur prope abſciſſam $t = 60$; deinde vero applicatae iterum creſcunt, vsque ad $t = 120$, inde vero iterum decreſcunt propemodum vsque ad 400. Quamobrem, cum ſatis certi eſſe queamus, valores minimos, quippe qui ſecundum numeros 0, 1577 et 0, 1338 procedunt, continuo propius ad axem accedere, hinc iam ſatis probabile videtur, eos tandem, veruntamen valde ſero, penitus euaneſcere, quod autem ob defectum ſubſidiorum calculi nondum definire licet.

§. 10. Simili modo propemodum res ſe habet in altera figura, quae ipſam columnae figuram referre cenſenda eſt, vbi ab initio $t = 0$ applicatae ſubito increſcunt, vsque ad terminum circiter $t = 8$, vbi applicata ſingulari cal-

calculo circiter inuenta eſt $= 1,60$; hinc autem per $t = 10$ procedentes ſatis repente decreſcunt, dum circa $t = 60$ minimum quaſi valorem attingunt, hinc vero vsque ad $t = 120$ ſatis ingenti ſaltu aſſurgunt, inde multo lentius iterum decreſcunt vsque ad $t = 400$, hincque iterum increſcendo ſatis vniformiter aſcendunt, quovsque quidem nobis calculum inſtituere licuit. Hic igitur nulla ratio occurrit, vnde concludere, probabili ſaltem modo, liceret, iſtas applicatas tandem penitus euaneſcere.

§. 11. Cum igitur iſta quaeſtio maximi ſit momenti atque ſine dubio ſummam attentionem mereatur, haud parum lucis afferre poterit inueſtigatio omnium locorum, vbi applicatae poſterioris curuae euadunt vel maximae vel minimae, quandoquidem totum iudicium ad ſolas applicatas minimas reuocatur, quae ſi nusquam penitus euaneſcerent, certum id foret ſignum, concluſionem ſupra memoratam veritati eſſe conſentaneam.

§. 12. Cum igitur applicatae huius curuae ibi fiant vel maximae vel minimae, vbi fuerit $\frac{dy}{dx} = 0$, ex ſerie ſupra exhibita concludimus

$$\frac{dy}{A\,dx} = 1 - \frac{x^3}{2.3m} + \frac{x^6}{2.3.5.6.m^2} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9.m^3} + \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12.m^4} - \text{etc.}$$

Ponamus igitur vt ante $x^3 = mt$, ac perueniemus ad hanc aequationem infinitam:

$$0 = 1 - \frac{t}{2.3} + \frac{t^2}{2.3..5.6} - \frac{t^3}{2.3...5.6..8.9} + \frac{t^4}{2.3..5.6..8.9..11.12} - \text{etc.}$$

cuius ergo radices inueſtigare oportet: euidens autem eſt pri-

primam, siue minimam radicem, aliquanto maiorem esse debere quam primum denominatorem $2 \cdot 3 = 6$.

§. 13. Calculus autem ad hoc negotium requisitus haud difficulter per logarithmos institui poterit; si enim ipsos terminos huius seriei per cyphras romanas designemus, vt sit $\mathrm{I} = 1$, logarithmi sequentium iuxta tabulam subnexam colligentur:

$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + l\,t - l\,6$	0, 7781513
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + l\,t - l\,30$	1, 4771213
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + l\,t - l\,72$	1, 8573325
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + l\,t - l\,132$	2, 1205739
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + l\,t - l\,210$	2, 3222193
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + l\,t - l\,306$	2, 4857214
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + l\,t - l\,420$	2, 6232493
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + l\,t - l\,552$	2, 7419391
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + l\,t - l\,702$	2, 8463371
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + l\,t - l\,870$	2, 9395193
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + l\,t - l\,1056$	3, 0236639
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + l\,t - l\,1260$	3, 1003705
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + l\,t - l\,1482$	3, 1708482
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + l\,t - l\,1722$	3, 2360331
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + l\,t - l\,1980$	3, 2966652
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t - l\,2256$	3, 3533390
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t - l\,2550$	3, 4065402
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t - l\,2862$	3, 4566696
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + l\,t - l\,3192$	3, 5040629

