



DE

MOTU OSCILLATORIO MIXTO

PLURIVM PENDVLORVM

EX EODEM CORPORE MOBILI SVSPENSORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit A, A', A'' corpus quodcunque, quod libere gyri Tab. II.
 queat circa punctum O , seu potius circa axem hori- Fig. 1.
 zontalem, ad planum figuræ, quod verticale est intelligen-
 dum, normalem, atque in quocunque eius punctis $A, A',$
 A'', A''' , etc. suspensa sint pendula $AL, A'L', A''L''$ etc.,
 quæ ergo singula motum oscillatorium recipere possunt,
 dum ipsum corpus circa punctum O oscillationes peragit;
 quo posito quaeritur, qualis motus in hoc corpore et
 omnibus pendulis oriri debeat, postquam illis initio motus
 quicunque fuerit impressus. Per se autem manifestum est
 hic non nisi de oscillationibus minimis quaestionem esse
 posse.

§. 2. Antequam autem in hos motus inquiram,
 considerari oportet statum aequilibræ, in quo corpus cum
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. III. P. I. M omni-

omnibus pendulis quiescere possit. Hunc in finem per O ducatur recta horizontalis EOF, et ductis ex O ad singula puncta A, A', A'' etc., ex quibus pendula suspenduntur, rectis OA, OA', OA'' etc. vocentur istae rectae $OA = a$, $OA' = a'$, $OA'' = a''$ etc.; tum vero ponantur anguli $EOA = \alpha$, $EOA' = \alpha'$, $EOA'' = \alpha''$ etc.; has scilicet distantias et angulos similibus literis designo, ut, quod de vno dicitur, simul ad omnia reliqua transferri possit. Porro huius corporis massa vocetur $= M$, eiusque momentum inertiae respectu puncti O $= M k k$; eius vero centrum grauitatis reperiatur in puncto G, pro quo fit distantia $OG = e$ et angulus $EOG = \varepsilon$, qui quidem foret rectus in statu aequilibrii, si de solo hoc corpore esset fermo; verum hic simul consideramus omnia pendula AL, A'L', A''L'' etc., quae singula situm teneant verticalem; ac primo eorum longitudines ita designemus: $AL = l$, $A'L' = l'$, $A''L'' = l''$ etc., quas tanquam fila grauitatis expertia spectamus, quibus appensa sint corpora L, L', L'' etc. Cum iam in hoc statu detur aequilibrium, necesse est vt summa omnium momentorum respectu puncti O nihilo fiat aequalis, vnde oritur sequens aequatio:

$$M e \cos. \varepsilon + L a \cos. \alpha + L' a' \cos. \alpha' + L'' a'' \cos. \alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

§. 3. Nunc autem, postquam hoc corpus cum pendulis suis de statu aequilibrii vtcunque fuerit deturbatum, elapso tempore $= t$ ipsum corpus declinet a situ aequilibrii angulo quam minimo $= \Phi$, ita vt iam singuli anguli α , α' , α'' etc. vna cum angulo ε idem acceperint augmentum Φ ; tum vero singula pendula declinent a directione verticali sinistrorsum angulis minimis ω , ω' , ω'' etc., ac praeterea sint vires, quibus singula pendula tenduntur T, T', T'' etc.; qui-

quibus positis inuestigandum est, quantis viribus, tam ipsum corpus, quam singula pendula, ad motum concitentur.

§. 4. Quod igitur ad ipsum corpus M, quatenus circa punctum O est mobile, attinet, id primum a proprio pondere, in centro grauitatis G collecto, sollicitatur, cuius vis momentum est

$$M \cdot O G \cdot \cos. (\varepsilon + \Phi) = M e \cos. (\varepsilon + \Phi).$$

Quia nunc angulus ε incrementum cepit Φ , ob hunc angulum Φ infinite paruum, erit.

