

CAUTIONES NECESSARIAE

IN

DETERMINATIONE MOTVS PLANETARVM
OBSERVANDAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

Cum in Tomo XX nouor. Comm. ostendissem, accuratam cognitionem perturbationum, quas duo planetae ob actionem mutuam sibi inferunt, sperari non posse, nisi eorum motus ad planum aliquod fixum in coelo referantur, cuius respectu positio orbitarum et inclinatio ad quoduis tempus inuestigari debeat: statim ab initio motus planetarum ad tale planum fixum in coelo sum relaturus, pro quo assumam planum illud, quod orbita terrae initio huius saeculi, seu anno 1700 in coelo obtinuit, quod ergo plano tabulae repraesentetur, in quo punctum S sit centrum solis et recta SA ad punctum aequinoctiale vernalis istius epochae directa, quam ergo tanquam fixam spectare poterimus. Tum vero

vero in eodem plano ducamus rectam SB, illi normalem, quae ad punctum solstitiale aestiuum huius epochae dirigatur, ita ut ordo signorum coelestium ab A versus B progredi sit censendus. Tertio vero statuatur etiam perpendiculariter ad planum recta SC septentrionem versus spectans, ita ut hae tres rectae SA, SB et SC exhibeant ternas directrices fixas, iuxta quas motum planetarum secundum principia mechanicae sum inuestigaturus.

§. 2. Quoniam autem praecepta, quae sum traditurus, ad omnes planetas aequae pertinere debent: tamen ea hic potissimum ad ambos planetas Iouem et Saturnum accommodabo; quoniam eorum motus etiam nunc in Astronomia maxime desideratur, quandoquidem inde facillime applicatio ad binos quosuis alios planetas fieri poterit. Constituta igitur certa epocha temporis fixa, a qua motum utriusque planetae sumus profecuturi, elapso inde tempore = t , reperiatur centrum Iouis in puncto Z, Saturni vero in z , vnde primo ad planum tabulae demittantur perpendicularia ZY et zy ; tum vero ex punctis Y et y ad rectam fixam SA agantur normales YX et yx , ut locus utriusque planetae per ternas coordinatas orthogonales determinetur, quas sequenti modo denominemus:

$$SX = X, XY = Y, YZ = Z$$

$$Sx = x, xy = y, yz = z$$

Praeterea vero breuitatis gratia ponamus distantiam a Sole

$$SZ = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = V \text{ et } Sz = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v$$

denique vero distantiam inter binos planetas

$$Zz = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} = w.$$

§. 3. Cum iam massae, tam Solis quam ambo-
rum planetarum, praecipue in computum duci debeant: sit
massa Solis = \odot , massa Iouis = \mathcal{J} et massa Saturni = \mathcal{S} .
His positis vires, quibus tam Sol quam planetae se mu-
tuo attrahunt, sequenti modo exhibeantur:

Pro Ioue, vis ad Solem directa secundum $ZS = \frac{\odot}{v^2}$,

ad Saturnum vero secundum $Zz = \frac{\mathcal{S}}{w^2}$.

Pro Saturno, vis ad Solem directa secundum $zS = \frac{\odot}{v^2}$,

ad Iouem vero secundum $zZ = \frac{\mathcal{J}}{w^2}$.

Pro ipso Sole, vis ad Iouem directa secundum $SZ = \frac{\mathcal{J}}{v^2}$,

ad Saturnum vero secundum $Sz = \frac{\mathcal{S}}{w^2}$.

Hic enim nondum curamus mensuras absolutas harum
virium, quas deinceps demum accurate assignabimus.

§. 4. Quoniam autem institutum nostrum postu-
lat ut centrum Solis tanquam fixum in suo loco specte-
mus, vires, quibus ipse sol ad ambos planetas sollicitatur,
secundum directionem contrariam in vtrumque planetam
transferri oportet; vnde primo quidem Iupiter sollicitabi-
tur ab his quatuor viribus:

I. vi secundum $ZS = \frac{\odot}{v^2}$.

II. vi secundum $Zz = \frac{\mathcal{S}}{w^2}$.

III. vi secundum $zS = \frac{\odot}{v^2}$.

IV. vi secundum $zZ = \frac{\mathcal{J}}{w^2}$.

Saturnus autem his quatuor viribus sollicitabitur:

- I. vi secundum $z S = \frac{\odot}{v v}$.
- II. vi secundum $z Z = \frac{\oplus}{w w}$.
- III. vi secundum $z S = \frac{\text{h}}{v v}$.
- IV. vi secundum $Z S = \frac{\oplus}{v^2}$.