§. 14. Hoc modo primo fecimus calculum pro $t = 8$, prodiitque seriei summa negatiua $= -0,0149$; sumto

ſumto autem $t = 7,50$, ſumma prodiit poſitiua $= 0,0318$, vnde concludimus, verum valorem primae radicis eſſe $t = 7,840$, cui in curua reſpondere debet applicata maxima. Deinde, quia ex figura colligere licet, ſequens minimum cadere inter $t = 50$ et $t = 60$, inſtituto calculo pro $t = 60$, prodiit ſumma ſeriei $= + 0,1144$: at pro $t = 50$ prodiit ſumma $= - 0,1791$; vnde tuto concludere licet, ipſum minimum reſpondere abſciſſae $t = 56,10$.

§. 15. Pro ſequente maximo eruendo faciamus calculum pro abſciſſa $t = 150$, hincque ſeriei ſumma reperitur $= - 0,0244$; at vero, ſumto $t = 145$, prodit $+ 0,2736$; vnde concluditur, maximum iſtud conuenire cum $t = 149,59$. Nimis autem operoſum foret iſtum calculum vlterius proſequi; verum ipſa aequatio ſuppeditat certam rationem, ſequentes valores ipſius t ſatis exacte colligendi. Cum enim aequationis ſecundus terminus ſit $\frac{1}{8} t$, patet, ſi literae α, β, γ, δ, denotent omnes radices ipſius t, tum neceſſario eſſe debere $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +$ etc. $= \frac{1}{8}$. Praeterea vero rationes non deſunt, quod iſtae radices α, β, γ, δ, ſecundum legem ſatis ſimplicem progrediantur et earum differentiae ſecundae pro conſtantibus haberi poſſint. Quamobrem cum tres primae radices inuentae ſint $\alpha = 7,84$; $\beta = 56,10$ et $\gamma = 149,59$, differentiae primae ſunt $48,26$; $93,49$; vnde oritur differentia ſecunda $45,23$. Hinc igitur, quouſque libuerit, loca maximorum et minimorum continuari poterunt. En paradigma:

Diff. II.	Diff. I.	Termini.
45, 23	48, 26	7, 84 Max.
45, 23	93, 49	56, 10 Min.
45, 23	138, 72	149, 59 Max.
45, 23	183, 95	288, 31 Min.
45, 23	229, 18	472, 26 Max.
45, 23	274, 41	701, 44 Min.
45, 23	319, 64	975, 85 Max.
45, 23	364, 87	1295, 49 Min.

§. 16. Poteſt etiam in genere talis ſeries inueſtigari, cuius ſumma ſit $= \frac{1}{6}$. Statuatur enim ſeries

$$s = \frac{1}{6} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.}$$

et cum hinc ſit

$$s - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.},$$

poſterior ſeries a priore ſublata relinquit hanc:

$$\frac{1}{6} = \frac{A - 6}{6A} + \frac{B - A}{AB} + \frac{C - B}{BC} + \frac{D - C}{CD} + \text{etc.}$$

Iam fiat

$$\frac{A - 6}{6A} = \frac{1}{\alpha}, \text{ ſiue } \frac{6A}{A - 6} = \alpha;$$

tum vero

$$\frac{AB}{B - A} = \beta, \quad \frac{BC}{C - B} = \gamma, \text{ etc.}$$

hincque, ob α, β, γ, cognita, reperitur

$$A = \frac{6\alpha}{\alpha - 6} = 25,56, \quad B = \frac{\beta A}{\beta - A} = 46,95,$$
$$C = \frac{\gamma B}{\gamma - B} = 68,43, \text{ etc.}$$

