

CONIECTVRA
CIRCA NATVRAM AERIS,
PRO EXPLICANDIS PHAENOMENIS IN
ATMOSPHAERA OBSERVATIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Quantquam nobis in intima naturae mysteria penetrare, indeque veras causas Phaenomenorum agnoscere neutiquam est concessum: tamen euenire potest, vt hypothesis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aequae satisfaciat, ac si vera causa nobis esset perspecta, quemadmodum felicissimo successu omnes fere motus coelestes ex hypothesis attractionis vniuersalis determinari solent, etiamsi haec ipsa hypothesis ex Physica prorsus sit profliganda.

§. 2. Quam ob rem fortasse similimodo quaequam hypothesis excogitare poterit, quae omnibus Phaenomenis aëris et atmosphaerae explicandis sufficiat. Talem ideam iam ante quinquaginta annos in Tomo II. veterum Commentariorum proposui, quae ad plura aëris phaenomena explicanda satis apta videbatur, etiamsi facile agnouissem, talem aëris structuram reuera admitti non posse. Imprimis

mis huius Phaenomeni explicatio: quod, dum aër vaporibus est inquinatus, eius elasticitas diminuatur, mihi omni attentione digna est visa, cum eius caussa a nemine adhuc dilucide sit exposita. Illo vero tempore Theoria fluidorum nondum satis erat exculsa, vt istam ideam penitus euoluere valuiffem; quamobrem operae pretium fore existimo, illam aëris structuram, quam finxeram, accuratius examinare, et quaenam Phaenomina inde oriri debeant, maiori cura inquirere.

§. 3. Naturam aëris autem ita animo conceperam, quasi ex innumerabilibus minimis bullulis seu sphaerulis esset compositus, quae singulae cuticula tenuissima aquosa circumdarentur, intra quas propria aëris materia motu rapidissimo in gyrum circumagatur, in cuius vi centrifuga elasticitas aëris produci erat visa. Totum negotium igitur huc redit, vt ista hypothesis accuratius perpendatur, et ad cuiusmodi phaenomina producenda sit accommodata, inquiratur. Nisi enim manifestas contradictiones inuoluat, satis probabilé videtur, aëris phaenomina, actu obseruata, non multum discrepare posse.

§. 4. Quod igitur primo ad pelliculas illas aqueas siue vaporosas attinet, earum realitas in aqua spumosa atque bullis saponaceis manifesto deprehenditur, vnde recte concludere poterimus, vapores in aëre ascendentes ita dissipari, vt elementa aërea instar cuticulae inuoluant, quae si per omnia elementa aequaliter dispergatur, atmosphaera nihil de pelluciditate amittet, sin autem intra sphaerulas aëreas confuse hospitentur, refraçtio radiorum lucis eorumque transitus non mediocriter perturbabitur, vnde in

aëre inferiore nebulae, in superiore autem nubes oriri videntur. Praeterea, quo plures vapores aëri fuerint admixti, cuticulae illae, sphaerulas aëreas ambientes, euadent densiores, quoad scilicet constitutio harum sphaerularum sufferre valet.

§. 5. Deinde etiam non desunt rationes, quae suadent, propriam aëris materiam in his sphaerulis motu rapidissimo circumagi, cum aliunde causa elasticitatis repeti nequeat. Praeterea cum iam satis euictum sit, calorem in certa agitatione aetheris consistere, hinc utique materia illa aëris in sphaerulis motum quendam recipere debet, qui cum in tali angusto spatio sit inclusus, non aliter nisi per motum vorticosum continuari potest, id quod eo magis fit probabile, quod aucto calore, indeque propterea motu isto verticoso, elasticitas aëris quoque augeatur; unde manifestum est, motum gyratorium in sphaerulis aëreis cum causa caloris arctissime esse connexum.

§. 6. Deinde vero etiam assumi, singula aëris elementa in memoratis sphaerulis per circulos maximos circumagi, ut in iis vndeque aequalis vis centrifuga, a centro cuiusque sphaerulae recedens, oriatur, haecque hypothesis nuncquidem cum principiis mechanicis neutiquam consistere posse videtur, cum demonstratum sit, nullum alium motum circa punctum quodpiam fixum in corporibus dari posse, nisi qui peragatur circa axem quempiam fixum. A tali autem motu alia vis centrifuga generari non potest, nisi quae ab axe gyrationis recedat, ideoque in eadem sphaerula maxime esset irregularis, cum certum sit, elasticitatem aëris in omnes plagas aequaliter tendere.

§. 7. Obiectio autem hinc ab illo motu oriunda tantum locum habet in corporibus solidis: in fluidis enim res longe aliter se habere potest; atque adeo clare hic demonstrabo, motum illum intestinum in singulis sphaerulis reuera ita comparatum esse debere, ac si singula elementa in circulis maximis circa centrum reuoluerentur.

§. 8. Primo autem, cum materia aërea sit homogenea, omnes eius particulas inter se aequales concipere licet, quibus adeo initio celeritates aequales sint impressae, quibus ergo singulae, si essent solitariae, in plano vniformiter in directum ferrentur, in superficie autem sphaerica in circulis maximis essent progressuræ; vnde si cuiusque celeritas fuerit $= c$. et r radius sphaerae, cuiusque vis centrifuga foret $= \frac{c^2}{g r}$, qua scilicet a centro sphaerae recedere conaretur; vbi g exprimit altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, siquidem celeritas per spatium vno minuto secundo percursum definiatur.

