THEORIA PARALLAXEOS, AD FIGVRAM TERRAE SPHAEROIDICAM ACCOMMODATA.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quo omnia, quae ad hoc arduum argumentum pertinent, clarius exponamus, atque ad praecepta calculi simplicissima reuocemus, ab ipso Parallaxeos fundamento vniuersam inuestigationem repeti conueniet. Sit igitur C centrum Terrae, in eiusque superficie vbicunque sit L locus Tab. IX. obseruatoris, ideoque eius distantia a centro recta CL, quae Fig. 1. ad coelum vsque producta dabit huius loci zenith Z. Sit porro in S sidus quodcunque, cuius distantia a centro Terrae CS, quod obseruator cernet in directione LS, ideoque ipsi a suo zenith Z angulo ZLS distare videbitur, dum ex ipso centro C sub angulo ZCS a zenith distare videretur. Quod si ergo ex L ipsi CS parallela LΣ in coelum vsque ducatur, monstrabit punctum Σ locum sideris geocentricum, dum punctum S denotat eius locum apparentem; ſicque angulus S L Σ praebebit elongationem loci apparentis a loco geocentrico, ideoque ipſam Parallaxin. Cum igitur angulus S L Σ aequetur angulo C S L, reſolutio trianguli C L S ſuppeditabit veram relationem inter locum geocentricum et obſeruatum. Semper enim ſe habebit diſtantia ſideris a centro Terrae C S ad ſinum anguli Z L S, vt diſtantia obſeruatoris a centro Terrae C L ad ſinum Parallaxeos.

§. 2. Vt iam clarius intelligatur, quid de his elementis tenendum ſit in hypotheſi Terrae ſphaeroïdicae, ante omnia comparationem inſtituamus cum hypotheſi Terrae ſphaericae; vbi ſtatim recta C L aequabitur radio Terrae, ideoque vbique eandem quantitatem retinet. Tum vero punctum Z obſeruatori perpendiculariter imminet, quandoquidem recta C L ad ſuperficiem Terrae eſt normalis et cum directione grauitatis congruit; tum vero angulus obſeruatus S L Z erit elongatio ſideris a zenith, atque in hac hypotheſi ſemper erit diſtantia ſideris ad radium Terrae vti ſinus elongationis ad ſinum Parallaxeos.

§. 3. Quod ſi iam figurae Terrae ſphaeroïdicae rationem habeamus, primo quidem in ipſo ſideris loco nihil plane erit mutandum; at vero, quia locus obſeruatoris L non vbique Terrarum eandem a centro C tenet diſtantiam, pro quouis obſeruatoris loco hanc diſtantiam accurate aſſignari oportet. Deinde, quia haec diſtantia C L non vbique eſt normalis ad Terrae ſuperficiem, neque igitur cum directione grauitatis congruit, punctum Z non ſemper verticaliter imminebit loco obſeruatoris L, ſed a directione L Z modo magis modo minus declinare poterit,

poterit, pro situ obseruatoris in superficie Terrae. Neque ergo angulus SLZ amplius erit elongatio sideris a vero coeli puncto verticali, quod obseruatoris loco imminet; neque propterea amplius erit complementum altitudinis supra horizontem, sub qua sidus conspicitur.

§. 4. Totum negotium igitur iam huc est perductum, vt pro quouis Terrae loco L, non solum eius vera distantia a centro, sed etiam declinatio verae lineae verticalis a zenith exacte determinetur. Tribuamus ergo Terrae eam figuram, quae ex obseruationibus exactissimis est conclusa, statuendo rationem axis Terrae ad diametrum aequatoris vt 200 ad 201; praeterea vero ipsam Terram tanquam Sphaeroides ellipticum consideremus, ortum ex reuolutione ellipsis circa axem. Principio quidem hanc inuestigationem generaliter incipiamus.

§. 5. Sit igitur C centrum Terrae, $CA = a$ semidiameter aequatoris et $CB = b$ semiaxis Terrae, atque ALB quadrans ellipticus, cuius conuersione circa axem BC Terrae figura oriatur, punctum vero L denotet locum quemcunque in Terrae superficie, vnde ad aequatorem AC perpendiculum demittamus LP. Iam ponamus pro hoc puncto L abscissam $CP = x$ et applicatam $PL = y$, sitque ipsa distantia $CL = \surd(xx + yy) = z$. Hinc ergo erit ex natura ellipsis $y = \frac{b}{a}\surd(aa - xx)$. Iam ducta ad curuam normali LN erit subnormalis Tab. IX. Fig. 2.

$$PN = -\frac{y\,dy}{dx} = \frac{bbx}{aa},$$

vnde fit interuallum $CN = \frac{(aa-bb)x}{aa}$, ac porro

$$zz = bb + \frac{(aa-bb)}{aa}xx.$$

§. 6. At vero, quando in Aſtronomia locus Terrae pro cognito aſſumitur, eius eleuatio poli, ſiue latitudo in ſuperficie Terrae, tanquam cognita ſpectatur. Latitudo autem loci L ſemper aequalis eſt angulo A N L, quem directio grauitatis, quae ſemper in N L incidit, cum aequatore conſtituit. Vocemus ergo latitudinem loci L, ſiue angulum A N L $= \Phi$, atque ex eo omnia reliqua elementa figurae determinari debebunt. Cum igitur ſit

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{PL}{PN} = \frac{aay}{bbx}, \text{ erit tang.}\,\Phi = \frac{a}{bx}\sqrt{(aa - xx)},$$

vnde colligimus fore

$$x = \frac{a\,a\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b\,b\,\text{fin.}\,\Phi^2)}}.$$

Hinc igitur porro erit

$$y = \frac{b\,b\,\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b\,b\,\text{fin.}\,\Phi^2)}}.$$

Ex his iam deducimus diſtantiam loci L a centro Terrae

$$CL = z = \sqrt{\frac{a^4\,\text{cof.}\,a^2 + b^4\,\text{fin.}\,\Phi^2}{a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b\,b\,\text{fin.}\,\Phi^2}},$$

id quod alterum eſt elementum, quo in calculo Parallaxeos indigemus.

§. 7. Quod iam ad alterum elementum, ſiue declinationem rectae L N ad L C attinet, vocemus iſtum angulum C L N $= \omega$, et in rectam L N productam ex C inducamus normalem C Q, tum quia ex valore pro x invento eſt interuallum

$$CN = \frac{(a\,a - b\,b)\,x}{a\,a} = \frac{(a\,a - b\,b)\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b\,b\,\text{fin.}\,\Phi^2)}},$$

ob angulum C N Q $= \Phi$, erit hoc perpendiculum

$$CQ = \frac{(a\,a - b\,b)\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(a\,a\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b\,b\,\text{fin.}\,\Phi^2)}},$$

hincque deducimus

fin.

$$\text{fin. } \omega = \frac{CQ}{CL} = \frac{(aa - bb)\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(a^4\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b^4\,\text{fin.}\,\Phi^2)}},$$

vnde porro fiet:

$$\text{cof. } \omega = \frac{aa\,\text{cof.}\,\Phi^2 + bb\,\text{fin.}\,\Phi^2}{\sqrt{(a^4\,\text{cof.}\,\Phi^2 + b^4\,\text{fin.}\,\Phi^2)}},$$

confequenter:

$$\text{tang. } \omega = \frac{(aa - bb)\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{aa\,\text{cof.}\,\Phi^2 + bb\,\text{fin.}\,\Phi^2}.$$

§. 8. Quia angulus $ANL = \Phi$ exprimit amplitudinem arcus AL, inueftigemus quoque curuaturam in ipfo puncto L, fiue radium ofculi, quippe cui proportionales erunt gradus latitudinis in quolibet Meridiano ALB. Hunc in finem vocemus arcum $AL = s$, et conftat radium ofculi in L effe $= \frac{ds}{d\Phi}$; quare ad elementum ds inveniendum quaeramus differentialia dx et dy, quae reperiuntur:

$$dx = \frac{-aabbd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(aa\,\text{cof.}\,\Phi^2 + bb\,\text{fin.}\,\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$dy = \frac{+aabbd\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{(aa\,\text{cof.}\,\Phi^2 + bb\,\text{fin.}\,\Phi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde colligitur ipfum curuae elementum ds, fiue ipfe radius ofculi:

$$\frac{ds}{d\Phi} = \frac{aabb}{(aa\,\text{cof.}\,\Phi^2 + bb\,\text{fin.}\,\Phi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ex quo fequitur, in aequatore effe radium ofculi $= \frac{bb}{a}$, fub ipfo autem polo $= \frac{aa}{b}$.