Iam nullum eſt dubium, quin iſti numeri, terminum primum ſequentes, ſatis regulariter progrediantur, et, niſi adeo progreſſionem arithmeticam conſtituant, tum ſaltem eorum diffe-

differentiae secundae quasi sint aequales. Sunt vero differentiae primae 19, 56; 21, 39; 21, 48; quae parum a numero 20 discrepant; sin autem differentias secundas admittere velimus, eae propemodum vnitati aequales statui possunt. Ceterum pro instituto nostro parum referet, siue valores, pro litteris α, β, γ, δ, etc. exhibiti, sint ad amussim exacti, nec ne, si adeo calculum vlterius prosequi vellemus; verum cum inde nihil plane certi circa Paradoxon memoratum concludere valeamus, atque etiamnunc in dubio sit relinquendum, vtrum curua nostra alicubi cum axe concurrat nec ne, hanc Analysin, quippe quae sola nihil decidere videtur, deseramus, nostramque quaestionem ex principiis Mechanicis examinemus.

Examen eiusdem Paradoxi, ex Principiis Mechanicis petitum.

§. 17. Consideremus columnam quamcunque, cylindricam, determinatam A B, quae sub dato pondere, quod sit $= P$, corruat. Iam loco huius ponderis substituatur alia columna A P, eiusdem diametri, cuius longitudo sit $= p$, quae ergo, illi columnae superimposita, eundem effectum erit praestatura, et columnam A B diffringet. Tab. III. Fig. 4.

§. 18. Quanquam autem hoc modo obtinetur columna quasi vnica P A B, sub proprio pondere succumbens, tamen hinc quaestio nostra non conficitur. Quoniam enim haec columna in A quasi est dissecta, dubitari omnino nequit, quin talis columna, si continua, multo plus roboris esset habitura. Accuratius igitur examinemus, quomodo continuitas ambarum columnarum impedire possit, quo minus inferior columna A B frangatur, cum tamen hic effectus certe contingeret, si superior pars A P tantum simpliciter esset imposita.

§. 19. In superiore autem dissertatione columnam A B ita ab onere imposito rumpi sumus contemplati, vt primo instanti certam quandam curuaturam A Y B accipiat, dum termini A et B in eodem situ verticali perseverant; atque hanc curuam ita comparatam esse inuenimus, vt in A cum verticali A B angulum finitae magnitudinis X A Y constituat, quoniam, positis coordinatis A X $= x$ et X Y $= y$, talis aequatio est eruta: $y = \alpha x - \beta x^4 +$ etc.; vnde, sumto x infinite paruo, foret $y = \alpha x$, ideoque α exprimeret tangentem anguli X A Y. Haec igitur inflexio tanquam effectus spectari debet, a pondere columnae superimpositae A P oriundus.

§. 20. Manifestum autem est, istum effectum nullo modo produci posse, si superior columna cum inferiore firmiter esset connexa; propterea quod suprema portiuncula A X a situ verticali declinari nequit, nisi simul infima portiuncula superioris partis A P similem declinationem accipiat, ad alteram scilicet partem, veluti A Z, tendentem, quod autem ob continuitatem totius columnae contingere nequit.

§. 21. Quamdiu autem superior pars A P situm verticalem seruat, inferior portio A B, siquidem fractioni fuerit obnoxia, aliam inflexionem recipere nequit, nisi in qua angulus X A Y penitus euanescat, et curuae A Y tangens in puncto A sit verticalis. Quoniam igitur haec ratio

ratio frangendi prorſus diſcrepat ab illa, quam ſupra tractauimus, in eam hic accuratius inquiramus.