§. 9. Consideremus iam duas huiusmodi particulas A et B, secundum directiones AC et BC ita motas, vt in C conuenirent et collisionem paterentur, quippe sine qua corpusculum A descripturum esset spatium $Ca = c$, alterum vero BC secundum directionem Cb celeritate eadem c . Iam vt videamus quamnam mutationem collisio sit productura, toti systemati, mente saltem, imprimamus celeritatem $= c$, secundum directionem bC , quo pacto corpusculum B in quiete sistetur in puncto C, corpusculum vero A, sumto $CB = Cb = c$, motum habebit secundum diagonalem CD parallelogrammi CBD d , qua retro producta in d , collisio perinde peragetur, ac si

Tab. IV.
Fig. 1.

corpuseulum A motu dC in alterum corpuseulum B, in C quiescens, impingeret. Constat autem, tum corpuseulum A in C esse quieturum, alterum vero B celeritatem esse acquisturum CD. Iam restituatur motus mente impressus celeritate Cb . Hoc modo corpus prius A nunc motum acquireret Cb , alterius vero B motus componetur ex motu CD et Cb , unde si compleatur parallelogrammam CD ab , istud corpus iam motum habebit Ca . Unde patet, motus vtriusque corporis per collisionem inter se permutari, ita vt vtriusque motus ab altero continuetur. Hinc cum inter bina corpuseula nullum discrimen intercedat, totus motus se habebit ac si vtrumque corpuseulum motum insitum sine vlla mutatione prosequeretur, unde etiam vtriusque vis centrifuga nullam mutationem ob collisionem subibit.

§. 10. Quod si iam tales collisiones in infinitum multiplicentur, omnes motus nihilominus in circulis sphaerae maximis, at vero successiue ab aliis aliisque corpuseulis, peragentur; quamobrem omnes vires centrifugae directe a centro recedent, et quidem eadem quantitate $\frac{c^2}{gr}$.

§. 11. In motu ergo vorticoso, quem materiae aëris propriae, in singulis sphaerulis memoratis, tribuimus, tuto assumere possumus, omnes plane motus in circulis maximis peragi, atque singulas particulas pari vi centrifuga a centro sphaerulae recedere conari; quamobrem omnes obiectiones, quae olim contra vortices Cartesianos sunt motae, omnem vim amittunt. Neque tamen idcirco arbitror, illos Cartesii vortices admitti posse; at vero illi vortices, per quos Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* olim attractionem vni-

uniuersalem in mundo explicare est annifus, hinc summam vim acquirunt, ita vt omnes obiectiones contra factae quasi sponte euanescant.

§. 12. Contemplemur nunc sphaerulam quamcunque, naturam aëris constituentem, cuius extrema crusta aqua, seu materia vaporosa constet, intra quam materia aëris propria motu ante descripto in gyrum agatur. Sumto igitur centro sphaerulae in O, sit OR = r radius totius sphaerulae, seu extimae eius superficiei, sitque RS crassities crustae aqueae, ponaturque OS = s, ita vt crassities crustae aqueae sit RS = r - s; tum vero sit ST crassities crustae aëreae gyrantis, quae ergo, posito OT = t, erit = s - t. Intimum autem huius sphaerulae spatium, a centro O vsque ad T, repletum fit aethere puro, grauitate destituto, a cuius scilicet agitatione materia aëris propria perpetuo ad motum cieatur, modo magis modo minus, pro gradu caloris seu frigoris.

Tab. IV.
Fig. 2.

§. 13. Hinc ergo, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter = 1, erit volumen totius sphaerulae = $\frac{4}{3} \pi r^3$; vnde patet, volumen crustae aqueae fore $\frac{4}{3} \pi (r^3 - s^3)$, et volumen crustae aëreae $\frac{4}{3} \pi (s^3 - t^3)$; volumen denique aetherium erit $\frac{4}{3} \pi t^3$. Quod si iam densitatem aquae unitate designemus, erit massa crustae aqueae $\frac{4}{3} \pi (r^3 - s^3)$. At si densitatem materiae aëris propriae vocemus δ, erit eius massa $\frac{4}{3} \pi \delta (s^3 - t^3)$. Quare cum ipse aether densitate carere sit censendus, erit tota massa in sphaerula contenta $\frac{4}{3} \pi (r^3 - s^3 + \delta s^3 - \delta t^3)$, quae scilicet simul exprimet pondus totius sphaerulae, cuius radius

dius = r ; vnde manifestum est, aetherem in medio contentum recte negligi posse.

§. 14. Hic autem statim liquet, densitatem δ non ex statu aëris ordinarii, qui iam ob elasticitatem plurimum est expansus, aestimari debere. Cum enim aër, in spatio $S T$ inclusus, omni elasticitate destituatur, quandoquidem demum eius agitatione elasticitas aëris naturalis produci-
tur, iste aër in nostra sphaerula contentus in eo statu reperiri censendus est, ac si ad summum densitatis gradum iam esset compressus. Phaenomena autem consulentes deprehendimus, aërem naturalem in spatium quasi octingentes minus comprimi posse, qui numerus respondet rationi inter densitatem aëris et aquae; neque ergo errabimus, si densitatem aëris, ad summum compressionis gradum reductum, densitati aquae aequalem statuamus, ita ut sit $\delta = 1$. Probabile autem admodum videtur, aërem ad talem statum reductum, simulque omni elasticitate carentem, vix a natura aquae esse discrepaturum. Hinc igitur, posito $\delta = 1$, massa atque etiam pondus nostrae sphaerulae erit $\frac{4}{3} \pi (r^3 - l^3)$ siue aequabitur ponderi massae aquae idem volumen habentis.

