

DE PROBLEMATÉ  
QVODAM  
MECHANICO,  
SATIS OBVIO,  
AT SOLVTV DIFFICILLIMO,

Auctore  
L. EVLERO.

§. 1.

Consideranti mihi hunc versum Virgillii saepius occur-  
rentem :

*Anchora de prora iacitur, stant littore puppes.*  
obtulit se ista quaestio: quomodo naus, postquam ancho-  
ra de prora fuerit iacta, motum suum sit profecutura; vbi  
quidem euidens est, proram alium motum recipere non  
posse, praeter circulaem circa anchoram. At vero tota  
naus interea circa proram motu quodam rotatorio fere-  
tur, quem autem tam ob ipsam resistentiam aquae, quam  
ob eius continuam mutationem, nullo modo per principia  
mechanica determinare licet.

§. 2.

§. 2. Remotis autem his impedimentis quaestio ad hanc formam simplicissimam redigatur :

*Si corpus quodcumque B C D, plano horizontali poli-Tab III. vissimo incumbens, (ut omnis frictio remoueatur) de Fig. 2. puncto B, ope fili B A in puncto A, fixum retineatur, eique motus quicumque imprimatur, inuestigare motum, quo istud corpus deinceps est progressurum.*

### Tentamen Solutionis.

§. 3. Sit massa corporis propositi  $B C D = M$ , eiusque centrum grauitatis sit in  $C$ , momentum vero inertiae, respectu axis verticalis puncto  $C$  insistentis, ponatur  $= M k k$ ; longitudo fili sit  $A B = a$  et interuallum  $B C = b$ . Per punctum  $A$  iam ducatur recta fixa  $A E = e$ , ad quam motus corporis quouis tempore referatur, atque elapso tempore  $= t$  teneat corpus cum filo situm in figura expressum, ponaturque primo angulus  $E A B = \Phi$ , et, producta recta  $C B$  vsque ad rectam  $A E$  in  $L$ , vocetur angulus  $E L B = \Psi$ ; ita vt tota quaestio eo reducatur, vt ad quoduis tempus  $t$  isti bini anguli  $\Phi$  et  $\Psi$  determinentur. Ponatur autem quoque breu. gr. differentia horum angulorum  $\Psi - \Phi = A B L = \omega$ .

§. 4. His factis denominationibus determinationem motus aggrediamur; et quia corpus nullas alias vires sollicitantes sustinet, praeter tensionem fili  $A B$ , ponamus istam tensionem pro hoc tempore  $= T$ , ita vt corpus in puncto  $B$  vi ista  $T$  in directione  $B A$  sollicitetur. Nunc vt prima principia Mechanicae applicare queamus, pro motu corporis progressiuo ex centro  $C$  ad axem  $A E$  ducatur

ducatur normalis  $CX$  et vocentur binae coordinatae  
 $AX = x$  et  $XC = y$ , tumque ex figura erit

$$x = a \cos. \Phi + b \cos. \Psi \quad \text{et} \quad y = a \sin. \Phi + b \sin. \Psi,$$

vnde differentiando colligimus

$$dx = -a d\Phi \sin. \Phi - b d\Psi \sin. \Psi$$

$$dy = +a d\Phi \cos. \Phi + b d\Psi \cos. \Psi$$

$$ddx = -a dd\Phi \sin. \Phi - a d\Phi^2 \cos. \Phi - b dd\Psi \sin. \Psi - b d\Psi^2 \cos. \Psi$$

$$ddy = +a dd\Phi \cos. \Phi - a d\Phi^2 \sin. \Phi - b dd\Psi \cos. \Psi - b d\Psi^2 \sin. \Psi$$

§. 5. Hinc iam ad motum centri grauitatis  $C$  definiendum ei tensio fili  $T$  immediate applicata concipiat, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit pro directione  $XA$  vim  $= T \cos. \Phi$  et pro directione  $CX$  vim  $= T \sin. \Phi$ , vnde principia motus has duas aequationes suppeditant:

$$\frac{ddx}{\alpha dt^2} = -\frac{T \cos. \Phi}{M} \quad \text{et} \quad \frac{ddy}{\alpha dt^2} = -\frac{T \sin. \Phi}{M},$$

vbi elementum temporis  $dt$  constans est assumtum, et  $\alpha$  denotat celeritatem lapsu libero grauium per vnum minutum secundum acquisitam, siquidem tempora in minutis secundis, celeritates vero per spatia, vno minuto secundo percurra, exprimere velimus.