§. 22. Hunc in finem ſupremam columnae A B portiunculam laqueari fixo eſſe infixam concipiamus, ſiue ita a viribus horizontalibus vtrinque detineri, vt a ſitu verticali deflectere penitus nequeat. Scilicet, dum portio A Y incuruatur, ad punctum ſuperius a in ſitu verticali conſeruandum, neceſſe eſt, vt a vi quadam horizontali $a q$ ſollicitetur, ne iſtud punctum retrocedere queat, quem ergo effectum firmitas laquearis praeſtare eſt cenſenda. Tum vero, ne tota columna ab iſta vi horizontali $a q$ proſterni queat, in puncto A aequalis vis horizontalis A Q, contrarie agens, eſt concipienda, quae iſtum effectum deſtruat. Interim tamen hae duae vires non impedire debent, quominus columna impoſita A P toto ſuo pondere in columnam inferiorem agat, eamque deprimat. Tab. III. Fig. 5.

§. 23. Ad hunc ergo caſum euoluendum vocemus iſtas vires horizontales $A Q = a q = Q$, et interuallum $A a = \alpha$, ita vt nunc tres habeamus vires, quibus columna inferior ſollicitatur, ſiquidem praeter has vires horizontales adhuc a pondere ſuperimpoſito P deorſum vrgetur; a quibus viribus quomodo columna haec A B inflecti debeat, iam indagabimus, vbi quidem ipſum pondus columnae inferioris negligere licebit; nam ſi, eo neglecto, columna A B a pondere ſuperimpoſito A P inflecti poterit, multo magis, accedente proprio pondere, talem inflexionem pati debebit.

§. 24. Ponamus igitur vt ſupra abſciſſam $A X = x$ et applicatam $X Y = y$; atque a pondere incumbente P ad inflexionem in puncto Y producendam orietur mo-

 mentum

mentum $= P.y$. In eandem porro plagam a vi horizontali $A Q = Q$ momentum nafcitur $= Q x$; ab altera vero vi horizontali $a q = Q$ momentum producitur in plagam contrariam vergens, quod erit $= Q(\alpha + x)$; quibus tribus momentis collectis totum momentum, columnam principalem AB incuruans, erit $= Py - Q\alpha$.

§. 25. Hoc iam momento incuruationis inuento in §. 12. fuperioris differtationis: *De oneribus, quae columnae geftare valent*, loco Oy tantum fcribi oportebit $Py - Q\alpha$, vnde nancifcimur hanc aequationem:

$$Py - Q\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = 0,$$

quae autem nunc ita integrari debet, vt, pofito $x = 0$, non folum fiat $y = 0$, fed etiam $\frac{dy}{dx} = 0$. Praeterea vero, fi columnae altitudo ponatur $= a$, applicata y infuper euanefcere debet pofito $x = a$.

§. 26. Diuidatur aequatio modo allata

$$Py - Q\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = 0$$

per P, et ponatur $\frac{Ekk}{P} = cc$; tum vero fiat $\frac{Q\alpha}{P} = b$, vt habeatur haec aequatio fimplicior:

$$y - b = -\frac{ccddy}{dx^2}, \text{ fiue } z = -\frac{ccddz}{dx^2},$$

pofito fcilicet $y - b = z$, cuius integrale completum eft

$$z = y - b = \mathfrak{A} \text{ fin. } \frac{x}{c} + \mathfrak{B} \text{ cof. } \frac{x}{c}.$$

Cum igitur, pofito $x = 0$, fieri debeat $y = 0$, pro conftantibus determinandis habetur primo haec determinatio: $\mathfrak{B} = -b$; deinde cum fit $\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{A}}{c} \text{ cof. } \frac{x}{c} - \frac{\mathfrak{B}}{c} \text{ fin. } \frac{x}{c}$, vt pofito $x = 0$ fiat quoque $\frac{dy}{dx} = 0$, obtinetur haec altera

aequa-

aequatio: $\mathfrak{A} = 0$; quocirca aequatio, curuam noſtram exprimens, erit

$$y - b = -b \text{ coſ. } \frac{x}{c}, \text{ ſiue } y = b\left(1 - \text{coſ. } \frac{x}{c}\right).$$