§. 15. Inuestigemus nunc totam vim centrifugam, quae ex motu gyatorio crustae aëreae $S T$ oriri debet; quem in finem consideremus punctum quoddam medium X , posita eius distantia a centro $O X = x$, eiusque celeritate gyatoria = c , erit vis centrifuga in puncto $X = \frac{c c}{2 g x}$. Hac scilicet vi elementum materiae in X conatur a centro O recedere, vnde in ista crusta aërea orietur status pressionis a termino T ad S continuo crescens.

§. 16.

§. 16. Constat autem, in fluidis statum pressio-
 commodissime exprimi posse per certam altitudinem, quam
 hic vocemus $=p$, qua designatur, pressio-
 nem fluidi aequa-
 lem esse ponderi cylindri, ex eadem materia constantis,
 et cuius altitudo sit $=p$. Pro nostro ergo casu designet
 p altitudinem columnae aquae, cuius pondus aequetur
 pressioni in puncto X, dum scilicet in eandem basin pre-
 mit. Hinc ergo, sumto elemento X $x = dx$, ita vt pressio
 in x sit $p + dp$, evidens est, incrementum pressio-
 nis dp
 aequari debere vi centrifugae, qua elementum X x a cen-
 tro repellitur; unde patet fore $dp = \frac{c \cdot c}{2g \cdot x} dx$, sicque inte-
 grando nanciscimur $p = \frac{c \cdot c}{2g} \int \frac{dx}{x}$, quod integrale ita deter-
 minari debet, vt sumto $x = t$ evanescat, ita vt pro puncto
 X pressio sit $p = \frac{c \cdot c}{2g} \int \frac{x}{t}$. Quare promotio puncto X
 usque ad S, pressio hoc loco erit $p = \frac{c \cdot c}{2g} \int \frac{S}{t}$. Tanta sci-
 licet pressione ista crusta aërea, simulque rota prorsus sphae-
 rula, conabitur se expandere, ac reuera se expanderet, nisi
 vndequaque paribusque viribus comprimeretur.

§. 17. Quantumvis autem talis bullula siue ex-
 pandatur siue comprimatur, in ea semper eadem quantitas
 materiae manet inclusa, quia neque materiae contentae
 exitus, neque novae ingressus conceditur. Ponamus ergo
 quantitatem materiae inclusae aequari globulo aëreo, cuius
 radius $= a$, quandoquidem omnem calculum ad densitatem
 aquae reducimus. Hinc ergo quantitas materiae in hac
 bullula contentae erit $\frac{4}{3} \pi a^3$, quae cum partim ex crassa
 aquea partim ex aërea eiusdem cum aqua densitatis con-
 stet, ponamus massam aqueam esse $\frac{4}{3} \pi \lambda a^3$, ita vt quanti-
 tas materiae aëreae propriae sit $\frac{4}{3} \pi (1 - \lambda) a^3$: quantitas
 Acta Acad. Imp. Sc. Tom. III. P. I. Y ergo

ergo aquae per aërem dispersae erit ad quantitatem aëris propriam ut $\lambda : 1 - \lambda$.

§ 18. Supra autem inuenimus; volumen crustae aquae esse $\frac{4}{3} \pi (r^3 - s^3)$, unde erit $r^3 - s^3 = \lambda a^3$. Deinde cum volumen materiae aëreae inuentum sit $\frac{4}{3} \pi^3 (s^3 - t^3)$, erit $s^3 - t^3 = (1 - \lambda) a^3$. Hinc igitur tam s^3 quam t^3 per a^3 et r^3 definire poterimus: erit scilicet $s^3 = r^3 - \lambda a^3$ et $t^3 = r^3 - a^3$. Quare cum altitudinem pressioni debitam inuenerimus

$$p = \frac{c \cdot c}{2g} l \frac{s}{t} = \frac{c \cdot c}{6R} l \frac{s^3}{t^3}, \text{ erit nunc } p = \frac{c \cdot c}{6g} l \frac{r^3 - \lambda a^3}{r^3 - a^3}.$$

§. 19. Cum porro densitas reperiatur, si massa per volumen diuidatur, quia nostro casu massa est $\frac{4}{3} \pi a^3$, volumen autem $\frac{4}{3} \pi r^3$, erit densitas hoc loco $\frac{a^3}{r^3}$. Quod si ergo densitatem hanc designemus littera q , erit $q = \frac{a^3}{r^3}$, ideoque $r^3 = \frac{a^3}{q}$, qui valor in nostra formula substitutus praebet $p = \frac{c \cdot c}{6g} l \frac{1 - \lambda q}{1 - q}$; vbi, ut notauimus, q exprimit densitatem aëris, dum aquae densitas unitate designatur, ideoque q semper erit fractio quam minima. In superficie scilicet Terrae erit quasi $q = \frac{1}{765}$, vel $q = \frac{1}{1000}$.

§. 20. Cum igitur q sit fractio tam exigua, erit satis exacte

$$l(1 - \lambda q) = -\lambda q - \frac{1}{2} \lambda^2 q^2 - \frac{1}{3} \lambda^3 q^3 \text{ et}$$

$$l(1 - q) = -q - \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{3} q^3,$$

qui posterior logarithmus a priore subtractus relinquit

$$l \frac{1 - \lambda q}{1 - q} = (1 - \lambda) q + \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) q^2 + \frac{1}{3} (1 - \lambda^3) q^3,$$

quocirca habebimus pro pressione p hanc formulam:

$$p = \frac{c \cdot c}{6g} \left((1 - \lambda) q + \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) q^2 + \frac{1}{3} (1 - \lambda^3) q^3 \right)$$

cuius

cuius seriei plerumque sufficiet primum terminum, vel ad summum bina priora accepisse.