$$\cos. (\varepsilon + \Phi) = \cos. \varepsilon - \Phi \sin. \varepsilon$$

vnde hoc momentum erit $M e \cos. \varepsilon - M e \Phi \sin. \varepsilon$, quod tendit dextrorsum ideoque ad inclinationem Φ augendam; si quidem positium habuerit valorem. Praeterea vero hoc corpus sollicitatur a singulis pendulis, quatenus scilicet fila A L, A' L', A'' L'' etc. viribus T, T', T'' tenduntur, vbi sufficet vnicum considerasse. Igitur ex pendulo A L, si situm teneret verticalem, oriretur momentum

$$T \cdot O A \sin. O A L = T a \cos. (\alpha + \Phi),$$

quia scilicet angulus α incrementum cepit $= \Phi$; quoniam autem hoc pendulum sinistrorsum a situ verticali declinat angulo ω , erit hoc momentum

$$T a \cos. (\alpha + \Phi + \omega) = T a \cos. \alpha - T a (\Phi + \omega) \sin. \alpha$$

quod pariter ad inclinationem Φ augendam tendit; vnde omnia momenta ex pendulis nata erunt

$$T a \cos. \alpha + T' a' \cos. \alpha' + T'' a'' \cos. \alpha'' \\ - T a (\Phi + \omega) \sin. \alpha - T' a' (\Phi + \omega') \sin. \alpha' - T'' a'' (\Phi + \omega'') \sin. \alpha''.$$

§. 5. Ponamus breuitatis gratia

$$T a \cos. \alpha + T' a' \cos. \alpha' + T'' a'' \cos. \alpha'' + \text{etc.} = P,$$

$$T a \sin. \alpha + T' a' \sin. \alpha' + T'' a'' \sin. \alpha'' + \text{etc.} = Q, \text{ et}$$

$$T a \omega \sin. \alpha + T' a' \omega' \sin. \alpha' + T'' a'' \omega'' \sin. \alpha'' + \text{etc.} = \Omega$$

ita vt totum momentum, motum gyratorium corporis A accelerans, fit

$$M e \cos. \varepsilon - M e \Phi \sin. \varepsilon + P - Q \Phi - \Omega;$$

vnde, cum momentum inertiae corporis M, respectu puncti O, positum fit = M k k, principia motus hanc suppeditant aequationem:

$$\frac{d d \Phi}{2 g d t^2} = \frac{M e \cos. \varepsilon - M e \Phi \sin. \varepsilon + P - Q \Phi - \Omega}{M k k}.$$

Euidens autem est, quia singula pendula tantum infinite parum a situ verticali declinant, tensiones filorum ipsis ponderibus L, L', L'' fore aequales; vnde, cum supra pro statu aequilibrui effert

$$M e \cos. \varepsilon + L a \cos. \alpha + L' a' \cos. \alpha' + L'' a'' \cos. \alpha'' + \text{etc.} = 0$$

erit hic $M e \cos. \varepsilon + P = 0$, ita vt iam habeamus

$$\frac{d d \Phi}{2 g d t^2} = - \frac{M e \Phi \sin. \varepsilon - Q \Phi - \Omega}{M k k},$$

existente

$$Q = L a \sin. \alpha + L' a' \sin. \alpha' + L'' a'' \sin. \alpha'' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = L a \omega \sin. \alpha + L' a' \omega' \sin. \alpha' + L'' a'' \omega'' \sin. \alpha'' + \text{etc.}$$

Tab. II.
Fig. 2.

§. 6. Porro pro motu singulorum pendulorum de-
finiendo vnicum considerasse sufficiet. Hunc in finem
ex puncto L in axem horizontalem O E ducatur vertica-
lis L P, vt pro puncto L habeamus coordinatas O P = x
et P L = y; tum autem ducta etiam verticali a A a et ho-
rizontali A b, ob angulum A O P = $\alpha + \Phi$, erit

O w

$O a = a \cos. (\alpha + \Phi)$ et $A a = a \sin. (\alpha + \Phi)$.

Deinde ob angulum $LA a = \omega$ erit

$A b = l \sin. \omega$ et $L b = l \cos. \omega$,

vnde colligitur

$OP = x = a \cos. (\alpha + \Phi) + l \sin. \omega = a \cos. \alpha - a \Phi \sin. \alpha + l \omega$, et

$PL = y = a \sin. (\alpha + \Phi) + l \cos. \omega = a \sin. \alpha + a \Phi \cos. \alpha + l$.