§. 6. Quoniam autem tensio fili  $T$  penitus est incognita, vt eam eliminemus primam aequationem ducamus in  $\sin. \Phi$  secundam vero in  $\cos. \Phi$  atque differentia dabit:  $ddx \sin. \Phi - ddy \cos. \Phi = 0$ , quae aequatio loco  $ddx$  et  $ddy$  substitutis valoribus modo ante traditis, induet hanc formam satis simplicem, ob  $\Psi - \Phi = \omega$ ; scilicet:

$$a dd\Phi + b dd\Psi \cos. \omega - b d\Psi^2 \sin. \omega = 0.$$

Simili

Simili modo primae aequationis, ductae in  $\cos. \Phi$ , et secundae in  $\sin. \Phi$ , summa dabit ipsam tensionis quantitatem

$$T = -M \frac{(d d x \cos. \Phi + d d y \sin. \Phi)}{\alpha d t^2},$$

unde facta substitutione erit:

$$\frac{T}{M} = \frac{a d \Phi^2 + b d d \psi \sin. \omega + b d \psi^2 \cos. \omega}{\alpha d t^2},$$

quam autem cognoscere non datur, antequam totus motus fuerit exploratus.

§. 7. Praeterea etiam plurimum iuuabit istam combinationem in usum vocare, dum prima per  $dx$ , altera vero per  $dy$  multiplicatur, vt horum productorum summa praebeat hanc aequalitatem:

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = -\frac{T}{M} (d x \cos. \Phi + d y \sin. \Phi).$$

At vero est  $d x \cos. \Phi + d y \sin. \Phi = -b d \psi \sin. \omega$ , unde fit

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = \frac{T}{M} b d \psi \sin. \omega,$$

quae aequatio ideo summum usum praestabit, quia membrum finistrum absolute integrari potest, cum eius integrale sit  $\frac{d x^2 + d y^2}{2 \alpha d t^2}$ , vbi notetur esse

$$d x^2 + d y^2 = a a d \Phi^2 + b b d \psi^2 + 2 a b d \Phi d \psi \cos. \omega.$$

§. 8. Expedito motu progressivo motum quoque gyratorium nostri corporis circa centrum grauitatis  $C$  investigemus, qui oritur ex mutatione anguli  $ELC = \psi$ , quippe cuius mutatio dabit quantitatem motus gyratorii. Cum igitur nulla alia vis adsit, praeter tensionem filii  $BA = T$ , cuius momentum respectu centri grauitatis  $C$  est  $b T \sin. \omega$ , quod tendit ad angulum  $\psi$  imminuendum, eius mutatio reperietur, si istud momentum diuidatur per

momentum inertiae corporis,  $M k k$ , vnde secundum principia motus oritur ista aequatio:  $\frac{d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T \sin. \omega}{M k k}$ . Hac igitur formula continetur determinatio motus gyratorii.

§. 9. Quodsi hanc aequationem multiplicemus per  $d \psi$ , orietur

$$\frac{d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M k k}$$

Supra autem vidimus esse

$$\frac{d x d d x + d y d d y}{\alpha d t^2} = \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M}$$

Quare cum nunc sit

$$\frac{k k d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = - \frac{b T d \psi \sin. \omega}{M}, \text{ hinc sequitur fore}$$

$$\frac{d x d d x + d y d d y + k k d \psi d d \psi}{\alpha d t^2} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{d x^2 + d y^2 + k k d \psi^2}{2 \alpha d t^2} = \text{Const.}$$

quae aequatio, loco  $d x^2 + d y^2$  substituto valore ante dato, induet hanc formam:

$$\frac{\alpha a d \phi^2 + (b b + k k) d \psi^2 + 2 a b d \phi d \psi \cos. \omega}{2 \alpha d t^2} = C.$$

§. 10. Evidens est hanc aequationem involuere vim viuam, quae in corpore inest, cum  $\frac{d x^2 + d y^2}{\alpha d t^2}$  exprimat quadratum celeritatis, quae centrum grauitatis corporis  $C$  promouetur, et  $\frac{d \psi^2}{\alpha d t^2}$  exprimat quadratum celeritatis angularis; vnde patet, in corpore semper eandem quantitatem vis viuae conseruari, quae ergo semper manebit aequalis illi vi vivae, quae corpori initio fuerit impressa.