§. 21. Iam igitur insignem relationem inter densitatem aëris q et altitudinem pressionem debitam p sumus adepti, cum sit

$$p = \frac{c}{g} \left((1 - \lambda) q + \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) q^2 + \frac{1}{3} (1 - \lambda^3) q^3 \right),$$

vbi tam litterae p et q quam λ determinatos sortiuntur valores. Erit scilicet p altitudo Barometri aëri, pressionem Atmosphaerae aequilibrantem, cuius igitur pars circiter decima quarta dabit altitudinem Barometri mercurialis; tum vero erit q ad 1 vt densitas aëris ad densitatem aëriae. Denique λ exprimit portionem vaporum aëreorum per Atmosphaeram dispersorum. His obseruatis solus primus terminus seriei pro p inuentae, $\frac{c}{g} (1 - \lambda) q$, insigne phaenomenon iam nobis egregie explicat. Inde enim patet, quo plures vapores cum aëre sunt permixti, quorum quantitas est vt λ , pressionem p esse debere tanto minorem, pro eadem scilicet aëris densitate q , atque haec explicatio, quam iam olim loco supra citato inuenieram, notatu maxime digna est visa.

§. 22. Neque vero solus primus seriei terminus istam elasticitatis aëris diminutionem declarat, sed etiam omnes sequentes termini minores sunt quam si esset $\lambda = 0$, nullique vapores in aëre versarentur. Ceterum hic quoque notari oportet, etiam litteram c insignem variationem subire posse, pro rapiditate motus gyratorii in nostris sphaerulis vel bullulis, quae cum gradu caloris proportio-

nalis esse videatur, aucto vel diminuto calore etiam quantitas c vel increfcet vel diminuetur.

§. 23. Quin etiam hinc ipfa celeritas c , qua materia aërea in bullulis gyratur, absolute determinari potest, pro data fcilicet altitudine p et denfitate q cum humiditate λ . Sumto enim primo tantum feriei termino, qui ad hoc inffitutum prorfus fufficit, erit $c = \frac{6g \cdot p}{1 - \lambda \cdot q}$; unde patet, hanc celeritatem directe proportionalem effe altitudini Barometri p , reciproce vero denfitati aëris q ; tum vero, auctam ob humiditatem λ , celeritatem c etiam augeri. Conftat autem in pedibus Rhenanis effe $6g = 93\frac{5}{7}$. Iftius igitur formulæ radix quadrata dabit celeritatem gyrationis in paribus pedibus expreffam: Indicabit enim numerum pedum, qui hac celeritate vno minuto fecundo percurrerentur:

§. 24. Cum calor a celeritate procul dubio pendeat, indagemus iftam celeritatem tam pro maximo calore, qui in aëre aperto obferuari folet, et qui in Thermometro *Delisliano* refpondet quafi centum gradibus, quam pro fummo frigore, quod refpondet 200 gradibus in eodem Thermometro. Pro priore ergo cafu, quia aër eff rariffimus, fumamus $q = \frac{1}{1000}$, fimulque ipfi p fummam altitudinem tribuamus, quæ eff quafi 34 pedum in Barometro aqueo. Ipfam humiditatem vero hic penitus negligamus, vt fit $\lambda = 0$. Ex his iam valoribus colligitur

$$c = 93,75 \times 34 \times 1000 = 3187500,$$

ideoque ipfa celeritas $c = 1790$ ped. quæ ergo refpondet 100 gradibus Thermometri *Delisliani*.

§. 25. Simili modo pro summo frigore 200 gradibus respondente, sumamus densitatem $q = \frac{1}{700}$, altitudinem vero Barometri etiam minimam accipiamus, scilicet $p = 31$ pedum, hincque colligitur

$$cc = 93,75 \times 31 \times 700 = 2034375,$$

ideoque $c = 1330$, quae ergo celeritas ducentis gradibus Thermometri *Delisliani* respondet, ita ut differentia inter has duas celeritates sit 360 pedum. Hinc intelligitur, si plura huiusmodi experimenta instituantur, haud difficile fore pro singulis gradibus huius Thermometri respondentes celeritates assignare. Quo pacto istud Thermometrum ad multo maiorem perfectionis gradum euehetur.

§. 26. Eodem modo etiam reliqua instrumenta, quibus aëris indoles explorare solet, beneficio nostrae formulae magis perfici poterunt. Quod quidem ad Barometrum attinet, id vix vlla emendatione indiget, si modo pro quouis caloris gradu ratio densitatis mercurii habeatur; quo enim mercurius minorem habuerit densitatem, quod fit in magno calore, tum altitudo barometrica secundum eandem rationem imminui debet, ut ad certam densitatem fixam reuocetur. Summo autem frigore, quo Mercurius in spatium aliquanto minus contrahitur, ideoque eius densitas augetur, ob hanc rationem altitudo Barometri obseruata aliquantillum augeri debebit.

§. 27. Praecipuum autem instrumentum, quod ad Theoriam nostram explorandam requiritur, est Manometrum, nunc quidem fere prorsus obsoletum, quo densitas aëris indicatur, et cuius descriptio exstat in *Wolfii*

Elementis Matheseos Tomo II, vt et in Mémoires de l'Académie Royale de Paris 1705. Pro usu autem nostro optandum esset, vt gradibus arbitrariis in tali instrumento signatis adscriberentur numeri, indicantes, quoties densitas aëris minor sit quam densitas aquae, quam tanquam fixam spectare possumus, quippe cuius exiguae variationis, a maiore vel minore calore oriundae, ratio facile haberi poterit. Pluribus autem experimentis erit opus, antequam hoc instrumentum ad summum perfectionis gradum perducatur.