§. 9. Transferamus nunc haec ad veram Terrae figuram, qua eft $b : a = 200 : 201$, vnde fumto femiaxe

$CB = 1$ erit semidiameter aequatoris $a = 1 + \frac{1}{200}$, pro quo scribamus $a = 1 + \delta$, vbi δ tam exigua est fractio, vt eius potestates in calculo tuto negligi queant. Hinc ergo pro elemento priore reperiemus

$$CL = z \surd \frac{(1 + 4\delta)\, cos.\, \Phi^2 + sin.\, \Phi^2}{(1 + 2\delta)\, cos.\, \Phi^2 + sin.\, \Phi^2} = \surd \frac{1 + 4\delta\, cos.\, \Phi^2}{1 + 2\delta\, cos.\, \Phi^2},$$

siue proxime

$$z = \frac{1 + 2\delta\, cos.\, \Phi^2}{1 + \delta\, cos.\, \Phi^2} = 1 + \delta\, cos.\, \Phi^2,$$

qui valor adhuc commodius ita exprimitur:

$$CL = z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta\, cos.\, 2\Phi.$$

§. 10. Deinde habebimus

$$tang.\, \omega = \frac{2\delta\, sin.\, \Phi\, cos.\, \Phi}{1 + 2\delta\, cos.\, \Phi^2},$$

et quia potestates ipsius δ negligimus, erit simpliciter

$$tang.\, \omega = 2\delta\, sin.\, \Phi\, cos.\, \Phi = \delta\, sin.\, 2\Phi;$$

vnde cum sit $\delta = \frac{1}{200}$, pro latitudine $\Phi = 45°$ erit

$$tang.\, \omega = \tfrac{1}{200} = 0{,}0050000, \text{ ideoque } \omega = 17', 11''.$$

Denique radius osculi in puncto L erit

$$\frac{1 + 2\delta}{(1 + 2\delta\, cos.\, \Phi^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + 2\delta\, sin.\, \Phi^2 = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta\, cos.\, 2\Phi.$$

Praeterea vero hinc patet, angulum ACL esse $= \Phi - \omega$, qui ergo angulus semper minor est quam elevatio poli, ab eaque deficit interuallo ω.

Tab. IX. Fig. 5. §. 11. Repraesentemus haec elementa in figura sphaerica solita, vbi AB referat horizontem, semicirculus AVB Meridianum loco obseruatoris respondentem, in quo V sit punctum verticale in coelo, quod simpliciter nomine

nomine verticis indicemus; tum vero P denotet Polum, ita vt arcus $BP = \Phi$. Nisi ergo polus P vel in B vel in V incidat, punctum, quod zenith vocamus, semper a vertice V discrepabit. Si enim in figura praecedente rectae C B, C L et N L vsque in coelum producantur, prima C B tendebit in polum P, secunda C L dabit punctum Z, quod est zenith, at tertia N L in coelo dabit verticem V. Vnde patet, haec tria puncta, P, V, Z in idem planum, scilicet in planum meridiani loci L incidere, atque zenith Z semper longius a Polo P distare quam verticem V, idque interuallo Z L V, quem angulum vocauimus ω. Quare a vertice V ad partem Polo oppositam capiamus interuallum $VZ = \omega$, eritque Z verum zenith loci propositi; vnde si sidus quodcunque obseruetur in puncto S, eius distantia apparens a zenith erit arcus Z S, in quo producto existet locus geocentricus eiusdem sideris Σ, sumto scilicet interuallo $S\Sigma$ aequali Parallaxi, quemadmodum ex prima figura est manifestum; vnde patet, respectu verticis V haec puncta S et Σ notabiliter discrepare a hypothesi Terrae sphaericae, hocque discrimen plurimum variare, tam pro variis loci altitudinibus, quam pro situ sideris S. Tab. IX. Fig. 2. Fig. 3.

§. 12. Nunc, quoniam effectus Parallaxeos $S\Sigma$ pendet vel ab arcu ZS vel ab arcu $Z\Sigma$, praemittamus duo Problemata, prouti vel arcus ZS, vel arcus $Z\Sigma$ fuerit datus; vnde oporteat ipsam Parallaxin $S\Sigma$ definire. In vtroque autem assumamus, praeter distantiam obseruatoris a centro Terrae, quam posuimus $= z$, etiam datam esse distantiam sideris a centro Terrae, quam ponemus $= s$, ita vt fractio $\frac{z}{s}$ denotet id quod Astronomi appellant Parallaxin

hori-

horizontalem. Quia autem haec denominatio desumta est ex hypothesi Terrae sphaericae, in sequentibus calculis potius hanc ipsam fractionem $\frac{z}{s}$ retineamus, eiusque loco breu. gr. scribamus literam π, cuius valor pro Luna vix vltra $\frac{1}{60}$ assurgit; pro aliis vero sideribus incomparabiliter est minor.

Problema praeliminare I.

Tab. IX. Fig. 1. §. 13. *Data distantia obseruatoris a centro Terrae* $CL = z$, *vna cum distantia sideris ab hoc centro* $CS = s$, *si cognitus fuerit angulus* ZLS, *inuenire angulum* $ZL\Sigma$, *hincque Parallaxin, siue angulum* $SL\Sigma$.

Solutio.

Ponatur igitur angulus $ZLS = \zeta$, atque ex triangulo CLS statim habemus hanc analogiam:

$$CS : CL = \sin.\,\zeta : \sin.\,SL\Sigma,$$

vnde statim colligitur

$$\sin.\,SL\Sigma = \frac{CL\,\sin.\,\zeta}{CS} = \pi \sin.\,\zeta,$$

hocque angulo subtracto ab angulo $ZLS = \zeta$, relinquetur angulus $ZL\Sigma$ siue ZCS. Quod si iam haec ad figuram tertiam transferamus, erit arcus $ZS = \zeta$ et arcus $S\Sigma = \pi \sin.\,\zeta$, hincque porro arcus $Z\Sigma = \zeta - \pi \sin.\,\zeta$. Fig. 3.

§. 14. Quia Parallaxis $S\Sigma$ vix vnquam vnum gradum superare solet, eius sinus ab ipso arcu non discrepabit, hincque statim ipsa Parallaxis in minutis secundis expressa obtineri potest, si a logarithmo formulae $\pi \sin.\,\zeta$ subtra-

ſubtrahatur iſte logarithmus conſtans 4,6855749; ac ſi iſte logarithmus a $l\,\pi$ ſubtrahatur, habebitur Parallaxis horizontalis vulgo ſic dicta, quae cum reſpondeat angulo $\zeta = 90°$, euidens eſt, punctum S hoc caſu non in horizontem incidere, quippe qui 90 gradibus diſtat, non a zenith Z, ſed a vertice V. Tab. IX. Fig. 3.

Problema praeliminare II.

§. 15. *Data diſtantia obſeruatoris a centro Terrae, vna cum diſtantia ſideris ab eodem centro, ſi cognitus fuerit angulus* $Z L \Sigma$ *ſiue* $Z C S = \eta$, *inuenire Parallaxin, ſiue angulum* L S C.

Solutio.

Ex L in rectam C S demittatur perpendiculum L M, eritque $L M = z$ ſin. η et $C M = z$ coſ. η, hincque fiet $S M = s - z$ coſ. η, vnde iam ſequitur tangens anguli L S C, ſiue Parallaxeos, cum ſit Fig. 1.

$$\text{tang. } L S C = \frac{z \text{ ſin. } \eta}{s - z \text{ coſ. } \eta} = \frac{\pi \text{ ſin. } \eta}{1 - \pi \text{ coſ. } \eta},$$

et quia π ſemper eſt fractio ſatis parua, erit

$$\frac{1}{1 - \pi \text{ coſ. } \eta} = 1 + \pi \text{ coſ. } \eta,$$

hincque deducitur

$$\text{tang. } L S C = \text{tang. } S L \Sigma = \pi \text{ ſin. } \eta + \pi \pi \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \eta$$
$$= \pi \text{ ſin. } \eta + \tfrac{1}{2} \pi . \pi \text{ ſin. } 2\,\eta;$$

hic autem angulus, ſi ad angulum $Z L \Sigma = \eta$ addatur, producit angulum Z L S, quem ante nominauimus $= \zeta$. Transferantur nunc haec ad figuram ſphaericam, vbi L Fig. 3.

concipitur in centro Sphaerae, eritque arcus $Z\Sigma = \eta$, vnde ergo erit

$$\text{tang. } S\Sigma = \pi \text{ fin. } \eta + \tfrac{1}{2} \pi \pi \text{ fin. } 2 \eta.$$

§. 16. Vulgo quidem in determinatione Parallaxeos hi duo arcus $ZS = \zeta$ et $Z\Sigma = \eta$ promiscue vsurpari solent: at vero pro Luna discrimen notabile oriri potest, quod ex termino $\frac{1}{2} \pi \pi \text{ fin. } 2 \eta$ aestimari poterit. Sumto enim $\pi = \frac{1}{60}$ et $\eta = 45°$, valor formae $\frac{1}{2} \pi \pi \text{ fin. } 2 \eta$ fiet $= \frac{1}{7200}$. Quia nunc vnitas aequivalet angulo $57°, 17'$ $= 3437'$, euidens est, eius valorem circiter ad semiminutum siue 30 circiter minuta secunda assurgi posse.