§. 7. Vires autem corpus L vrgentes sunt primo eius pondus $= L$, quod tendit ad quantitatem y augendam, tum vero, ob tensionem filii T , sursum vrgetur vi $= T \cos. \omega = T$, dextrorsum autem vi $= T \sin. \omega = T \omega$; vnde ex principiis motus nanciscimur has aequationes:

$\frac{d d x}{z g d t^2} = - \frac{T \omega}{L}$ et $\frac{d d y}{z g d t^2} = \frac{L - T}{L}$;

hinc, pro x et y valores substituendo, habebimus has aequationes:

$-\frac{a d d \Phi \sin. \alpha + l d d \omega}{z g d t^2} = - \frac{T \omega}{L}$ et $\frac{a d d \Phi \cos. \alpha}{z g d t^2} = \frac{L - T}{L}$;

ex qua posteriore intelligitur, tensionem T infinite parum a pondere L discrepare, quia membrum $\frac{a d d \Phi \cos. \alpha}{z g d t^2}$ pro infinite paruo est habendum. Posito ergo $T = L$ sola aequatio prior nobis relinquatur, quae est

$\frac{- a d d \Phi + l d d \omega}{z g d t^2} = - \omega$.

§. 8. Similes plane aequationes pro singulis reliquis pendulis reperiuntur. Verum quo omnes has aequationes concinniores reddamus, ponamus breuitatis gratia

$a \sin. \alpha = b$; $a^I \sin. \alpha^I = b^I$; $a^{II} \sin. \alpha^{II} = b^{II}$; etc.

$a \cos. \alpha = c$; $a^I \cos. \alpha^I = c^I$; $a^{II} \cos. \alpha^{II} = c^{II}$; etc.

fic enim erit

$$Q = L b + L' b' + L'' b'' + L''' b''' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = L b \omega + L' b' \omega' + L'' b'' \omega'' + \text{etc.}$$

vnde erit primo pro motu ipsius corporis

$$\frac{d d \Phi}{2 g d t^2} = - \frac{M e \Phi \sin. \epsilon}{M k k} - \frac{Q \Phi - \Omega}{k k};$$

pro singulis autem pendulis erunt aequationes

$$\text{I. } \frac{-b d d \Phi + l d d \omega}{2 g d t^2} = - \omega;$$

$$\text{II. } \frac{-b' d d \Phi + l' d d \omega'}{2 g d t^2} = - \omega';$$

$$\text{III. } \frac{-b'' d d \Phi + l'' d d \omega''}{2 g d t^2} = - \omega'';$$

$$\text{IV. } \frac{-b''' d d \Phi + l''' d d \omega'''}{2 g d t^2} = - \omega''';$$

quibus aequationibus totus motus determinatur. Pro statu autem aequilibrii recordandum est esse

$$M e \cos. \epsilon + L c + L' c' + L'' c'' + L''' c''' + \text{etc.} = 0.$$

§. 9. Quia in his omnibus aequationibus incognitae Φ , ω , ω' , ω'' , ω''' etc. vbique vnicam tantum tenent dimensionem, pro earum resolutione methodo iam saepius adhibita vtamur, vnde primo quidem tantum solutionem specialem reperimus, qua singuli motus instar pendulorum simplicium absoluuntur. Pro angulo igitur Φ statuamus, pendulum simplex, eius motui isochronum, esse $= r$, ita vt fit $\frac{d d \Phi}{2 g d t^2} = - \frac{\Phi}{r}$; vnde deducitur integrando $\Phi = F \sin (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}})$; vbi F et f sunt constantes arbitrariae per integrationes ingressae; quantitas autem r etiamnunc est incognita ex reliquis motibus determinanda, pro qua cum plures eruturi simus valores, iis coniungendis solutionem generalissimam completam adipiscemur.