§. 28. Superest autem adhuc instrumentum, humiditati aëris dimetiendae aptum, quod Hygrometrum appellare solet. Plura huiusmodi instrumenta passim existant descripta; verum valde dubitandum videtur, num veram aquae quantitatem, per aërem dispersam, declarent. Interim tamen plurimis etiam nouis experimentis opus erit, haec instrumenta ita instruere, vt quouis tempore verum valorem nostrae litterae λ , hoc est eam fractionem, quae indicet, quotam totius voluminis partem aqua seu humiditas in aëre occupet, doceat, a quo perfectionis gradu etiamnunc plurimum sumus remoti.

§. 29. Cum igitur in Thermometro *Delishiano* gradui 200, quo insigne frigus indicatur, respondeat celeritas 1430 pedum in minuto secundo, quia congelatio Mercurii adhuc maiorem gradum frigoris postulat, ei circiter respondebit celeritas 1200 ped. ita vt, nisi celeritas ista fuerit maior, Mercurius fluiditatem penitus amittat. Deinde cum gradui 100 respondeat celeritas 1790 pedum, quia terminus congelationis in gradum 150 cadit,

cui

cui ergo respondebit celeritas 1610 ped., celeritate maiore opus erit, ad aquam in statu fluiditatis conseruandam.

§. 30. Quia porro gradus ebullitionis aquae in hoc Thermometro est 0, ei propemodum conueniet celeritas 2150 ped. ubi ergo aqua ebullire incipiet. Et quia in nostra formula altitudo Barometri potissimum ingredi-
tur, hinc intelligere licet, cur, aucta aëris elasticitate, maior gradus ad ebullitionem aquae requiratur, et cur, minuta elasticitate, aqua etiam in minore gradu caloris ebullire queat, quemadmodum experimentis est comprobatum, cuius phaenomeni ergo causa in nostra formula sine dubio erit quaerenda.

§. 31. Neque uero celeritas, ad quemuis caloris gradum aëri inducendum requisita, tantum ad aërem spectare est censenda, cuius scilicet minimae particulae tanta celeritate commoueri debent, sed etiam in omnibus plane corporibus perinde locum habere uidetur. Omnes quoque naturae scrutatores in hoc conueniunt, quod causa caloris in motu quodam perniciosissimo minimarum particularum consistat. Quae ergo sententia non solum nostrae Theoriae maxime est conformis, sed etiam ipsam celeritatem, cuilibet gradu caloris conuenientem, assignare ualemus. Quanquam autem haec celeritas maxime enormis uideatur, tamen perpendendum est, in natura dari celeritates adhuc incomparabiliter maiores, cuiusmodi est celeritas radiorum lucis, in quibus cum causa omnis caloris sit quaerenda, mirum non est, hinc tam insignem celeritatis gradum generari posse.

§. 32.

§. 32. Sed reuertamur ad nostram formulam supra inuentam et ad solum aërem proprie accommodatam, quae haec quatuor elementa: 1°) altitudinem pressioni debitam p ; 2°) densitatem aëris q ; 3°) gradum caloris, formula $\frac{cc}{gg}$ contentum et 4°) gradum humiditatis λ complectitur. Ex datis horum elementorum ternis quibusque quartum assignari potest; ita, si dentur densitas aëris q , gradus caloris $\frac{cc}{gg}$, cuius loco br. gr. scribamus b et gradus humiditatis λ , hinc altitudo, pressioni debita, p in genere ita exprimitur, vt sit $p = b l^{\frac{1-\lambda q}{1-q}}$, quam pro faciliori calculo in hanc seriem resoluimus:

$$p = b((1-\lambda)q + \frac{1}{2}(1-\lambda\lambda)qq + \frac{1}{3}(1-\lambda^3)q^3 + \text{etc.})$$

cuius applicatio iam satis est exposita.

§. 33. Ponamus nunc dari primo altitudinem pressioni debitam p , secundo densitatem aëris q , et tertio humiditatem λ , hinc gradus caloris $b = \frac{cc}{gg}$ ita definitur,

vt sit $b = \frac{p}{l^{\frac{1-\lambda q}{1-q}}}$, hincque, logarithmis per seriem expressis, erit

$$b = p : ((1-\lambda)q + \frac{1}{2}(1-\lambda\lambda)qq + \frac{1}{3}(1-\lambda^3)q^3 + \text{etc.})$$

cuius seriei plerumque sufficit solum primum terminum cum secundo sumfisse.

§. 34. Sin autem detur altitudo pressioni debita p , mensura caloris b , ac tertio humiditas λ , inde ad densitatem q inueniendam recurrendum est ad exponentialia,

cum sit $e^{\frac{p}{b}} = \frac{1-\lambda q}{1-q}$, vnde posito br. gr. $e^{\frac{p}{b}} = k$, erit $q = \frac{k-1}{k-\lambda}$,

et

et quia b plerumque plurimum excedit p , cum per se-
riem fit

$$k = 1 + \frac{p}{b} + \frac{p^2}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}$$

erit

$$q = \left(\frac{p}{b} + \frac{p^2}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.} \right) : \left(1 - \lambda + \frac{p}{b} + \frac{p^2}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.} \right)$$

§. 35. Denique si detur altitudo pressioni debita p , mensura caloris b , et densitas q , per formulam expo-
nientialem $e^{\frac{p}{b}} = k = \frac{1-\lambda q}{1-q}$ humiditas λ ita determinetur,
vt fit $\lambda = \frac{1-k(1-q)}{q}$, quae expressio hoc laborat defectu,
vt minimus error, in elementis datis p , k et q commissus,
enormes errores in valore λ producat.