§. 17. Haec duo Problemata fundamenta constituunt omnium sequentium inuestigationum circa Parallaxin; verum antequam omnes quaestiones huc pertinentes rite euoluere licet, tabulam computemus, quae pro singulis latitudinibus loci obseruatoris Φ exhibeat sequentia elementa:

1°. Distantiam obseruatoris a centro Terrae $CL = z$.

2°. Differentiam inter verticem et zenith, siue interuallum $VZ = \omega$, ac

3°. Radium osculi pro loco obseruatoris, quem ponamus $= r$.

Hic calculus ex formulis ante inuentis facile expedietur, cum sit

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \text{ cof. } 2\Phi$$

$$\text{tang. } \omega = \delta \text{ fin. } 2\Phi$$

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{3}{2}\delta \text{ cof. } 2\Phi$$

Tabu-

Tabulam autem hanc construemus ad hypothesin

$$\delta = \tfrac{1}{200} = 0,00500;$$

vnde, si forte valor exactior innotuerit, correctiones inde fluentes facile assignare licebit. Interim autem, loco δ hunc valorem substituendo, formulae ternae pro tabula construenda necessariae hanc formam induunt:

$$z = 1,002500 + \tfrac{1}{400} \operatorname{cos.} 2\,\Phi$$

$$\operatorname{tang.} \omega = \tfrac{1}{200} \operatorname{fin.} 2\,\Phi$$

$$r = 1,002500 - \tfrac{3}{200} \operatorname{cos.} 2\,\Phi.$$

Φ	z	ω		r
0°	1,005000	0′	0″	0,995000
1	1,004998	0	36	0,995005
2	1,004994	1	12	0,995018
3	1,004986	1	48	0,995041
4	1,004976	2	24	0,995073
5	1,004962	2	59	0,995114
6	1,004945	3	34	0,995164
7	1,004926	4	9	0,995223
8	1,004903	4	44	0,995291
9	1,004878	5	18	0,995367
10	1,004849	5	53	0,995452
11	1,004818	6	26	0,995546
12	1,004784	6	59	0,995048
13	1,004747	7	32	0,995759
14	1,004707	8	4	0,995878
15	1,004665	8	36	0,996005
16	1,004620	9	7	0,996140
17	1,004573	9	37	0,996282
18	1,004523	10	6	0,996433

Φ	z	ω		r
19°	1,004470	10′	35″	0,996590
20	1,004415	11	3	0,996755
21	1,004358	11	30	0,996926
22	1,004298	11	56	0,997105
23	1,004237	12	22	0,997290
24	1,004173	12	46	0,997482
25	1,004107	13	10	0,997679
26	1,004039	13	33	0,997883
27	1,003969	13	54	0,998011
28	1,003898	14	15	0,998306
29	1,003825	14	35	0,998526
30	1,003750	14	53	0,998750
31	1,003674	15	11	0,998978
32	1,003596	15	27	0,999212
33	1,003517	15	42	0,999450
34	1,003436	15	56	0,999692
35	1,003355	16	9	0,999935
36	1,003272	16	21	0,000283
37	1,003189	16	31	1,000433
38	1,003105	16	41	1,000686
39	1,003020	16	49	1,000940
40	1,002934	16	55	1,001198
41	1,002896	17	1	1,001456
42	1,002761	17	6	1,001716
43	1,002674	17	9	1,001977
44	1,002587	17	10	1,002239
45	1,002500	17	11	1,002500
46	1,002413	17	10	1,002761
47	1,002326	17	9	1,003023

Φ

Φ	z	ω		r
48°	1,002239	17′	6″	1,003284
49	1,002153	17	1	1,003544
50	1,002066	16	55	1,003802
51	1,001980	16	49	1,004060
52	1,001895	16	41	1,004314
53	1,001811	16	31	1,004567
54	1,001728	16	21	1,004717
55	1,001645	16	9	1,004065
56	1,001564	15	56	1,005308
57	1,001483	15	42	1,005550
58	1,001404	15	27	1,005788
59	1,001326	15	11	1,006022
60	1,001250	14	53	1,006250
61	1,001175	14	35	1,006474
62	1,001102	14	15	1,006694
63	1,001031	13	54	1,006989
64	1,000961	13	33	1,007117
65	1,000893	13	10	1,007321
66	1,000827	12	46	1,007518
67	1,000763	12	22	1,007710
68	1,000702	11	56	1,007895
69	1,000642	11	30	1,008074
70	1,000585	11	3	1,008245
71	1,000530	10	35	1,008410
72	1,000478	10	6	1,008567
73	1,000427	9	37	1,008718
74	1,000380	9	7	1,008860
75	1,000335	8	36	1,008995
76	1,000293	8	4	1,009122

Φ

Φ	z	ω		r
77°	1,000253	7′	32″	1,009241
78	1,000216	6	59	1,009352
79	1,000182	6	26	1,009454
80	1,000151	5	53	1,009547
81	1,000122	5	18	1,009633
82	1,000097	4	44	1,009709
83	1,000074	4	9	1,009777
84	1,000055	3	34	1,009836
85	1,000038	2	59	1,009886
86	1,000024	2	24	1,009927
87	1,000014	1	48	1,009959
88	1,000006	1	12	1,009982
89	1,000002	0	36	1,009995
90	1,000000	0	0	1,010000

§. 18. Circa hanc tabulam ante omnia eſt obſeruandum, eam potiſſimum Parallaxi Lunae determinandae eſſe deſtinatam, quippe quae adeo integrum gradum ſuperare ſolet. Quoniam enim Parallaxes Planetarum vix vnquam ſemiminutum primum excedere poſſunt, hypotheſis Terrae ſphaericae iis definiendis omnino ſufficit, atque ſuperfluum foret iſtam tabulam in ſubſidium vocare. Quin etiam, ſi quando aliquis Cometa ad Terram tam prope accederet, vt vſus huius Tabulae neceſſarius videri poſſet, tum plerumque nunquam eius loca tam exacte definire licet, vt aberratio plurium ſecundorum ſpectari mereretur.

§. 19. Quoniam igitur haec tabula vnice motui Lunae determinando inſeruire eſt cenſenda, notandum eſt, in in tabulis lunaribus non eius veram distantiam a Terra assignari, sed eius loco Parallaxin horizontalem sub ipso Aequatore exhiberi solere. Hanc ergo designemus litera ae, cuius valor, cum ante distantia Lunae a Terra posita sit $= s$, et semidiamer Aequatoris $= 1 + \delta$, erit

$$ae = \frac{1 + \delta}{s}.$$

Quare cum supra posuerimus pro Terrae loco quocunque eius distantiam a centro $= z$, ibique Parallaxin horizontalem $\frac{z}{s} = \pi$, semper erit $\pi = \frac{ae \cdot z}{1 + \delta}$. Cum igitur pro eleuatione Poli $= \Phi$ invenerimus

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi = 1 + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2, \text{ erit}$$

$$\pi = \frac{ae (1 + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2)}{1 + \delta},$$

quae formula, ob $\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta$, reducitur ad hanc:

$$\pi = ae (1 - \delta + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2) = ae (1 - \delta \operatorname{fin.} \Phi^2)$$

siue etiam:

$$z = ae (1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi).$$

Quia igitur erat

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi, \text{ erit quoque } \pi = ae (z - \delta).$$

§. 20. Quoniam igitur Parallaxis Lunae *aequatorea* pro variis eius locis in sua orbita ab $54'$ vsque ad $62'$ increscere circiter potest, pro quolibet eius valore ad omnes latitudines loci Parallaxin Lunae horizontalem facile computare licebit, quem in finem sequentem Tabulam adiiciemus, in qua pro his nouem Parallaxibus aequatoreis: 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 et 62. Parallaxin horizontalem ad Latitudines quinis gradibus increscentes exhibebimus. Et quia hae Parallaxes ab Aequatore vsque ad Polum continuo decrescunt, haec Tabula ostendet, quot minuta

minuta ſecunda a Parallaxi aequatorea ſubtrahi debeant, vt Parallaxis horizontalis pro quolibet obſeruatoris loco obtineatur, ſiue oſtendet valorem formulae $ae - \pi$, qui eſt $ae\left(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta \,\text{coſ.}\, 2\,\Phi\right)$; atque ob $\delta = \frac{1}{200}$ erit

$$ae - \pi = \frac{ae}{400}\left(1 - \text{coſ.}\, 2\,\Phi\right).$$

TABVLA
Valores $ae - \pi$ exhibens, ad quinos gradus Latitudinis computata.