§. 11. Iam igitur affecuti sumus duas aequationes a tensione fili  $T$  liberatas, quarum prior, §. 6 inuenta, est

est differentialis secundi gradus; posteriorem vero modo inuentam ad primum gradum reducere licuit, atque hae duae aequationes totam problematis solutionem complectuntur, quae sunt:

$$I. \ a d d \Phi + b d d \Psi \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0$$

$$II. \ \frac{a a d \Phi^2 + (b b + k k) d \Psi^2 + 2 a b d \Phi d \Psi \cos. \omega}{d t^2} = f f.$$

His enim ad quoduis tempus  $t$  bini anguli  $\Phi$  et  $\Psi$  determinari debent, namque praeter tempus  $t$  ambo tantum anguli  $\Phi$  et  $\Psi$  in his aequationibus insunt, propter  $\omega = \Psi - \Phi$ .

§. 12. Nunc autem loco angulorum  $\Phi$  et  $\Psi$  introducamus in calculum ipsas celeritates angulares, quibus corpus partim circa punctum fixum et partim circa proprium centrum grauitatis  $C$  gyratur, ponamusque celeritatem angularem circa punctum  $A = \frac{d \Phi}{d t} = u$ , et circa centrum grauitatis  $C$  celeritatem angularem  $\frac{d \Psi}{d t} = v$ , hocque modo posterior aequatio iam penitus ad quantitates finitas reducetur, quippe quae erit:

$$a a u u + (b b + k k) v v + 2 a b u v \cos. \omega = f f.$$

Pro priore vero aequatione, cum sit  $d \Phi = u d t$  et  $d \Psi = v d t$ , ob  $d t$  sumtum constans, erit  $d d \Phi = d u d t$  et  $d d \Psi = d v d t$ . Quia vero est  $d t = \frac{d \Phi}{u}$ , itemque  $d t = \frac{d \Psi}{v}$ , eliminando tempusculum  $d t$ , erit

$$d d \Phi = \frac{d \Phi d u}{u} \text{ et } d d \Psi = \frac{d \Psi d v}{v},$$

hincque prior aequatio reducetur ad hanc formam:

$$\frac{a d \Phi d u}{u} + \frac{b d \Psi d v}{v} \cos. \omega - b d \Psi^2 \sin. \omega = 0.$$

§. 14. Quia autem haec aequatio praeter celeritates  $u$  et  $v$  adhuc elementa  $d\Phi$  et  $d\Psi$  continet, ea ex calculo expelli oportet. Cum ergo fit  $d\Phi = u dt$  et  $d\Psi = v dt$ , erit  $d\Psi - d\Phi = d\omega = (v - u) dt$ , vnde fiet  $dt = \frac{d\omega}{v - u}$ , hincque  $d\Phi = \frac{u d\omega}{v - u}$  et  $d\Psi = \frac{v d\omega}{v - u}$ , quibus valoribus substitutis erit aequatio postrema.

$$a du + b dv \cos. \omega - \frac{b v v d\omega \sin. \omega}{v - u} = 0.$$

Sicque duas habemus aequationes inter ternas variables  $v$ ,  $u$ , et  $\omega$ ; vnde totum negotium eo redit, vt binae per tertiam definiantur. Quem in finem in eo est elaborandum, vt, vna harum trium quantitarum elisa, ad vnicam aequationem, binas tantum variables inuoluentem, solutio perducatur.

§. 15. Hic quidem primo videtur ex aequatione finita quaeri posse valorem  $\cos. \omega$ , qui cum suo differentiali in altera aequatione substitutus produceret aequationem differentialem inter binas celeritates  $u$  et  $v$ , quae autem tantopere erit perplexa, vt nihil plane inde concludi queat. Verum in alium modum incidi, ad duas tantum variables perueniendi, per aequationem multo simpliciore, quae autem nihilominus ita est comparata, vt omnia artificia analytica adhuc cognita frustra pro ea euoluenda in subsidium vocentur. Interim tamen haud inutile videtur, hanc ipsam operationem hic ob oculos exponere, quo clarius pateat, cuiusmodi incrementis Analysis adhuc indigeat.