§. 36. Imprimis autem nostra formula commo-
dissime adhiberi potest ad Problema aërometricum maxi-
mi momenti resoluendum, quo quaeri solet, quanta vi
opus sit ad aërem in spatium quantumuis minus coarctan-
dum, cuius ergo solutionem hic subiungimus.

Problema.

*Inuestigare, quanta vis requiratur, ad datum aëris
volumen in spatium quantumuis minus comprimendum.*

Solutio.

§. 37. Ponamus aërem comprimendum in tubo
cylindrico contineri, cuius amplitudo sit $= ff$ et com-
pressionem per emboli intrusionem produci; tum si altitu-
do, pressioni debita, fuerit $= p$, vis requisita aequabitur
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. III. P. I. Z ponde-

ponderi columnae aqueae, cuius basis = ff et altitudo = p , ita ut ita vis per massam aqueam expressa sit = ffp . Ponamus in statu naturali, unde compressio inchoat, altitudinem pressionis debitam esse = a , densitatem vero aeris naturalem = b ; at vero mensurae caloris cum humiditate, quoniam durante compressione nullam mutationem patiuntur, sint ut ante b et λ , ita ut sit $a = b l \frac{1-\lambda b}{1-b}$, siue proxime $a = (1-\lambda) b b$.

§. 38. Ponamus nunc intrusione emboli istud aeris volumen iam in spatium n vicibus minus esse compressum, ita ut iam eius densitas sit $q = nb$, unde quaeri debet altitudo pressionis debita p , huic densitati respondens, quae ergo, loco q scribendo nb , erit $b l \frac{1-\lambda nb}{1-nb}$; unde nisi compressio iam satis sit notabilis, satis exacte erit $p = b(1-\lambda)nb$. Hinc patet, pressionem p exacte proportionalem esse numero n , siue pressionem semper densitati esse proportionalem, nisi compressio iam sit vehementer magna.

§. 39. In maioribus autem compressionibus adhiberi etiam conveniet secundum seriem terminum, ita ut sit

$$p = b((1-\lambda)nb + \frac{1}{2}(1-\lambda\lambda)nnbb),$$

cum initio fuisset $p = a$, quae ergo altitudo quanto iam sit maior, definiiri debet ex hac formula:

$$\frac{p}{a} = n + \frac{1}{2}(1+\lambda)nnb;$$

unde patet, vim comprimentem plusquam n vicibus esse maiorem, prorsus uti per experimenta est observatum.

§. 40. Sin autem compressio longe ulterius continuari concipiatur, recurrendum erit ad formulam logarithmicam $p = b l^{\frac{1-\lambda n b}{1-n b}}$, quae, comparata cum pressione initiali $a = b l^{\frac{1-\lambda b}{1-b}}$, dabit

$$\frac{p}{a} = l^{\frac{1-\lambda n b}{1-n b}} : l^{\frac{1-\lambda b}{1-b}}.$$

Quia autem posterior logarithmus est satis exacte $(1-\lambda)b$, erit

$$\frac{p}{a} = \frac{1}{(1-\lambda)b} \cdot l^{\frac{1-\lambda n b}{1-n b}},$$

vnde patet, casu $n b = 1$ siue $n = \frac{1}{b}$, vim requisitam fieri infinitam.

§. 41. Quo haec clarius perspiciantur, ponamus pro statu initiali esse $b = \frac{1}{800}$, siue densitatem aëris ad aquae densitatem esse ut 1 ad 800, humiditatem autem λ penitus seponamus, eritque ergo a pressio Atmosphaerae naturalis, et quaeramus nunc, quotuplo maior pressio requiratur ad aëris volumen in spatium n vicibus minus coarctandum; tum igitur formula ante data nobis praebebit, $\frac{p}{a} = 800 l^{\frac{800}{800-n}}$, vbi logarithmis utendum erit hyperbolicis. Ita si aër in spatium quadringenties minus comprimatur, hoc est, si $n = 400$, fiet $\frac{p}{a} = 554$; scilicet vis, quae tantum esset quadringenties maior, non sufficit, sed requiritur vis 554 vicibus maior. Quodsi autem condensatio in spatium 700^{es} minus postulatur, vi opus erit 1663 vicibus maiore.

§. 42. Operae igitur pretium videtur, pro hac hypothesisi $b = \frac{1}{800}$ et $\lambda = 0$ tabulam construere, indicantem, quotuplo maior fiat vis comprimens requisita ad aërem

in spatium n cuplo minus redigendum. Sequens tabula igitur ostendet pro singulis numeris n valorem formulae

$$\frac{p}{a} = 800 \log \frac{800}{800 - n},$$

vbi pro condensationibus minoribus erit

$$\frac{p}{a} = n + \frac{1}{2} \frac{n^2}{800} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{800^2},$$

ita vt tantum logarithmis hyperbolicis indigeamus, quando numerus n vltra 100 affurgit.

n	$p : a$	n	$p : a$
1	1, 0006	125	135, 92
2	2, 0025	150	166, 11
3	3, 0056	175	197, 49
4	4, 0100	200	230, 14
5	5, 0157	225	264, 19
6	6, 0226	250	299, 75
7	7, 0308	275	336, 97
8	8, 0403	300	376, 00
9	9, 0510	350	460, 28
10	10, 063	400	554, 48
20	20, 254	450	661, 34
30	30, 577	500	784, 64
40	41, 035	550	930, 52
50	51, 630	600	1109, 0
60	62, 369	650	1309, 2
70	73, 254	700	1663, 5
80	84, 288	750	2218, 1
90	95, 477	800	infin.
100	106, 82		

§. 43. Manifestum est vires, ad aërem comprimendum requisitas, in hac tabula exhibitas, iam in se complecti pressionem Atmosphaerae; vnde si tantum vires actu adhibendae quaerantur, subtrahi debet inde illa pressio, seu, quod eodem redit, ab omnibus his viribus subtrahi debet vis casui $n = 1$ respondens. Praeterea ob humiditatem, quam hic negleximus, omnes vires hic designatae aliquod incrementum nanciscuntur; scilicet, si pro compressione n cupla vis fuerit $= n + \pi$, ob humiditatem λ ista vis erit $n + (1 + \lambda) \pi$.