Lat. loci Φ	Parallaxis aequatorea.								
	54′	55′	56′	57′	58′	59′	60′	61′	62′
0°	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00
5	0, 12	0, 12	0, 12	0, 13	0, 13	0, 13	0, 13	0, 14	0, 14
10	0, 49	0, 50	0, 51	0, 52	0, 53	0, 54	0, 54	0, 55	0, 56
15	1, 08	1, 10	1 13	1, 16	1, 17	1, 19	1, 21	1, 23	1, 25
20	1, 89	1, 91	1, 95	2, 00	2, 03	2, 07	2, 10	2, 13	2, 17
25	2, 89	2, 94	2, 99	3, 05	3, 10	3, 15	3, 20	3, 25	3, 31
30	4. 05	4, 12	4. 19	4, 27	4, 34	4, 41	4, 49	4, 57	4, 65
35	5, 33	5, 43	5, 53	5, 63	5, 72	5, 82	5, 92	6, 02	6, 12
40	6, 69	6, 81	6, 94	7, 07	7, 19	7, 31	7, 44	7, 56	7, 68
45	8, 10	8, 25	8, 40	8, 55	8. 70	8, 85	9, 00	9, 15	9, 30
50	9, 51	9, 67	9, 83	10, 00	10, 18	10, 36	10, 54	10, 72	10, 91
55	10, 87	11, 07	11, 27	11, 47	11, 67	11, 87	12, 07	12, 27	12, 47
60	12, 15	12, 37	12, 59	12, 82	13, 05	13, 27	13, 50	13, 72	13, 96
65	13, 30	13, 55	13, 80	14, 05	14, 29	14, 53	14, 78	15, 02	15, 27
70	14, 30	14, 56	14, 83	15, 10	15, 36	15, 62	15, 89	16, 15	16, 42
75	15, 11	15, 39	15, 67	15, 95	16, 23	16, 51	16, 79	17, 07	17, 35
80	15, 71	15, 99	16, 28	16, 58	16, 87	17, 16	17, 45	17, 74	18, 03
85	16, 08	16, 37	16, 67	16, 97	17, 26	17, 56	17, 86	18, 16	18, 45
90	16, 20	16, 50	16, 80	17, 10	17, 40	17, 70	18, 00	18, 30	18, 60

§. 21.

§. 21. Haec tabula vsque ad partes centesimas minuti secundi est computata, quo ordo in his numeris clarius pateret; in vsu enim has partes tuto omittere licebit. Tum vero minuta secunda in hac tabula consignata semper a Parallaxi aequatorea subtrahi oportet, vt prodeat Parallaxis horizontalis pro latitudine proposita. Ita si obseruator reperiatur sub latitudine $60°$, et Parallaxis aequatorea Lunae tempore obseruationis sit $55'$, inde subtrahi debent 12 minuta sec. sicque Parallaxis horizontalis hoc loco erit. $54', 48''$. Sin autem eo tempore Parallaxis aequatorea fuerit $61'$, Parallaxis horizontalis erit $61' - 14'' = 60', 46''$. Ceterum, quamquam haec tabula tantum ad integra minuta prima Parallaxis aequatoreae est computata, facile tamen erit interpolationem pro omnibus valoribus intermediis instituere, id quod etiam tenendum est, si latitudo obseruatoris non in hac tabula reperiatur: vtroque enim casu interpolatio sine calculo, sola aestimatione fieri poterit.

§. 22. Quo iam vsum huius Tabulae clarius ostendamus, primo assumemus, Lunam in ipso Meridiano esse obseruatam, et docebimus, quomodo inde eius verus locus geocentricus determinari debeat. Deinde quaestionem invertemus, et ex dato loco Lunae geocentrico tempore culminationis inquiremus, sub quanam altitudine obseruatori apparere debeat. Porro vero vtramque quaestionem pro iis casibus resoluemus, quibus Luna in ipso Horizonte obseruatur. Denique vero procedemus ad Lunae loca quaecunque alia, quibus non solum distantia Lunae a vertice, sed etiam eius Azimuth quaeri debebit.

 Pro-

Tab. IX. Fig. 4.

Problema I.

Si Luna in ipso Meridiano ab obseruatore ad datam latitudinem constituto in S obseruetur, eiusque distantia a vertice, siue arcus V S innotescat, inuestigare eius verum locum geocentricum Σ, siquidem pro hoc tempore Parallaxis Lunae aequatorea fuerit cognita.

Solutio.

§. 23. In Meridiano loci A V B, Horizonte A B insistente, sit V vertex loci, in quo obseruator versatur, et P Polus, cuius eleuatio, siue latitudo obseruatoris sit $BP = \Phi$, vnde ex tabula desumatur interuallum $VZ = \omega$; porro vero vocetur arcus $VS = f$, cuius ergo complementum dabit altitudinem Lunae obseruatam, siue arcum A S. Praeterea sit *ae* Parallaxis aequatorea Lunae, pro qua postrema Tabula statim dabit π, siue Parallaxin horizontalem pro loco proposito.

§. 24. Iam ad punctum S, seu locum Lunae geocentricum inuestigandum, notemus esse arcum $ZS = f - \omega$, quem in Problemate praeliminari priori vocauimus $= \zeta$, siquidem hic arcus Z S praebet distantiam loci obseruati S a zenith Z, vnde idem illud Problema nobis dabit

$$S\Sigma = \pi \sin.(f - \omega) = \pi \sin. f \cos. \omega - \pi \cos. f \sin. \omega.$$

Hic autem, ob arculum $VZ = \omega$ tam exiguum, vt eius potestates tuto negligi queant, sumere licebit $\cos. \omega = 1$ et $\sin. \omega = \omega$, vnde fiet $S\Sigma = \pi \sin. f - \pi \omega \cos. f$, hincque ergo erit distantia $V\Sigma = f - S\Sigma$, cui si addatur arcus $PV = 90° - \Phi$, prodibit distantia loci geocentrici Σ a polo

P,

P, cuius complementum est eius declinatio, hincque porro tam Lunae longitudo quam latitudo per praecepta cognita inueniri poterit, quandoquidem ex tempore culminationis innotescit ascensio recta.

§. 25. Verum si hypothesi Terrae sphaericae in hoc calculo essemus vsi, prodiisset hoc interuallum $S\Sigma = \pi$ sin. f; vnde patet, hanc hypothesin errorem valde notabilem producere posse, cum sit $= \pi\,\omega$ cos. f. Quo hoc clarius perspiciatur consideretur casus, quo $\pi = \frac{1}{60}$, $\omega = 17'$, ita vt eleuatio Poli $= 45°$; tum vero arcum f statuamus $= 30°$, eritque error $= \frac{1}{4}$ proxime, siue $= 15''$, qui error, mutatis circumstantiis, propemodum vsque ad $18''$ ascendere potest, et cum iste error $\pi\,\omega$ cos. f semper sit negatiuus, euidens est, verum punctum Σ, siue locum Lunae geocentricum, aliquanto longius a Polo P distare, quam si Terra sphaerica assumeretur. Ex hoc autem errore adhuc maior error in longitudinem et latitudinem Lunae influere potest. Ac si perpendamus, in altitudine Lunae obseruata errorem quoque plurium secundorum committi posse, dum insuper ipsa Poli eleuatio nunquam ad aliquot minuta secunda certa esse solet, distantia a Polo P fortasse vltra 30 minuta secunda a veritate aberrare poterit. Praeterea in ipso momento obseruationis, vnde ascensio recta deduci debet, error vnius secundi temporis, vnde $15''$ in ascensione recta oriuntur, vix euitari potest. Quin etiam, quia haec ascensio recta a loco Solis computatur, quem raro intra quindecim minuta secunda assignare exactum licet, manifestum est, omnes hos errores iunctim sumtos facile integrum minutum primum superari posse; ex quo intelligitur, loca Lunae, ex huiusmodi obseruationibus conclusa, plus quam minuto primo fallere posse.

§. 26. Cum error hypothesis sphaericae sit $-\pi\omega$ cos. f, patet, eum duobus casibus euanescere posse: altero quo $\omega = 0$, quod euenit, vel quando obseruator sub ipso Aequatore versatur, vel sub ipso Polo; altero vero, quando $f = 90°$, hoc est, quando Luna in Horizonte conspicitur. Hinc igitur ascendendo error continuo increscet, atque adeo vsque ad verticem V, vel zenith Z. Si enim punctum S in zenith Z cadat, Parallaxis reuera erit nulla, cum tamen in hypothesi sphaerica sit π sin. ω, cuius valor, casu quo $\pi = 63'$ et $\omega = 17''$ fit $19''$. Verum quia hic $\omega = 17'$, ideoque altitudo Poli $= 45°$, Luna nunquam vsque ad zenith ascendere potest. Idem euenit, si Luna vsque ad verticem ascenderet, tum enim Parallaxis euanesceret in hypothesi Terrae sphaericae; reuera autem iterum erit $= \pi$ sin. ω, quo interuallo Luna magis a Polo remouetur. Quo autem applicatio nostrae Tabulae clarius appareat, aliquot exempla subiungamus.