§ 27. Augeatur nunc abſciſſa x vſque ad totam columnae altitudinem a, et quia, poſito $x = a$, fieri debet $y = 0$, orietur haec noua aequatio: $b\left(1 - \text{coſ. } \frac{a}{c}\right) = 0$, cui ſatisfit ponendo coſ. $\frac{a}{c} = 1$. Fit autem coſ. $\frac{a}{c} = 1$ caſibus $\frac{a}{c} = 0$, vel $\frac{a}{c} = 2\pi$, etc.; atque hinc pondus determinabitur, quod iſtam columnam ad rupturam adiget. Cum enim ſit $c = \frac{a}{2\pi}$, ob $c = k\sqrt{\frac{E}{P}}$. (vid. §. 26.), reperitur hoc pondus $P = \frac{4\pi\pi E kk}{aa}$, quae ergo quantitas pariter ſequitur rationem quadruplicatam craſſitiei directam et reciprocam duplicatam altitudinis. Cum igitur in caſu praecedentis diſſertationis inuentum fuiſſet onus $O = \frac{\pi\pi E kk}{aa}$, noſtro caſu pondus, quod eadem columna, quando ſuperne in A laqueari eſt infixa, geſtare valet, quadruplo erit maius.

§. 28. Conuertatur nunc iſtud pondus P in columnam pariter cylindricam eiusdem diametri, ac ponatur, pondus noſtrae columnae A B, cuius altitudo $= a$, eſſe $= A$, altitudinem vero illius columnae ſuper imponendae, cuius pondus inuenimus $= \frac{4\pi\pi E kk}{aa}$, $= p$, eritque

$$a : p = A = \frac{4\pi\pi E kk}{aa},$$

vnde colligitur altitudo $p = \frac{4\pi\pi E kk}{A a}$. Quod ſi ergo talis columna A P inferiori A B imponatur, vt habeatur columna altitudinis $PB = a + \frac{4\pi\pi E kk}{A a}$, haec certe proprio ſub ſuo pondere ſuccumbere debebit, ſiquidem a viribus

ho-

horizontalibus A Q et $a\,q$ constringitur, quippe quae vires vicem gerunt continuitatis: quam ob rem nullum amplius dubium superesse potest, quin, remotis istis viribus horizontalibus, columna pariter sit prolapsura, quoniam remotio harum virium roborem columnae certe non auget.

§. 29. Ecce ergo reuera exhiberi poterit columna tantae altitudinis, quae sub proprio pondere necessario prosternetur, quandoquidem hoc eueniet, si tota columnae altitudo fuerit $= a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$; atque adeo euidens est, talem columnam, notabiliter adeo breuiorem, fractioni resistere non posse. Ponatur enim altitudo inuenta

$$a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa} = b,$$

sitque C pondus columnae, cuius altitudo $= c$, ita vt sit

$$A = \frac{Ca}{c}, \text{ eritque } b = a + \frac{4\pi\pi cEkk}{Caa},$$

in qua expressione si quantitates C et c vt constantes spectemus, eiusmodi valor pro a assignari poterit, vnde altitudo b minimum sortiatur valorem; reperitur enim differentiando

$$\frac{db}{da} = -\frac{8\pi\pi cEkk}{Ca^3} = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{8\pi\pi cEkk}{C} \text{ ideoque } a = 2\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}},$$

quo valore substituto fiet altitudo columnae caducae, quam quaerimus, $b = 3\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}}$. Hinc igitur tandem pro certo asseuerare possumus, pro quauis columnae crassitie et robore semper eiusmodi assignari posse altitudinem, quae ob proprium suum pondus rupturae resistere non valeat; sicque

ſicque paradoxon, et quaeſtio ſuper eo nata, iam manifeſto eſt ſoluta; quamobrem ea, quae in ſuperiore diſſertatione ſub finem in ſententiam, hic aſſertae contrariam, ſunt allata, ſiue dubie expoſita, nunc facile emendari poterunt.