§. 10. In nostris igitur aequationibus vbique loco formulae $\frac{d d \Phi}{2 g d t^2}$ scribamus eius valorem $-\frac{\Phi}{r}$; tum vero statuamus

$$\omega = b \Phi, \omega' = b' \Phi, \omega'' = b'' \Phi, \text{ etc.}$$

vt fit

$$\frac{d d \omega}{2 g d t^2} = -\frac{b \Phi}{r}, \frac{d d \omega'}{2 g d t^2} = -\frac{b' \Phi}{r}, \frac{d d \omega''}{2 g d t^2} = -\frac{b'' \Phi}{r}, \text{ etc.}$$

quibus substitutis omnes nostras aequationes per angulum Φ diuidere licebit, hincque pro singulis pendulis sequentes orientur aequalitates:

$$\text{I. } \frac{b}{r} - \frac{b l}{r} = -b, \text{ vnde fit } b = \frac{b}{l-r};$$

$$\text{II. } \frac{b'}{r} - \frac{b' l'}{r} = -b' \quad - \quad b' = \frac{b'}{l'-r};$$

$$\text{III. } \frac{b''}{r} - \frac{b'' l''}{r} = -b'' \quad - \quad b'' = \frac{b''}{l''-r};$$

etc.

etc.

etc.

Aequatio autem pro motu ipsius corporis euadet

$$-\frac{\Phi}{r} = -\frac{M e \Phi \sin. \varepsilon - Q \Phi - \Omega}{M k k},$$

vbi cum fit

$$Q = L b + L' b' + L'' b'' + L''' b''' + \text{ etc. et}$$

$$\Omega = L b b \Phi + L' b' b' \Phi + L'' b'' b'' \Phi + \text{ etc.}$$

his valoribus substitutis, si praeterea loco b, b', b'' etc. valores ante inuenti surrogentur, orietur sequens aequatio:

$$0 = \frac{M k k}{r} - M e \sin. \varepsilon - Q - \frac{L b b}{l-r} - \frac{L' b' b'}{l'-r} - \frac{L'' b'' b''}{l''-r} - \text{ etc.}$$

ex qua aequatione quantitatem incognitam r erui oportet.

§. 11. Quo hanc aequationem ad formam commodiorem redigamus, totam per $M e \sin. \varepsilon + Q$ deuidamus, ponamusque breuitatis gratia

$$\frac{M k k}{M e \sin. \varepsilon + Q} = m,$$

tum

tum vero

$\frac{I b b}{M e \sin. \varepsilon + Q} = n; \quad \frac{I' b' b'}{M e \sin. \varepsilon + Q} = n'; \quad \frac{I'' b'' b''}{M e \sin. \varepsilon + Q} = n''; \quad \text{etc.}$

et impetrabimus hanc aequationem :

$$0 = \frac{m}{r} - 1 - \frac{n}{l-r} - \frac{n'}{l'-r} - \frac{n''}{l''-r} - \text{etc.}$$

quae aequatio, in ordinem redacta pro incognita r , ascendet ad gradum unitate altiolem quam est numerus pendulorum.

§. 12. Totum ergo negotium reductum est ad resolutionem aequationis algebraicae, cuius radicem r erui oportet; unde si radix quaecunque r fuerit inuenta, ex ea solutio particularis nostri problematis deriuabitur, quae sequentibus formulis continebitur :

$$\begin{aligned} \Phi &= F \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}}), & \omega &= \frac{F b}{l-r} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}}), \\ \omega' &= \frac{F b'}{l'-r} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}}), & \omega'' &= \frac{F b''}{l''-r} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}}), \\ \omega''' &= \frac{F b'''}{l'''-r} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{r}}); \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Sicque hoc casu omnes oscillationes, tam ipsius corporis, quam singulorum pendulorum, erunt regulares et inter se isochronae, dum omnes respondent pendulo simplici, cuius longitudo $= r$, unde tempus vnus cuiusque oscillationis erit $= \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$.

§. 13. Quotquot igitur quantitas r habuerit radices, ex singulis talis motus regularis oriri potest; singuli autem per se tantum speciem motus specialissimam complectuntur. At vero si omnes istae species inter se quomodocunque coniungantur, solutio inde resultabit generalissima, quae omnes plane motus, quos hoc systema recipere potest, in se complectitur, ita vt, quomodocunque totum

tum systema initio fuerit agitatum et de statu aequilibrum deturbatum, verus motus, qui sequetur, assignari valeat.