Exemplum I.

§. 27. *Sub eleuatione Poli 40°, 30', altitudo centri Lunae meridiana obseruata est 77°, 30', quo tempore Parallaxis aequatorea erat 61', inuenire verum locum geocentricum.*

Hic ergo erat $\Phi = 40°, 30'$, vnde reperitur interuallum $VZ = \omega = 16', 58''$. Deinde erit distantia Lunae obseruata a vertice $12°, 30' = f$. Porro vero Parallaxis ae-

aequatorea $61'$ diminui debebit $8''$, ita vt sit Parallaxis horizontalis $\pi = 60', 52''$. Hinc ergo ob $f - \omega = 12°, 13', 2''$ calculus pro interuallo ΣS ita instituetur:

$$l\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{fin.}\,(f - \omega) = 9,32553$$
$$lS\Sigma = 2,88806$$
$$\text{ergo } S\Sigma = 773'' = 12', 53'',$$

quod ergo interuallum, ad altitudinem obseruatam additum, dabit altitudinem Lunae veram $= 77°, 42', 53''$, siue subtractum ab angulo f, relinquet distantiam a vertice $V\Sigma = 12°, 17', 7''$, ideoque eius distantia a Polo P erit $= 61°, 47', 7''$. At vero in hypothesi Terrae sphaericae calculus ita se habebit:

$$l\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{fin.}\,f = 9,33534$$
$$lS\Sigma = 2,89787$$
$$\text{ergo } S\Sigma = 790''' = 13', 10'',$$

sicque error huius hypothesis est $17''$.

Exemplum 2.

§. 28. *Sub eleuatione Poli $59°, 56'$, in ipso Meridiano obseruata est altitudo centri Lunae $8°, 43'$, quo tempore Parallaxis aequatorea erat $57', 27''$, quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Hic ergo est $\Phi = 59°, 56'$, tum vero arcus $VS = f = 81°, 17'$. Iam a Parallaxi aequatorea subtrahi oportet $13''$, ita vt sit $\pi = 57', 14''$. Hinc ergo erit intervalvallum $VZ = \omega = 14', 53''$, vnde fit $f - \omega = 81°, 2', 7''$, hincque porro $S\Sigma = \pi . \text{fin.} (f - \omega)$, fiue $S\Sigma = 3434 \text{ fin. } 81°, 2', 7''$; calculus igitur, fimul inftitutus pro hypothefi fphaerica, ita fe habet:

$$l\,\pi = 3,53580 \qquad l\,\pi = 3,53580$$
$$l \text{ fin. } f = 9,99495 \qquad l \text{ fin. } (f - \omega) = 9,99466$$
$$l\, S\Sigma = 3,53075 \qquad l\, S\Sigma = 3,53046$$

ergo $S\Sigma = 3394'' = 56', 34''$ ergo $S\Sigma = 3392'' = 56', 32''$

ficque error tantum eft $2''$. Altitudo ergo Lunae vera erit $9°, 39', 32''$, ideoque diftantia a vertice $80°, 20', 28''$, ita vt, ob $VP = 30°, 4'$, diftantia a Polo fit $110°, 24', 28''$, ficque declinatio Lunae Auftralis $= 20°, 24', 28''$.

Exemplum 3.

§. 29. *Sub altitudine Poli 72°, 15' obferuatur altitudo centri Lunae in Meridiano Septemtrionem verfus = 9°, 45', quo tempore Parallaxis aequatorea fuerit 59', 40'', quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Tab. IX. Fig. 5. Hic ergo eft $\Phi = BP = 72°, 15'$ et arcus $VS = f = 80°, 15'$. Iam a Parallaxi aequatorea fubtrahi debent $16''$, vnde fit $\pi = 59', 24'' = 3564''$. At vero ob $\Phi = 72°, 15'$ erit interuallum $VZ = \omega = 10'$, ficque erit $ZS = 80°, 25'$. Scilicet hoc cafu ω vt negatiuum fpectari debet refpectu puncti S, ita vt fumi debeat $f + \omega = 80°, 25'$ et iam erit $S\Sigma = \pi . \text{fin.} (f + \omega)$.

$l\,\pi$

$$l\,\pi = 3,55194$$
$$l\,\text{fin.}\,(f + \omega) = 9,99390$$
$$l\,S\,\Sigma = 3,54584$$

ideoque $S\Sigma = 3514'' = 58', 34''$

ideoque vera altitudo ſuper horizonte erat $10°, 43', 34''$.

Problema II.

Si in duobus Terrae locis, ſub eodem Meridiano ſitis, culminatio Lunae eiusque altitudo ſimul obſeruentur, ex comparatione harum duarum obſeruationum Parallaxin Lunae aequatoream ad idem tempus definire.

Solutio.

§. 30. Conſideremus hic integrum Meridianum, in quo puncta P et P′ ſint ambo Poli oppoſiti, vt bini obſeruatores citra et vltra Aequatorem ſupponi queant; quandoquidem, vt ex huiusmodi obſeruationibus concluſio certa deduci queat, obſeruatores a ſe inuicem maxime remoti aſſumi debent. Sit ergo prioris obſeruatoris in ſuperiore Hemiſphaerio vertex in V, eiusque latitudo $= \Phi$, ideoque arcus $PV = 90° - \Phi$. Tum vero ſit S locus Lunae obſeruatus, eiusque diſtantia $VS = f$. Alterius vero Obſeruatoris in Hemiſphaerio Auſtrali vertex ſit in V′, cuius latitudo ſit $= \Phi'$, quae ergo reſpectu prioris vt negatiua eſt ſpectanda, ita vt eius diſtantia a Polo P ſit $90° + \Phi'$. Luna autem ab eo obſeruetur in puncto S′, ponaturque arcus $V'S' = f'$. Verus autem locus Lunae geocentricus ſit in Σ, qui ergo vtrique obſeruatori eſt communis. Hoc autem punctum, ſi vt ſupra pro vtroque obſeruatore determinetur, neceſſe eſt, vt ſumma arcuum $V\Sigma$ Tab. IX. Fig. 6.

et

et $V'\Sigma$ aequetur summae ambarum Latitudinum, hoc est $\Phi + \Phi'$, ex qua porro aequatione Parallaxis aequatorea Lunae, quae sit $= ae$, erui debet.

§. 31. Nunc igitur vtramque obseruationem euoluamus vt ante, sitque pro priore obseruatore zenith in Z, eritque $VZ = \delta \sin. 2\Phi$, Parallaxis autem horizontalis pro isto loco erit $\pi = ae(1 - \delta \sin. \Phi^2)$. Hinc ergo interuallum $S\Sigma$ erit $= \pi \sin. ZS$, hoc est

$$S\Sigma = ae(1 - \delta \sin. \Phi^2) \sin. (f - \delta \sin. 2\Phi),$$

quae formula transmutatur in hanc:

$$S\Sigma = ae(\sin. f - \delta \sin. \Phi^2 \sin. f - \delta \sin. 2\Phi \cos. f).$$

Hinc ergo habebimus arcum $V\Sigma = f - S\Sigma$, siue

$$V\Sigma = f - ae(\sin. f - \delta \sin. \Phi^2 \sin. f - \delta \sin. 2\Phi \cos. f).$$

Ac posito brev. gr.

$$\sin. f - \delta \sin. \Phi^2 \sin. f - \delta \sin. 2\Phi \cos. f = F$$

fiet arcus $V\Sigma = f - ae F$.

§. 32. Simili modo pro altero obseruatore, cuius vertex est in V', sit Z' eius zenith, eritque $V'Z' = \delta \sin. 2\Phi'$, parallaxis vero horizontalis hoc loco, quae sit $= \pi'$, erit $\pi' = ae(1 - \delta \sin. \Phi'^2)$. Quamobrem, si iterum breuitatis gratia ponamus, vt supra

$$\sin. f' - \delta \sin. \Phi'^2 \sin. f' - \delta \sin. 2\Phi' \cos. f' = F'$$

erit interuallum $V'\Sigma = f' - ae F'$. His inuentis, cum summa arcuum $V\Sigma$ et $V'\Sigma$ sit $\Phi + \Phi'$, habebimus hanc aequationem $\Phi + \Phi' = f + f' - ae(F + F')$, ex qua aequatione elicimus Parallaxin aequatoream

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{F + F'}.$$

§. 33.