De variatione status aëris per vniuersam Atmosphaeram.

§. 44. Quae haecenus sunt tradita ad aërem in certo loco existentem restringuntur. Nunc autem videamus, qua lege status aëris per Atmosphaeram siue ascendendo siue descendendo immutetur. Hic igitur in certo Tab. IV. Terrae loco A statum aëris tanquam cognitum assumemus, Fig. 3. hincque verticaliter ascendendo, inuestigabimus, quomodo pro quavis altitudine $AZ = z$, status aëris se sit habiturus; vbi evidens est, si ad interiora Terrae descendere velimus, altitudinem z tantum negativam esse accipiendam. Hic igitur ante omnia pro loco fixo A statum aëris defini oportet, siquidem pro quavis altitudine $AZ = z$ elementa calculi cum hoc loco comparari conueniat.

§. 45. Sit igitur primo altitudo Barometri aquei pro loco $A = a$, et pro loco $Z = p$; secundo densitas aëris in A sit $= b$, in Z vero $= q$; tertio sit humiditas in $A = \lambda$,
Z 3
in

in Z vero $= \Phi$; quarto denique ponatur celeritas motus gy-
 ratorii in subsidium vocati pro loco $A = c$, pro Z vero $= u$.
 Tum vero pro loco A fit breuitatis gratia $\frac{c^2}{g} = b$, pro loco Z
 autem fit $\frac{u^2}{g} = v$; vbi notetur, quantitates b et v longi-
 tudinem plurium millium pedum designare, propterea quod
 celeritas c plerumque inter terminos 1400 et 1800 pe-
 dum continetur. Quia igitur valores litterae c iam ad
 gradus Thermometri relatos assumimus, pro praecipuis va-
 loribus celeritatis c valores quantitatis b in sequenti tabu-
 la adiungamus, incipiendo a $c = 1200$ vsque ad $c = 2000$
 per 50 ascendendo:

c	b	c	b
1200	15360	1650	29040
1250	16667	1700	30827
1300	18026	1750	32667
1350	19440	1800	34560
1400	20907	1850	36507
1450	22427	1900	38507
1500	24000	1950	40560
1550	25627	2000	42667
1600	27307		

§. 45. Quia densitas aëris ascendendo decrefcit,
 evidens est, solum primum terminum seriei supra datae
 abunde sufficere; vnde statuere licebit $p = (1 - \Phi) v q$,
 quae formula etiam tuto adhiberi poterit, si in viscera
 terrae descendamus. Hinc igitur densitas in loco Z erit
 $q = \frac{p}{(1 - \Phi)v}$, vnde si per elementum $Zz = dz$ ulterius
 ascendamus, pressio in z erit $p + dp$, quae autem minor
 erit

erit quam in Z pondusculo aëris in intervallo Zz contenti, quod reperiemus, si elementum dz per densitatem q multiplicemus, unde fit $dp = -q dz$. Ergo, loco q substituto valore modo dato erit $dp = -\frac{p dz}{(1-\Phi)v}$, hincque $dz = -\frac{(1-\Phi)v dp}{p}$, quae aequatio, quia tam v quam Φ tanquam functiones altitudinis z sunt spectandae, ita representari debet: $\frac{dz}{(1-\Phi)v} = -\frac{dp}{p}$, cuius integrale est

$$\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = C - l p,$$

quam constantem C ita definiiri oportet, ut casu $z = 0$ quo simul integrale $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v}$ evanescere debet, evadat $p = a$, unde erit $C = l a$; ideoque $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = l \frac{a}{p}$.

§. 46. Sinistrum igitur membrum huius aequationis erit certa functio ipsius z , pendens a ratione, secundum quam tam calor quam humiditas ascendendo siue crescit siue decrescit; membrum vero dextrum tantum altitudinem barometricam tam in A quam in Z involvit, cuius logarithmus hyperbolicus sumi debet. Atque hic perinde est, siue altitudo Barometri aquei siue mercurialis in calculum introducatur, quia fractio $\frac{a}{p}$ inde non mutatur. Cum igitur sit $l \frac{a}{p} = l a - l p$, valores horum logarithmorum hyperbolicorum pro singulis altitudinibus Barometri mercurialis, quae per digitos indicari solent, in sequenti tabula ab altitudine 36 pollicum, ad quam certe infra Terram descendendo nunquam pervenietur, diminuendo per semipollices, exhibeamus:

Alt.

Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.
36,0	3,583519	26,0	3,258097	16,0	2,772589
35,5	3,569533	25,5	3,238679	15,5	2,740840
35,0	3,555348	25,0	3,218876	15,0	2,708050
34,5	3,540960	24,5	3,198673	14,5	2,674149
34,0	3,526361	24,0	3,178054	14,0	2,639057
33,5	3,511545	23,5	3,157001	13,5	2,602690
33,0	3,496508	23,0	3,135494	13,0	2,564949
32,5	3,481240	22,5	3,113515	12,5	2,525729
32,0	3,465736	22,0	3,091042	12,0	2,484907
31,5	3,449988	21,5	3,068053	11,5	2,442347
31,0	3,433987	21,0	3,044522	11,0	2,397895
30,5	3,417727	20,5	3,020425	10,5	2,351375
30,0	3,401197	20,0	2,995732	10,0	2,302585
29,5	3,384390	19,5	2,970415	9,5	2,251292
29,0	3,367296	19,0	2,944439	9,0	2,197225
28,5	3,349904	18,5	2,917771	8,5	2,140066
28,0	3,332205	18,0	2,890372	8,0	2,079442
27,5	3,314186	17,5	2,862201	7,5	2,014903
27,0	3,295837	17,0	2,833213	7,0	1,945910
26,5	3,277145	16,5	2,803361	6,5	1,871802

Hic perinde est quam digitorum mensura vti velimus, quia tantum ratio in computum ingreditur.