Has iam vires secundum ternas nostras directiones fixas SA, SB, SC resolui oportet, vnde pro Ioue habebimus sequentes ternas vires:

- I. vis secundum $X S = \frac{\odot X}{v^3} - \frac{\text{h}(x-X)}{w^3} + \frac{\oplus X}{v^3} + \frac{\text{h} x}{v^3}$.
- II. vis secundum $Y X = \frac{\odot Y}{v^3} - \frac{\text{h}(y-Y)}{w^3} + \frac{\oplus Y}{v^3} + \frac{\text{h} y}{v^3}$.
- III. vis secundum $Z Y = \frac{\odot Z}{v^3} - \frac{\text{h}(z-Z)}{w^3} + \frac{\oplus Z}{v^3} + \frac{\text{h} z}{v^3}$.

ternae autem vires, quibus Saturnus secundum easdem directiones vrgebitur, erunt

- I. vis secundum $x S = \frac{\odot x}{v^3} + \frac{\oplus(x-X)}{w^3} + \frac{\text{h} x}{v^3} + \frac{\oplus X}{v^3}$.
- II. vis secundum $y x = \frac{\odot y}{v^3} + \frac{\oplus(y-Y)}{w^3} + \frac{\text{h} y}{v^3} + \frac{\oplus Y}{v^3}$.
- III. vis secundum $z y = \frac{\odot z}{v^3} + \frac{\oplus(z-Z)}{w^3} + \frac{\text{h} z}{v^3} + \frac{\oplus Z}{v^3}$.

His scilicet ternis viribus motus vtriusque planetae, secundum easdem directiones SA, SB, SC resolutus, retardabitur.

§. 5. Quod si autem motus Iouis secundum has directiones resoluatur, primo eius ternae celeritates erunt:
 1) Secundum SA = $\frac{dX}{dt}$. 2) sec. SB = $\frac{dY}{dt}$. 3) sec. SC = $\frac{dZ}{dt}$,
 hincque accelerationes secundum easdem directiones, sumto elemento temporis dt constante:

- 1) sec. SA = $\frac{d^2 X}{dt^2}$. 2) sec. SB = $\frac{d^2 Y}{dt^2}$. 3) sec. SC = $\frac{d^2 Z}{dt^2}$.

Similia

Simili modo pro Saturno ternae eius celeritates erunt:

1) fec. S A = $\frac{dx}{dt}$. 2) fec. S B = $\frac{dy}{dt}$. 3) fec. S C = $\frac{dz}{dt}$,
et accelerationes:

1) fec. S A = $\frac{ddx}{dt^2}$. 2) fec. S B = $\frac{ddy}{dt^2}$. 3) fec. S C = $\frac{ddz}{dt^2}$.

His igitur accelerationibus vires ante inuentae secundum easdem directiones, mutatis signis, proportionales sunt statuendae.

§. 6. Quia circa mensuras absolutas nihil adhuc est constitutum, hanc proportionalitatem tantisper littera Γ designemus, hoc modo pro motu Iouis habebimus tres sequentes aequationes:

I.) $\Gamma \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(\odot + 2)x}{v^3} + \frac{h(x-x)}{uv^2} - \frac{hx}{v^3}$
 II.) $\Gamma \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(\odot + 2)y}{v^3} + \frac{h(y-y)}{uv^2} - \frac{hy}{v^3}$
 III.) $\Gamma \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{(\odot + 2)z}{v^3} + \frac{h(z-z)}{uv^2} - \frac{hz}{v^3}$

Parique modo Saturni motus his tribus aequationibus definietur:

I.) $\Gamma \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(\odot + h)x}{v^3} - \frac{2(x-x)}{uv^2} - \frac{2x}{v^3}$
 II.) $\Gamma \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(\odot + h)y}{v^3} - \frac{2(y-y)}{uv^2} - \frac{2y}{v^3}$
 III.) $\Gamma \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{(\odot + h)z}{v^3} - \frac{2(z-z)}{uv^2} - \frac{2z}{v^3}$

In his igitur sex aequationibus differentio-differentialibus omnia plane continentur, quibus non solum motus vtriusque planetae, sed etiam positio orbitalium earumque mutatio determinatur.