§. 33. Reſtituamus nunc loco F et F' valores asſumtos, eritque Parallaxis quaeſita:

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\text{ſin.}\, f + \text{ſin.}\, f' - \delta\,(\text{ſin.}\, f\, \text{ſin.}\, \Phi^2 + \text{ſin.}\, f'\, \text{ſin.}\, \Phi'^2 - \delta\,(\text{coſ.}\, f\, \text{ſin.}\, 2\,\Phi + \text{coſ.}\, f'\, \text{ſin.}\, 2\,\Phi')}$$

quae formula ob figuram Terrae ſphaeroidicam ſatis quidem eſt complicata; interim tamen facili calculo expeditur, ſumto ſcilicet $\delta = \frac{1}{200}$. Sin autem Terra perfecte eſſet ſphaerica et $\delta = 0$, aequatio noſtra ſatis ſimplex euaderet, cum inde ſit $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\text{ſin.}\, f + \text{ſin.}\, f'}$. Praeterea vero ſi diſtantia Lunae eſſet infinita, ideoque eius Parallaxis nulla, vtique foret $f + f' = \Phi + \Phi'$, ideoque numerator euaneſceret.

§. 34. Immediate ergo ex obſeruationibus conſtant quatuor arcus Φ, Φ', f', f', atque neglectis partibus a δ pendentibus iam ſatis exacte habebitur $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\text{ſin.}\, f + \text{ſin.}\, f'}$, quo inuento facile erit inueſtigare, quanta ſui parte Parallaxis, ob terminos litera δ affectos, augere debeat. Perſpicuum enim eſt, ob veram Terrae figuram Parallaxin ae ſemper aliquanto maiorem prodire debere. Haec enim augmentatio ſemper fieri debet in ratione:

$$1 : 1 + \frac{\delta\,(\text{ſin.}\, f\, \text{ſin.}\, \Phi^2 + \text{ſin.}\, f'\, \text{ſin.}\, \Phi'^2 + \text{coſ.}\, f\, \text{ſin.}\, 2\,\Phi + \text{coſ.}\, f'\, \text{ſin.}\, 2\,\Phi')}{\text{ſin.}\, f + \text{ſin.}\, f'}.$$

Quoniam autem exemplum completum afferre non licet, inquiramus tantum in correctionem, quam vera Terrae figura producit, vbi quidem facile intelligitur, ſufficere, ſi arcus f et f' propemodum tantum innoteſcant. Aſſumamus igitur eſſe $\Phi = 52°, 30'$ et $\Phi' = 35°$; tum vero $f = 42°$ et $f' = 46°, 30'$, atque numeratoris noſtrae fractionis quatuor partes erunt:

I. =

I. = 0, 42117
II. = 0, 23864
III. = 0, 71782
IV. = 0, 64685. Hinc numerator prodit

= 2, 02448, cuius pars 200^{ma} fit 0, 019122, quae, diuisa per fin. f + fin. f' = 1, 39450, praebet correctionem quaesitam = 0, 007259, quae scilicet est augmentatio Parallaxis aequatoreae ex hypothesi Terrae sphaericae conclusa, quae ergo si fuerit Parallaxis = $60'$ = $3600''$, erit = $25''$, ita vt vera Parallaxis aequatorea fit $60'$, $25''$.

§. 35. Tales binae obseruationes annis abhinc 27 institutae sunt a duobus obseruatoribus, quorum alter, Abbas *la Caille*, missus fuerat ad Promontorium bonae spei, alter vero, Cel. *de la Lande*, Berolinum, quoniam haec duo loca propemodum sub eodem Meridiano sita credebantur, cum tamen deinceps notabilis differentia fuerit deprehensa; vnde necesse erat, ambas obseruationes per multas ambages ad eundem Meridianum reducere. Tandem vero, peractis obseruationibus, ingenti labore conclusionem inde deduxerunt, dum scilicet chordam, a Berolino intra Terram ad Caput bonae spei ductam, in computum traxerunt, cum tamen nostra methodo idem negotium multo facilius confici potuisset.

Problema III.

Si locus Lunae geocentricus ad datum tempus, quo Luna per Meridianum dati loci transire debet, fuerit cognitus, vna cum Parallaxi aequatorea pro eodem tempore, inuenire eius altitudinem apparentem super Horizonte loci dati.

Solu-

Solutio.

§. 36. Quia locus Lunae geocentricus cognitus assumitur, nota erit eius distantia a vertice obseruatoris V. Ponatur ergo arcus $V\Sigma = g$, latitudo vero loci sit $= \Phi$, vnde ex nostra Tabula definiatur zenith Z, eritque $VZ = \omega = \delta$ sin. 2Φ. Porro quia etiam Parallaxis aequatorea *ae* datur, ex ea ex posteriori Tabula excerpatur Parallaxis horizontalis π, quae ex formulis nostris generalibus est $\pi = ae\,(1 - \delta\,\text{fin.}\,\Phi^2)$.

§. 37. Nunc recurramus ad Problema praeliminare secundum, vbi arcus $Z\Sigma$ litera η indicatur; erit ergo $\eta = V\Sigma - VZ = g - \omega$. Quodsi nunc S designet locum centri Lunae apparentem, ibi ostendimus, esse

$$\Sigma S = \pi\,\text{fin.}\,(g-\omega) + \tfrac{1}{2}\,\pi\pi\,\text{fin.}\,2\,(g-\omega).$$

Computata ergo hac formula innotescet interuallum $S\Sigma$, eritque idcirco distantia loci apparentis S a vertice V $= g + \Sigma S$, vbi ergo interuallum $S\Sigma$ est effectus Parallaxeos.

§. 38. Quodsi Terram tanquam sphaericam spectemus, quia tum puncta V et Z conueniunt, erit in hac Hypothesi

$$S\Sigma = \pi\,\text{fin.}\,g + \tfrac{1}{2}\,\pi\pi\,\text{fin.}\,2\,g,$$

vnde facile error commissus definiri potest. Cum enim sit

$$\text{fin.}\,(g-\omega) = \text{fin.}\,g - \omega\,\text{cos.}\,g \text{ et}$$
$$\text{fin.}\,2\,(g-\omega) = \text{fin.}\,2\,g - 2\,\omega\,\text{cos.}\,2\,g,$$

discrimen inter haec duo loca erit

$$\pi\,\omega \text{ cos. } g + \pi\,\pi\,\omega \text{ cos. } 2\,g$$

Hac ſcilicet quantitate verus valor ipſius S Σ minor erit quam in Hypotheſi Terrae ſphaericae.

§. 39. Quo hoc diſcrimen clarius pateat, ſumamus $\Phi = 45°$, ita vt ſit $\omega = 17'$, $11'' = \frac{1}{200}$; deinde ſit Parallaxis aequatorea $= 61'$, vnde pro $45°$ gradibus ſubtrahi debent $9'$, ita vt Parallaxis horizontalis ſit $\pi = 60'$, $51''$. Error igitur erit

$$\frac{\pi}{200} \text{ cos. } 18° + \frac{\pi\pi}{200} \text{ cos. } 36°,$$

ſumto ſcilicet $g = 18°$. Vbi in poſteriore termino loco alterius π ſcribi debet fractio $\frac{1}{56}$, ſicque error erit

$$3651'' \left(\frac{\text{cof. } 18°}{200} + \frac{\text{cof. } 36°}{11300}\right) = 3651.\ 0,00483.$$

conſequenter error penitus euolutus erit $= 18''$, qui in calculo ſatis eſt notabilis, atque eo magis obſeruari meretur, quod non ceſſat, etiamſi Luna proxime ad verticem vel zenith accedat.

Problema IV.

Si centrum Lunae obſeruetur in ipſo Horizonte ſub data altitudine Poli, ac pro eo tempore detur Lunae Parallaxis aequatorea, inueſtigare locum Lunae geocentricum.

Tab. IX. Fig. 7. §. 40. Quando hic de locis Lunae obſeruatis ſermo eſt, ſemper ſupponimus, eam iam refractione eſſe purgatam, quod tam de praecedentibus quam de ſequentibus probe eſt tenendum. Sit iam V vertex obſervatoris, cuius latitudo ſit $= \Phi$; tum circulus A V B referat Meridianum et A S B Horizontem, in quo centrum Lunae obseruatum sit in S, eritque arcus V S quadrans circuli, ita vt sit $f = 90°$; praeterea vero sit arcus in Horizonte A S siue angulus A V S $= a$. Iam pro latitudine loci ϕ ex nostra Tabula excerpatur interuallum V Z $= \omega$, quod est δ sin. 2 ϕ, et posita Parallaxi aequatorea $= ae$, inde ex posteriore tabula colligatur Parallaxis pro loco proposito, quae sit $= \pi$, ita vt sit

$$\pi = ae\,(1 - \delta\ \text{sin.}\ \phi^2).$$

Iam ex puncto Z ducatur arcus Z S, quem secundum Problema praeliminare prius statuamus Z S $= \zeta$, ad quem inueniendum ex Z ad V S ducatur arculus perpendicularis Z u, et quia triangulum V Z u est minimum, erit

$$V\,u = \omega\ \text{cos}.\ a \text{ et } Z\,u = \omega\ \text{sin}.\ a,$$

atque euidens est fore

$$\zeta = S\,u = 90° - \omega\ \text{cos}.\ a.$$

Hinc ergo locus Lunae geocentricus reperietur in Σ, ita vt sit $S\Sigma = \pi$ sin. $\zeta = \pi$. Hic igitur notandum est, punctum Σ non in circulum verticalem V S sed in arcum Z S cadere.