§. 47. Quod si tam calor quam humiditas per totam altitudinem z constans assumatur, vt sit $v = b$ et $\Phi = \lambda$, aequatio nostra integralis erit $\frac{z}{(1-\lambda)^b} = l \frac{a}{p}$, vnde pro quavis altitudine barometrica altitudo $AZ = z$ innotescit,

tescit, cum fit $z = (1 - \lambda) b l \frac{a}{p}$. Vicissim vero pro altitudine AZ data, posito

$$e^{\frac{z}{(1-\lambda)b}} = y, \text{ erit } y = \frac{a}{p}, \text{ ideoque } p = \frac{a}{y}.$$

Quia autem haec fractio $\frac{z}{(1-\lambda)b}$ est plerumque quam minima, erit proxime

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{z^2}{2(1-\lambda)^2 b^2} - \text{etc.}$$

ideoque

$$p = a \left(1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{z^2}{2(1-\lambda)^2 b^2} - \frac{z^3}{6(1-\lambda)^3 b^3} + \text{etc.} \right)$$

§. 48. Hic autem casus vix vsquam locum habebit: certum enim est, per Atmosphaeram ascendendo, gradum caloris continuo diminui. Etsi autem ratio diminutionis maxime latet, tamen non multum a veritate aberrabimus, si valorem ipsius v hoc modo repraesentemus:

$v = \frac{b}{1 + \frac{z}{f}}$, ita vt in altitudine $z = f$ valor ipsius v ad dimidium redigatur; tum enim, cognita hac altitudine f , ista formula vix a veritate aberrare poterit. Hanc ob rem sumamus $v = \frac{bf}{f+z}$, humiditatem vero per totam altitudinem inuariatam spectemus, vt sit $\Phi = \lambda$, quia plane non constat, quomodo variatio humiditatis in calculum introduci posset, cuius etiam effectus vix sensibilis esse potest, quia maximus valor ipsius λ nunquam $\frac{1}{36}$ superare posse videtur.

§. 49. His igitur valoribus substitutis aequatio nostra erit

$$\frac{1}{b(1-\lambda)} \int \frac{(f+z) dz}{f} = l \frac{a}{p},$$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. III. P. I.

A a

vnde

unde integratione instituta erit

$$\frac{1}{(1-\lambda)b} \left(z + \frac{z^2}{2f} \right) = l \cdot \frac{a}{p},$$

ex qua aequatione, si modo constet altitudo f , vbi mensura caloris v ad dimidium redigitur, ad quamuis altitudinem z assignari poterit altitudo barometrica p .

§. 50. Hic autem occurrit quaestio maximi momenti, quomodo pro quavis altitudine Barometri, supra Terram ascendendo obseruata, inde ipsa eleuatio loci, siue altitudo $AZ = z$ definiri possit. Euidens autem est, talem conclusionem ex sola altitudine Barometri neutiquam deriuari posse, nisi simul innotescat quantitas illa f . Quod si autem insuper in Z obseruetur altitudo Thermometri, ex ea valor ipsius v concludi poterit, quandoquidem h.c. assumere licet, pro quolibet gradu Thermometri innotescere celeritatem motus gyratorii c , siue nostro casu u , unde fit $v = \frac{u^2}{g}$. Inuento igitur vero valore ipsius v , ob $v = \frac{fb}{b+z}$, erit vicissim $f = \frac{vz}{b-v}$, qui valor in nostra positione aequatione substitutus dabit hanc: $\frac{(b+v)z}{2(1-\lambda)bv} = l \cdot \frac{a}{p}$, consequenter habebimus $z = \frac{2(1-\lambda)bv}{b+v} l \cdot \frac{a}{p}$.

§. 51. Ope igitur huius formulae per solas obseruationes barometricas et thermometricas eleuatio cuiusque loci super horizontem assignari poterit, quae, cum sit $b = \frac{c^2}{g}$ et $v = \frac{u^2}{g}$, ita se habebit: $z = \frac{2(1-\lambda)bu}{c^2+uu} l \cdot \frac{a}{p}$; unde si Thermometrum iam sit instructum, vti supra monuimus, quaeuis altitudo satis facile assignari poterit ope obseruationum barometricarum et thermometricarum. Ac si pro z prodeat valor negatiuus, quod evenit quando $p > a$, inde profunditas infra superficiem Terrae patefcet.

§. 52.

§. 52. Quia autem celeritatum c et u valores adhuc quandam incertitudinem inuoluunt, propterea quod obseruationes multo accuratiores requirunt, quam quidem institui licet, optandum esset, vt nostra formula primum ad casus tales, vbi eleuatio loci aliunde iam est cognita, applicetur; hinc enim facile accuratiores determinaciones litterarum c et u concludi poterunt; hocque pacto simul constructio Thermometrorum ad maiorem perfectionis gradum perduceretur. Qui autem indolem nostrarum formularum omni studio perpendere dignabitur, longe plura ad scientiam naturalem promouendam inde deriuare poterit.