§. 14. Vt hinc igitur istam solutionem maxime generalem adipiscamur, omnes valores ipsius r per sequentes characteres indicemus: a, b, c, d, e etc. pro coefficiente autem F scribamus successive litteras Germanicas maiusculas: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ etc. atque formulae solutionem generalem praebentes erunt:

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathfrak{A} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{a}}) + \mathfrak{B} \sin. (f' + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \\ &\quad + \mathfrak{C} \sin. (f'' + t \sqrt{\frac{2g}{c}}) + \text{etc.} \\ \omega &= \frac{\mathfrak{A} b}{l-a} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{a}}) + \frac{\mathfrak{B} b}{l-b} \sin. (f' + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{C} b}{l-c} \sin. (f'' + t \sqrt{\frac{2g}{c}}) + \text{etc.} \\ \omega^I &= \frac{\mathfrak{A} b'}{l'-a} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{a}}) + \frac{\mathfrak{B} b'}{l'-b} \sin. (f' + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{C} b'}{l'-c} \sin. (f'' + t \sqrt{\frac{2g}{c}}) + \text{etc.} \\ \omega^{II} &= \frac{\mathfrak{A} b''}{l''-a} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{a}}) + \frac{\mathfrak{B} b''}{l''-b} \sin. (f' + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{C} b''}{l''-c} \sin. (f'' + t \sqrt{\frac{2g}{c}}) + \text{etc.} \\ \omega^{III} &= \frac{\mathfrak{A} b'''}{l'''-a} \sin. (f + t \sqrt{\frac{2g}{a}}) + \frac{\mathfrak{B} b'''}{l'''-b} \sin. (f' + t \sqrt{\frac{2g}{b}}) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{C} b'''}{l'''-c} \sin. (f'' + t \sqrt{\frac{2g}{c}}) + \text{etc.} \\ \text{etc.} &\qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Hic autem supponitur, omnes ipsius r valores esse inter se inaequales; si enim duo pluresue inter se essent aequales, solutio haec non amplius foret generalis, sed peculiari artificio opus foret, vt inde solutio generalis obtineatur.

§. 15. Quod quo clarior apparet, ponamus pendulorum numerum esse $= \lambda$, et cum peruenerimus ad
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. III. P. I. N hanc

hanc aequationem:

$$0 = \frac{m}{r} - 1 - \frac{n}{l-r} - \frac{n'}{l'-r} - \frac{n''}{l''-r} - \text{etc.}$$

si eam, ad fractiones tollendas, multiplicemus per productum omnium denominatorum $r(l-r)(l'-r)(l''-r)$ etc. prodibit aequatio ordinis $\lambda + 1$, si quidem omnes denominatores fuerint inaequales, quod euenit si omnium pendulorum longitudines l, l', l'' etc. fuerint inaequales. At si duae sint inter se aequales, puta $l' = l$, aequatio illa factorem habebit $l-r$, vnde radix prodiret $r = l$, qui tamen valor in nostris formulis locum habere nequit. Si enim esset $a = l$, valores angulorum $\omega, \omega', \omega''$ fierent infiniti; quod incommodum multo magis turbaret, si plura quam duo pendula haberent eandem longitudinem; vnde his casibus aliae radices pro r admitti nequeunt, nisi quae ex nostra aequatione resultant, postquam ea fuerit diuisa per $l-r$, vel $(l-r)^2$, vel $(l-r)^3$ etc., prout plura pendula fuerint inter se aequalia; quare, ob diminutum numerum valorum ipsius r , non amplius tot constantes arbitrariae in calculum introducentur, quot requiruntur ad solutionem generalem reddendam.