§. 16. Hic primo statim ponatur  $u = p v$  et aequatio iam erit:

$$(a a p p$$

$(a a p p + b b + k k + 2 a b p \cos. \omega) v v = f f,$   
 quae, posito porro  $b b + k k = b c$ , fit simplicior, scil.

$$v v (a a p p + b c + 2 a b p \cos. \omega) = f f,$$

vbi notasse iuuabit, si corpus ex ipso puncto B suspenderetur, distantiam centri oscillationis ab hoc puncto futuram esse  $= b + \frac{k k}{b} = c$ . Praeterea vero faciamus  $b \cos. \omega = z$ , et aequatio nostra induet hanc formam:

$$v v (a a p p + b c + 2 a p z) = f f,$$

quae per logarithmos dat

$$2 l v + l (a a p p + b c + 2 a p z) = 2 l f,$$

vnde differentiando fit

$$\frac{d v}{v} = \frac{-a a p d p - a (p d z + z d p)}{a a p p + b c + 2 a p z}.$$

§. 17. Simili modo etiam in altera aequatione differentiali, posito  $u = v p$  et  $b \cos. \omega = z$ , vt fiat  $b d \omega \sin. \omega = -d z$ , habebimus,

$$a (p d v + v d p) + 2 d v + \frac{v d z}{1-p} = 0,$$

quae per  $v$  diuisa praebet

$$\frac{d v}{v} = -\frac{a d p}{a p + z} - \frac{d z}{(1-p)(a p + z)}.$$

Hic iam loco  $\frac{d v}{v}$  substituatur valor ante inuentus, orieturque sequens aequatio inter binas variables  $p$  et  $z$ :

$$\frac{a d p}{a p + z} + \frac{d z}{(1-p)(a p + z)} = \frac{a a p d p + a (p d z + z d p)}{a a p p + b c + 2 a p z},$$

quae sublatis fractionibus reducitur ad hanc:

$$a(1-p)(bc - zz) dp + (bc + aap^2 + apz(1+p)) dz = 0.$$



§. 18. Ecce ergo tota Problematis nostri Solutio perducta est ad hanc aequationem differentialem primi gradus, parum complicatam, inter binas variables  $p$  et  $z$ , unde si licuerit  $z$  per  $p$  modo finito definire, etiam quadratum  $vv$  per  $p$  definiretur, hincque porro altera celeritas  $u = pv$ ; quam ob rem plurimum optandum esset ut Geometrae vires suas excercerent in ista aequatione resoluenda. Vbi notasse iuuabit, si vltimum membrum  $pz(1+p)$  abesset, totam aequationem nulla difficultate esse laboraturam, quia separationem variabilium sponte admitteret: foret enim  $\frac{(1-p)dp}{bc+ap^2} = \frac{dz}{bc-zz}$ . Ante autem quam haec inuentio fuerit facta, vltius progredi non licet.

### Supplementum.

continens Solutionem perfectam Problematis.

§. 19. Postquam praecedens scriptum absolueram, prorsus desperans de resolutione aequationis differentialis, ad quam sum perductus, nihilo tamen minus rem variis modis deinceps tentavi, et tandem per longas ambages contigit mihi eruere aequationem integram, atque adeo algebraicam, quam hic comunicaturus sum; ipsam autem Analyfin, qua sum vsus, in aliam occasionem reseruare est visum,

§. 20. Perueneram autem ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$a(1-p)(bc-zz)dp + bc + ap^2 + apz(1+p)dz = 0,$$

vbi

vbi ex praecedentibus elementis erat  $p = \frac{u}{a}$ ,  $z = b \cos. \omega$  et  $bc = b^2 + k^2$ . Hanc aequationem porro, ponendo  $z = as$  et  $\frac{bb + kk}{aa} = nn$ , ita vt fit  $s = \frac{b}{a} \cos. \omega$ , ad hanc formam simpliciore[m] reduxi:

$dp(1-p)(nn - ss) + ds(nn + p^2 + ps(1+p)) = 0$ , quippe quae, praeter binas variables  $p$  et  $s$ , vnicam constantem  $nn$  involvit, atque huius aequationis integrale completum inueni esse

$$\frac{nn + ps + p + s}{\sqrt{nn + pp + 2ps}} = C.$$

§. 21. Quoniam autem Analyfin, quae me huc perduxit, exponendam in aliud tempus refero, hic sufficit veritatem huius integralis demonstrare. Ostendam enim, si haec formula differentietur, tum ipsam aequationem integrandam reuera resultare. Euidens autem est, differentiale huius formulae fore fractionem, cuius denominator est  $(nn + pp + 2ps)^{\frac{3}{2}}$ , per quam ergo si aequatio proposita diuidatur, integrabilis euadat necesse est.