§. 41. Sin autem Terra esset sphaerica, punctum Σ vtique caderet in ipsam verticalem V S, ad altitudinem $S\sigma = \pi$, ita vt error inde ortus sit particula $\Sigma\sigma$. Hinc enim discrimen inter Parallaxin horizontalem et aequatoream negligere licet, quia totum negotium redit ad arculum $\Sigma\sigma$ definiendum. Ad hoc autem nosse necesse est, angulum V S Z, qui est $= \frac{Z\,u}{\text{sin. } Z\,S} = \omega$ sin. a, quia arcus Z S a quadrante quam minime discrepat. Hinc ergo

 erit

erit error $\Sigma\sigma = \pi\,\omega$ ſin. a, qui ergo maximus euadet in medio Horizontis Θ, hoc eſt in cardine vel Orientis vel Occidentis, vbi igitur, ob ſin. $a = 1$, erit $\Sigma\sigma = \pi\,\omega$. Hoc igitur loco, ſi ſumamus $\Phi = 45^\circ$, vbi fit $\omega = 17', 11''$, Parallaxin vero π ſtatuendo $= 61'.\ 30''$; ob $\omega = \frac{1}{200}$, erit error $\Sigma\sigma = \frac{3690''}{200} = 18''$.

§. 42. Ob veram igitur Figuram Terrae non ſolum Parallaxis in S aliquantillum mutatur, ſed etiam Azimuthum puncti Σ aliquantillum imminuitur, angulo ſcilicet Σ V S, qui angulus ergo erit $\frac{\Sigma\sigma}{\text{ſin. } V\Sigma}$ $\Sigma\sigma = \pi\,\omega$ ſin. a, cuius valor etiam, vt modo vidimus, in puncto Θ vsque ad 18 minuta ſecunda angeri poteſt. Vnde ſi hinc aſcenſio recta et declinatio computentur, hincque porro Longitudo et Latitudo, error ſatis notabilis reſultare poterit. Verum quia obſeruationes horizontales ſemper ob refractionem ſunt incertae, ab iſto errore nihil plane erit metuendum.

Problema V.

Tab. IX. Fig. 8. *Reperiatur nunc locus Lunae obſeruatus vbicunque in S, haecque obſeruatio facta ſit ſub eleuatione Poli Φ, quo tempore fuerit Parallaxis aequatorea $= ae$, inuenire verum Lunae locum geocentricum Σ.*

Solutio.

§. 43. Pro loco igitur obſeruato S noſſe oportet tam eius altitudinem, ſiue diſtantiam a vertice V S $= f$, quam eius Azimuth ſiue angulum A V S $= a$, ita vt quatuor,

tuor res nobis ſint cognitae, nempe ϕ, ae, f et a, ex quibus locum Σ quaeri oportet.

§. 44. Primo igitur ex eleuatione Poli ϕ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, ex priore tabula; deinde vero ex valore ae quaeratur Parallaxis horizontalis pro hoc loco, quae ſit $= \pi$. Iam ex Z ad arcum VS ducatur arculus normalis Zu, eritque vt ante $Vu = \omega = \text{coſ.}\, a$ et $Zu = \omega\, \text{ſin.}\, a$, vnde cum arcus $ZS = \zeta$ non differat ab arcu Su, erit $\zeta = f - \omega\, \text{coſ.}\, a$. Hinc ergo per Problema praeliminare prius erit interuallum

$$S\Sigma = \pi\, \text{ſin.}\, \zeta = \pi\, \text{ſin.}\, (f - \omega\, \text{coſ.}\, a),$$

quod interuallum vocemus $= \xi$, ita vt ξ nobis denotet Parallaxin $S\Sigma$.

§. 45. Cum igitur punctum Σ cadat in arcum ZS, non ſolum eius diſtantia a vertice V, ſed etiam Azimuth a immutabitur. Primo igitur quaeratur angulus ZSV, qui erit $= \frac{Zu}{\text{ſin.}\, \zeta} = \frac{\omega\, \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, \zeta}$. Tum ex puncto Σ ducatur arculus $\Sigma\sigma$ ad VS normalis, eritque

$$\Sigma\sigma = \xi\, \text{ſin.}\, \frac{\omega\, \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, \zeta} = \xi \frac{\omega\, \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, \zeta}.$$

Hinc ergo cum ſit $V\Sigma = V\sigma$ et $S\sigma = \xi$, primo diſtantia a vertice $VS = f$ diminuetur ipſa Parallaxi $S\sigma = \xi$, ita vt iam ſit $V\Sigma = f - \xi$. Praeterea vero Azimuth a diminuetur angulo $\Sigma V\sigma$, qui eſt

$$\frac{\Sigma\sigma}{\text{ſin.}\, V\Sigma} = \frac{\xi\omega\, \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, \zeta\, \text{ſin.}\, (f - \xi)} = \frac{\xi\omega\, \text{ſin.}\, a}{\text{ſin.}\, f} \text{ proxime.}$$

Cognita autem puncti Σ diſtantia a vertice ΣV vna cum Azimutho $ZV\Sigma$, inde more ſolito determinabitur tam Declinatio quam Aſcenſio recta.

Pro-

Problema VI.

Si ad datum tempus ex Tabulis lunaribus computata fuerit Lunae tam longitudo quam latitudo, indeque porro Ascensio recta et declinatio, inuenire, vbi hoc tempore Obseruatori, in dato Terrae loco constituto, centrum Lunae sit apparitururum.

Solutio.

Tab. IX. Fig. 9. §. 46. Sit loci propositi latitudo vt hactenus Φ et vertex in V, ita vt sit $PV = 90° - \Phi$, tum pro loco obseruatoris cognito, ex ascensione recta, vnde deducitur angulus horarius $VP\Sigma$ et distantia loci cogniti Σ a Polo computetur tam distantia a vertice $V\Sigma$, quae sit $= g$ quam eius Azimuthum, seu angulus $AV\Sigma$, qui sit $= b$.

§. 47. Iam ex latitudine Φ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, atque Parallaxis horizontalis pro isto loco $= \pi$, siquidem ex tabulis lunaribus Parallaxis aequatorea constet, quo facto ex zenith Z per locum Lunae datum producatur arcus $Z\Sigma S$, ponaturque $Z\Sigma = \eta$, vti in Problemate praeliminari altero, ad quem angulum inueniendum ex Z in $V\Sigma$ demittatur perpendiculum Zv, eritque $Vv = \omega$ cos. b et $Zv = \omega$ sin. b, et quia arcus ΣZ ipsi Σv aequalis reputari potest, erit $\eta = g - \omega$ cos. b. Quamobrem locus apparens S reperietur in arcu $Z\Sigma$, producto ad interuallum $S\Sigma = \pi$ sin. $\eta + \frac{1}{2}\pi\pi$ sin. 2η, quae expressio ergo dat Parallaxin $\Sigma S = \xi$.

§. 48.

§. 48. Inuento ergo puncto S primo eius diſtantia a vertice V S, tum vero Azimuth, ſiue angulus ZVS quaeri debet. Demiſſo autem ex puncto Σ in arcum VS perpendiculo $\Sigma\sigma$, erit vtique $S\sigma = S\Sigma$ et $V\sigma = V\Sigma = g$, vnde patet fore $VS = g + \xi$. Porro vero cum ſit angulus $ZSV = \frac{\omega\, \text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g}$, erit perpendiculum $\Sigma\sigma = \frac{\xi\, \omega\, \text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g}$, quod diuiſum per ſin. g dabit angulum ΣVS, qui erit $\xi \frac{\omega\, \text{ſin.}\, b}{\text{ſin.}\, g^2}$, huncque angulum addi oportet ad angulum b, vt obtineatur verum Azimuth loci S.

§. 49. Per ſe autem manifeſtum eſt, ſolutiones tam huius quam praecedentis Problematis tuto adhiberi non poſſe, niſi loca S et Σ ad ſatis notabilem diſtantiam a binis punctis V et Z cadant. Si enim vertici ſatis fuerint propinqua, tunc totum calculum ſecundum praecepta Trigonometriae ſphaericae inſtitui conueniet. Quin etiam totum ſpatium inter puncta V, Z, S, Σ ſatis tuto pro plano haberi poterit, ita vt tum vniuerſus calculus ad Trigonometriam planam reducatur.

§. 50. Hoc autem Problema poſtremum ſummum vſum praeſtare poterit in Eccliphibus ſolaribus computandis. Poſtquam enim ex loco geocentrico Σ inuentus fuerit locus centri Lunae apparens S, is cum loco centri Solis in coelo facile comparabitur, quod ſi pro pluribus temporis momentis durante Ecclipſi repetatur, omnia Phoenomena facile, atque adeo exactiſſime, determinari poterunt, cum hoc calculo etiam verae Terrae figurae ratio habeatur, quae vulgo plerumque negligi ſolet.