§. 16. Quin etiam apparet, si esset $\lambda' = \lambda$, tum valores angulorum ω et ω' datam inter se habituros esse rationem, scilicet vt b ad b' , siue valores fractionum $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ inter se futuros esse aequales; quod si vero insuper $l'' = l' = l$, hi tres valores: $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$ et $\frac{\omega''}{b''}$ inter se forent aequales, sicque haec pendula similem motum oscillatorium essent habitura. Neque ergo haec solutio amplius esset generalis, cum iam in ipso initio his pendulis diuersus motus imprimi posset; quocirca his casibus formulae nostrae

frae inuentae quadam correctione indigebunt, qua tot no-
uae constantes introducantur, quot ad solutionem comple-
tam postulantur. Has igitur correctiones omnino necesse
erit inuestigare.

§. 17. Ponamus igitur duo pendula longitudine
inter se esse aequalia, siue esse $l = l'$; hinc autem duae
aequationes differentio differentiales primae erunt:

$$\begin{aligned} -\frac{b \, d d \Phi + l \, d d \omega}{2 \, g \, d t^2} &= -\omega, \text{ et} \\ -\frac{b' \, d d \Phi + l \, d d \omega'}{2 \, g \, d t^2} &= -\omega'; \end{aligned}$$

vnde, si posterior per b' diuisa a priore per b diuisa sub-
trahatur, remanebit:

$$\frac{l}{2 \, g \, d t^2} \left(\frac{d \, d \omega}{b} - \frac{d \, d \omega'}{b'} \right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'}.$$

Hinc si ponamus

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'} &= 2 \, p \text{ et } \frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = 2 \, q, \text{ vt fiat} \\ \frac{\omega}{b} &= p + q \text{ et } \frac{\omega'}{b'} = p - q \end{aligned}$$

litera p manifesto exprimit valores illos aequales, qui
ex superiori solutione pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ prodierunt, ita vt nunc
ad alterum quantitas q addi, ab altero vero subtrahi de-
beat. Aequatio autem inuenta nunc induet hanc formam:

$$\frac{l}{2 \, g \, d t^2} 2 \, d \, d \, q = -2 \, q, \text{ siue } \frac{d \, d \, q}{2 \, g \, d t^2} = -\frac{q}{l},$$

qua motus penduli simplicis longitudinis $= l$ exprimitur,
ita vt sit $q = \mathfrak{J} \sin. (i + t \sqrt{\frac{2 \, g}{l}})$. Hinc ergo quaesita cor-
rectio pro casu, quo $l = l'$, in hoc consistit, vt, si p denotet
valores supra exhibitos pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$, nunc reuera sit

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{b} &= p + \mathfrak{J} \sin. (i + t \sqrt{\frac{2 \, g}{l}}) \text{ et} \\ \frac{\omega'}{b'} &= p - \mathfrak{J} \sin. (i + t \sqrt{\frac{2 \, g}{l}}); \end{aligned}$$

ficque duae nouae constantes \mathfrak{J} et i in calculum sunt introductae. Reliquorum autem pendulorum pariter atque ipsius corporis motus iidem manent ac supra sunt inuenti.

§. 18. Sint nunc tria pendula I , I' et I'' inter se aequalia, tum praeter duas superiores aequationes accedit nunc insuper tertia

$$-\frac{b'' \frac{d}{dt} \frac{d\Phi}{dt} + l \frac{d}{dt} \frac{d\omega''}{dt}}{2g \frac{d}{dt} t^2} = -\omega'';$$

Nunc igitur ex prima et tertia colligitur:

$$\frac{l}{2g \frac{d}{dt} t^2} \left(\frac{d}{dt} \frac{d\omega}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{d\omega''}{dt} \right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega''}{b''};$$

at vero ex secunda ac tertia

$$\frac{l}{2g \frac{d}{dt} t^2} \left(\frac{d}{dt} \frac{d\omega'}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{d\omega''}{dt} \right) = -\frac{\omega'}{b'} + \frac{\omega''}{b''}.$$