§. 22. Numerator istius differentialis duabus constabit partibus, altera per  $dp$  altera per  $ds$  affecta; vtramque igitur seorsim inuestigemus. Ac prior quidem pars erit

$dp(s+1)(nn + pp + 2ps) - dp(p+s)(nn + ps + p+s)$  quae reducitur ad hanc formam:  $dp(1-p)(nn - ss)$ , quae est ipsa pars prior aequationis propositae. Simili modo reperitur altera pars

$$= ds(p+1)(nn + pp + 2ps) - p ds(nn + ps + p+s),$$

quae

quae reducitur ad  $ds(nn+p^2+ps(1+p))$ , id quod cum membro secundo aequationis propositae conuenit.

§. 23. Ex hac igitur aequatione integrali definiri poterit  $s$  per  $p$ , cuius valor ita se habet:

$$s = \frac{ccp - (p+1)(p+uu) + c\sqrt{(ccpp + (pp-1)(pp-nn))}}{(p+1)^2}$$

vnde, ob  $s = \frac{b \cos. \omega}{a}$ , angulus  $\omega$  per variabilem  $p$  exprimitur. Deinde vero aequatio integralis primum inuenta

$$ff = (aapp + bc + 2abp \cos. \omega)vv,$$

ob  $\frac{bc}{aa} = nn$ , dabit  $vv = \frac{ff}{aa(nn+pp+2ps)}$ , ideoque etiam  $v$  per  $p$  definitur, cum fit  $v = \frac{fp}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$ , vnde ob positum  $u = pv$  erit etiam  $u = \frac{fp}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$ . Hinc porro etiam ipsi anguli  $\Psi$  et  $\Phi$  per has formulas integrandas inuestigantur:  $\Phi = \int \frac{u d\omega}{v-u}$  et  $\Psi = \int \frac{v d\omega}{v-u}$ , ac denique, cum fit  $\frac{d\Phi}{u} = dt$ , vel etiam  $\frac{d\Psi}{v} = dt$ , ipsum quoque tempus  $t$  per eandem variabilem  $p$  determinabitur. Erit enim  $t = \int \frac{d\omega}{v-u}$ , sicque omnia sunt determinata quae ad perfectam Problematis solutionem spectant.

§. 24. Praeterea vero etiam notasse iuuabit interternas variables  $v$ ,  $u$  et  $\omega$  duas aequationes algebraicas dari posse; si enim in integrali aequatione inuenta loco  $p$  scribatur  $\frac{u}{v}$ , ob  $\sqrt{(nn+pp+2ps)} = \frac{f}{av}$  et  $s = \frac{b \cos. \omega}{a}$ , erit illa aequatio

$$Cf = b \cos. \omega (v+u) + a(u+nnv).$$

Ante autem iam inueneramus esse

$$\frac{ff}{aa} = nnvv + uu + \frac{2b}{a} uv \cos. \omega.$$

§. 25. Initio vero iam inueneramus aequationem differentialem inter easdem ternas variables  $v, u, \omega$ , quae erat:  $a du + b dv \cos. \omega = \frac{bv v d \cos. \omega}{v - \omega}$ . Haec ergo cum binis praecedentibus integralibus conuenire debet, quae, si constantes per integrationem ingressas paulisper mutemus, ponendo  $\frac{f}{a} = g$  et  $\frac{f c}{a} = b$ , erunt:

$$g g = u u + n n v v + \frac{b u v}{a} \cos. \omega$$

$$b = \frac{b \cos. \omega}{a} (v + u) + u + n n v,$$

atque hanc conuenientiam contemplanti haud difficile erit viam multo planiorem inuenire, quae ad eandem integrationem, tanto labore erutam, perducatur.