§. 30. Quo vim formulae pro altitudine b inuentae clarius perſpiciamus, in eam introducamus onus, quod columna altitudinis c, cuius pondus ſtatuimus $= C$, ſuſtinere valet, et quod, per experimenta explorandum, tanquam cognitum ſpectemus. Sit iſtud onus $= \Gamma$, atque ex ſuperiore diſſertatione habemus $\frac{\pi\pi Ekk}{cc} = \Gamma$, ita vt habeamus $\pi\pi Ekk = \Gamma cc$, qui ergo valor ſubſtituatur in formula pro altitudine b inuenta, ac reperietur

$$b = 3 \sqrt[3]{\frac{\Gamma c^3}{C}} = 3 c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}};$$

vbi fracto $\frac{\Gamma}{C}$ denotat, quoties onus, ab hac columna ſuſtentatum, ipſum eius pondus ſuperat, cuius ergo radix cubica, per $3c$ multiplicata, praebet altitudinem columnae ex eadem materia confectae et eiusdem diametri, quae ſub proprio ſuo pondere certe ſuccumbet.

§. 31. Quoniam igitur altitudinem b inuenimus columnae, quae proprium pondus certe ſuſtinere nequit, hinc iam viciſſim in linea curua, quam modo ante inuenimus, eam abſciſſam aſſignare poterimus, cui applicata euaneſcens reſpondere debet. Primo ſcilicet, poſito $Ekk = mbb$, inter coordinatas x et y hanc adepti ſumus aequationem:

$$\frac{y}{A} = - x \frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2....7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2....10.m^3} + \text{etc.}$$

deinde ſtatuimus $\frac{x^3}{m} = t$, ita vt ſit $t = \frac{x^3 bb}{Ekk}$. Modo autem vidimus eſſe $Ekk = \frac{\Gamma cc}{\pi\pi}$. Quod ſi ergo iam hic ipſi x

tribua-

tribuamus valorem totius altitudinis b, ob

$$b^3 = 27\, c^3 . \frac{\Gamma}{C} \text{ fiet } t = \frac{27\, b b \pi \pi c}{C}.$$

Quoniam autem c exprimit altitudinem nostrae columnae, et C eius pondus, erit $C = b\, b\, c$, quo valore substituto fit $t = 27\, \pi\, \pi$; vnde discimus, iam ante terminum $t = 27\, \pi\, \pi = 266$ circiter locum existere debere, vbi applicata curuae, y, euanescit.

§. 33. Formula, quam pro maxima columnae altitudine inuenimus, scilicet: $b = 3\, c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}}$, ob summam simplicitatem maxima attentione est digna. Quanquam enim ex casu columnae determinatae, cuius altitudo est $= c$, pondus vero $= C$, est deriuata: tamen facile generalis reddi atque ad omnes plane columnas cylindricas, ex eadem materia confectas, extendi potest. Posita enim istius columnae amplitudine $= b\, b$, erit primo $C = b\, b\, c$; tum vero onus Γ, quod haec sustentare valet, constat esse proportionale quadrato amplitudinis, diuiso per quadratum altitudinis, ita vt sit $\Gamma = \frac{b^4}{c\, c}$, quibus valoribus substitutis erit altitudo nostra maxima $b = 3 \sqrt[3]{b\, b}$, vnde sequens constituatur.

Theorema maxime memorabile.

§. 34. *Maxima altitudo, qua columnae cylindricae, ex eadem materia confectae, proprium pondus etiamnunc sustinere valent, tenet rationem subtriplicatam amplitudinis.* Ita si duae huiusmodi habeantur columnae, quarum diameter, prioris sit D, posterioris vero d, altitudines maximae, quibus proprium pondus adhuc sustentare valent, erunt vt $\sqrt[3]{D\, D} : \sqrt[3]{d\, d}$.

DE