Supplementum.

De Diametro Lunae apparente,

pro quouis loco, ad quoduis tempus determinando.

Tab. IX. Fig. 10. §. 51. Sit $lml n$ globus Lunae, eiusque centrum in c, vnde ad centrum Terrae C ducatur recta C c, quae vocetur s, et ex C ad Lunam ducantur tangentes C l, C l. Hinc ergo si spectator in ipso centro Terrae esset constitutus, Luna ipsi appareret sub angulo l C l, quem vocemus Diametrum Lunae *centralem* et litera Δ denotemus, cuius ergo semissis sinus erit $\frac{cl}{Cc}$, ideoque sin. $\frac{1}{2}\Delta = \frac{cl}{s}$. Quia autem angulus l C l semigradum nunquam notabiliter superare potest, erit proxime

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{cl}{s}, \text{ ideoque } \Delta = \tfrac{2cl}{s} = \tfrac{ll}{s}.$$

Vbi notetur, numeratorem ll semper esse quantitatem constantem, dum denominator C $c = s$ haud mediocriter variari potest.

§. 52. Supra autem vidimus, posita Parallaxi aequatorea $= ae$, esse $ae = \frac{1+\delta}{s}$, vbi $1+\delta$ denotat semidiametrum Aequatoris Terrae, ex quo manifestum est Diametrum Lunae centralem Δ ad Parallaxin aequatoream ae esse vt ll ad $1+\delta$, ideoque in ratione constante. Hanc ob rem statuamus $\Delta = \alpha\, ae$, atque ex Theoria Lunae istum coefficientem α definire liceret.

§. 53. Verum quia Diameter centralis non datur, videamus, quomodo se habeat ad Diametrum horizontalem

lem. Sit igitur L locus quicunque in ſuperficie Terrae, atque vidimus, eius diſtantiam a centro C ſemper intra limites 1 et $1+\delta$ contineri, exiſtente $\delta = \frac{1}{200}$. Sit porro angulus C L c rectus, ita vt Luna ſpectatori in L in ipſo Horizonte appareat. Quanquam enim linea horizontalis L c aliquantum a poſitione normali differre poteſt, tamen inde longitudo rectae s nihil mutatur; vnde ſequitur, Diametrum Lunae horizontalem ex L viſam eſſe ad diametrum centralem ex C viſam in ratione reciproca diſtantiarum, hoc eſt vt C c ad L c, quae ratio ab aequalitate tam parum differt, vt differentia tuto negligi queat. Cum enim diſtantia C $c = s$ reſpectu C L ſit circiter 60, erit $Lc = \sqrt{60^2 - 1} = 60 - \frac{1}{120}$; hinc ergo erit $Lc : Cc = 1 : 1 - \frac{1}{7200}$, ſicque diameter horizontalis ſuperabit diametrum centralem Δ ſui parte 7200^{ma}. Quare cum diameter Lunae horizontalis ſit quaſi $30' = 1800''$, iſtud augmentum tantum valebit partem quartam minuti ſecundi, quod ergo tuto omitti poterit, ita vt littera Δ nobis ſemper etiam diametrum Lunae horizontalem denotare poſſit.

§. 54. Hinc ergo intelligimus, diametrum Lunae apparentem in Horizonte prorſus non a figura Terrae pendere atque perpetuo perinde ſe habere, ac ſi Terra eſſet ſphaerica; vnde cum poſuerimus $\Delta = \alpha \cdot ae$, ex Ephemeridibus, vbi tam Parallaxis aequatorea quam diameter Lunae horizontalis refertur, iſte coefficiens α colligi poterit, ſcilicet valor fractionis $\frac{\Delta}{ae}$. Collatis autem ex nouiſſimis Ephemeridibus inter ſe pluribus caſibus, valor noſter, ſumto medio, tuto aſſumere licet $\alpha = 0,545$ ita vt proxime ſit $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{28} - \frac{1}{300}$.

§. 55. Cognito ergo valore litterae α, erit $\Delta = 0,545 . ae$. Hinc facile erit pro quauis Parallaxi aequatorea ae diametrum Lunae horizontalem assignare, et cum ae variari possit a $54'$ vsque ad $62'$, tabulam subiungamus, quae ad singula semiminuta prima diametrum horizontalem ostendat.

Parall. ae	Diam. Δ	Parall. ae	Diam. Δ
54′ 0″	29′ 48″	58′ 0″	31′ 37″
54 30	29 54	58 30	31 53
55 0	30 0	59 0	32 9
55 30	30 15	59 30	32 25
56 0	30 31	60 0	32 42
56 30	30 47	60 30	32 58
57 0	31 4	61 0	33 15
57 30	31 20	61 30	33 31
58 0	31 37	62 0	33 47

Tab. IX. §. 56. Cognito autem Diametro Lunae horizon-
Fig. 1. tali Δ, cui proxime aequalis est vti vidimus, diameter centralis, siquidem tantum deficit parte quarta minuti secundi, ex figura, vbi C est centrum Terrae, L locus obseruatoris, Z eius zenith et S locus Lunae, euidens est, eius diametrum apparentam, qui sit $= D$, se habere ad diametrum centralem Δ in ratione reciproca distantiarum, hoc est vt CS ad LS, ita vt sit $D = \Delta . \frac{CS}{LS}$, vnde sequitur fore $D = \Delta . \frac{\sin. ZLS}{\sin. ZL\Sigma}$. Hinc ad Trigonometricam sphaeri-
Fig. 3. cam reducendo erit $D = \Delta . \frac{\sin. ZS}{\sin. Z\Sigma}$.

§. 57.

§. 57. Vocauimus autem arcum $ZS = \zeta$ et arcum $Z\Sigma = \eta$, atque pro data loci latitudine $= \Phi$ et Parallaxi $= \pi$ inuenimus interuallum $S\Sigma = \pi \sin. \zeta$. Hinc ergo erit

$$D = \frac{\Delta \sin. \zeta}{\sin. (ZS - S\Sigma)} = \frac{\Delta \sin. \zeta}{\sin. (\zeta - \pi \sin. \zeta)}.$$

At vero est proxime

$$\sin. (\zeta - \pi \sin. \zeta) = \sin. \zeta \cos. (\pi \sin. \zeta) - \pi \cos. \zeta \sin. \zeta,$$

ideoque

$$\frac{\sin. (\zeta - \pi \sin. \zeta)}{\sin. \zeta} = \cos. (\pi \sin. \zeta) - \pi \cos. \zeta,$$

et quia $\cos. \pi \sin. \zeta = 1 - \frac{1}{2} \pi \pi \sin. \zeta^2$, vbi quidem postremum membrum satis tuto negligere liceret, habebimus

$$D = \frac{\Delta}{1 - \pi \cos. \zeta - \frac{1}{2} \pi \pi \sin. \zeta^2}.$$

Translato igitur denominatore in numeratorem, ob

$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha\alpha$, quia hic $\alpha = \pi \cos. \zeta + \frac{1}{2} \pi \pi \sin. \zeta^2$,

reperietur

$$D = \Delta (1 + \pi \cos. \zeta + \frac{1}{2} \pi \pi \sin. \zeta^2 + \pi \pi \cos. \zeta^2), \text{ siue}$$

$$D = \Delta (1 + \pi \cos. \zeta + \frac{1}{2} \pi \pi (1 + \cos. \zeta^2)),$$

quod postremum membrum num possit omitti sine errore sensibili videamus. Sumamus igitur $\pi = \frac{1}{60}$ et $\zeta = 0$, fietque $\frac{1}{2} \pi \pi (1 + \cos. \zeta^2) = \frac{1}{3600}$, et cum Δ sit circiter $32'$, eius pars 3600^{ma} facit circiter semi-minutum secundum, vnde hoc membrum tuto reiicere licet.

§. 58. Ex Diametro igitur horizontali Δ Diameter apparens D erit $D = \Delta (1 + \pi \cos. \zeta)$. Quoniam ergo in determinatione Parallaxeos supra vbique arcum

$ZS = \zeta$ aſſignauimus, facile erit omnibus caſibus Diametrum apparentem D determinare ope ſequentis regulae:

Primo tenendum eſt, Diametrum apparentem non a vertice Obſeruatoris V, ſed ab eius zenith Z pendere; tum vero cognitam eſſe debere Parallaxin Lunae horizontalem π vna cum Diametro horizontali Δ. Hincque, ſi diſtantia loci Lunae apparentis S a zenith Z, fuerit $ZS = \zeta$, erit Diameter apparens hoc loco $D = \Delta(1 + \pi \cdot \cos. \zeta)$; vnde patet in ipſo zenith, vbi $\zeta = 0$, diametrum apparentem fore $D = \Delta(1 + \pi)$, ſicque non in vertice ſed in zenith Diameter Lunae erit maximus.

DE