Hinc, si vt supra operemur, reperiemus simili modo

$$\frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = \mathfrak{J} \sin. (i + t \sqrt{\frac{2g}{l}})$$

$$\frac{\omega'}{b'} - \frac{\omega''}{b''} = \mathfrak{J}' \sin. (i' + t \sqrt{\frac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} - \frac{\omega}{b} = \mathfrak{J}'' \sin. (i'' + t \sqrt{\frac{2g}{l}}),$$

quarum ergo trium formularum summa nihilo debet esse aequalis, vnde sequitur fore

$$\mathfrak{J} \sin. i + \mathfrak{J}' \sin. i' + \mathfrak{J}'' \sin. i'' = 0 \text{ et}$$

$$\mathfrak{J} \cos. i + \mathfrak{J}' \cos. i' + \mathfrak{J}'' \cos. i'' = 0,$$

vnde numerus constantium ad quatuor reducitur. His notatis, si p denotet quantitatem, quae supra pro formulis $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$, $\frac{\omega''}{b''}$ fuit inuenta, nunc, correctione adiecta, habebimus

$$\frac{\omega}{b} = p + \mathfrak{J} \sin. (i + t \sqrt{\frac{2g}{l}})$$

$$\frac{\omega'}{b'} = p + \mathfrak{J}' \sin. (i' + t \sqrt{\frac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} = p + \mathfrak{J}'' \sin. (i'' + t \sqrt{\frac{2g}{l}}),$$

vbi constantes ita comparatas esse oportet, vt summa trium harum formularum fiat aequalis 3 p.

§. 19. Eodem modo ratiocinium erit instituentum, si plura pendula inter se fuerint aequalia; ita vt nunc super hoc problemate nihil amplius sit desiderandum, quotcunque etiam pondera fuerint appensa. Atque hinc etiam clarissime elucet summus vsus faecundissimi principii Illustr. *Dan. Bernoulli*, quo omnes huiusmodi motus oscillatorios semper ex aliquot motibus pendulorum simplicium compositos esse statuit. Imprimis vero etiam hinc patet, quam egregie istud principium cum primis Mechanicae principiis conspiret, atque adeo ex iis immediate deduci queat. Pulcherrime scilicet hoc principium conexum est cum ea conditione, qua in omnibus huiusmodi motibus definiendis peruenitur ad eiusmodi aequationes differentiales secundi gradus, in quibus omnes incognitae vnicam vbique habent dimensionem, ita vt semper dentur eiusmodi solutiones speciales, in quibus omnes incognitae constantes inter se teneant rationes, quo ipso oscillationes regulares ac simplices innuuntur. Tum vero ex omnibus his solutionibus specialibus per ipsam naturam huiusmodi aequationum solutio generalis et completa formari potest.

§. 20. Quanquam autem haec solutio maxime est generalis, et omnes plane casus in se complectitur, siue omnia pendula sint longitudine aequalia siue inaequalia, si quidem pro aequalibus correctio exposita adhibeatur: tamen dantur insuper casus, qui peculiarem resolutionem requirunt, qui sunt: quando pendula ab ipso axe horizon-

tali E O F suspenduntur, veluti si punctum A cadat in istum axem, ideoque angulus A O E = α evanescat; tum enim distantia $b = a \sin. \alpha$ evanescet, vnde expressio nostra, pro angulo ω inuenta, nullum plane motum huius penduli indicabit, cum tamen vtique motum recipere queat. Hoc autem casu aequatio differentialis pro hoc pendulo non amplius inuoluet angulum Φ , sed erit simpliciter

$$\frac{l}{g} \frac{d^2 \omega}{dt^2} = -\omega;$$

vnde patet, istud pendulum motum oscillatorium regularem recipere, perinde ac si ex puncto fixo esset suspensum, ita vt eius motus neque ab ipso corpore M, neque a reliquis pendulis afficiatur. Ac vicissim quoque hoc pendulum nihil plane conferet ad motum corporis M; quia enim $b = 0$, in quantitatem Q plane non ingreditur; simulque etiam quantitas n evanescit; vnde patet ab hoc pendulo motum corporis M nullo modo perturbari. Eodem modo res se habebit, si plura pendula ex ipso axe E O F fuerint suspensa, tum enim singula libere suas oscillationes peragent, neque vlllo modo in motum reliquorum pendulorum, neque ipsius corporis M effectum exerent, quorum igitur motus perinde se habebit, ac si illa pendula prorsus abessent.