Reductio omnium quantitatum in has aequationes
ingredientium ad mensuras absolutas.

§. 7. Quo autem ex his aequationibus quantita-
tem in se indefinitam Γ , quippe quae pendet a mensuris,
quibus reliquas quantitates metiri lubet, ex calculo elidamus,
omnes quantitates, quae in nostras aequationes sunt intro-
ductae, ad mensuras certas ac determinatas reuocari oportet.
Ac primo quidem pro quantitibus, quibus distantiae
designantur, mensuram accipiamus distantiam mediam ter-
rae a sole, quam propterea unitate denotabimus; deinde
vero pro tempore t definiendo utamur mensura unius
diei, quippe quae ad praesens institutum magis erit ad-
commodata, quam si, more in problematibus mechanicis
recepto, id in minutis secundis exprimere vellemus. Ut
igitur nostras formulas ad istas mensuras reducamus, con-
sideremus motum terrae medium circa solem, quae ergo
descriptura esset interuallo unius anni circa solem cir-
culum, cuius radius $= r$, in quo quotidie percurtura
esset certum ac determinatum angulum, cuius quantitatem
ex tabulis solaribus depromere oportet, quem idcirco hic
accuratissime definiri conuenit. Praebent autem istae ta-
bulae pro tempore 30 dierum motum terrae medium
 $29^{\circ} . 34' . 4'' . 54'''$, quem angulum seu arcum in partes
radii, qui est $= r$, conuerti oportet. Hunc in finem primo
reducatur hic arcus ad minuta secunda, quorum numerus est
106445; quare cum semiperipheria circuli sit $= 3,14159265$,
eaque contineat 180.60.60 minuta secunda $= 648000''$,
fiat $648000 : 3,14159265 = 106445$ ad $0,5148731$, cu-
ius fractionis decimalis pars trigesima dabit arcum, quem
terra motu medio in suo circulo percurret, qui ergo erit
 $0,01716243$.

§. 8.

§. 8. Nunc igitur hunc motum terrae medium per similes formulas analyticas ex principiis mechanicis deductas exprimamus, quas facile ex formulis pro Ioue inventis deducemus, omiffa perturbatione a Saturno orta; quoniam in hoc terrae motu nullam perturbationem agnoscimus. Hinc loco Iouis terram substituentes habebimus $V = 1$, et quia terra in ipso plano fixo moveri censetur, erit $Z = 0$, ita vt motus terrae his duabus formulis contineatur:

$$\frac{r d d X}{d t^2} = - \odot X \text{ et } \frac{r d d Y}{d t^2} = - \odot Y.$$

Ponamus nunc terram tempore t dierum motu vniformi percurrere angulum $\Phi = 0,01716243 t$, ficque erit

$$X = \text{cos. } \Phi \text{ et } Y = \text{sin. } \Phi,$$

vnde colligitur:

$$d X = - d \Phi \text{ sin. } \Phi \text{ et } d Y = d \Phi \text{ cos. } \Phi,$$

hincque porro, ob $d \Phi$ constans, erit

$$d d X = - d \Phi^2 \text{ cos. } \Phi \text{ et } d d Y = - d \Phi^2 \text{ sin. } \Phi;$$

quibus valoribus substitutis habebimus:

$$\Gamma \frac{d \Phi^2 \text{ cos. } \Phi}{d t^2} = \odot \text{ cos. } \Phi, \text{ siue } \Gamma = \frac{\odot d t^2}{d \Phi^2}, \text{ vbi erit}$$

$$\frac{d t}{d \Phi} = \frac{r}{0,01716243}.$$

Ponamus igitur breuitatis gratia $0,01716243 = \delta$, vt fiat

$$\frac{d t}{d \Phi} = \frac{1}{\delta} \text{ et } \Gamma = \frac{\odot}{\delta \delta},$$

quo valore inuento, si omnes quantitates per mensuras modo stabilitas exprimamus, aequationes pro motu Iouis et Saturni inuentae, si per $\Gamma = \frac{\odot}{\delta \delta}$ diuidantur, sequentes induent formas:

P p 3

Pro

Pro Ioue

$$\begin{aligned} \frac{d d x}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + 2) x}{\odot v^3} + \frac{\delta \delta h (x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta h x}{\odot v^3}, \\ \frac{d d y}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + 2) y}{\odot v^3} + \frac{\delta \delta h (y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta h y}{\odot v^3}, \\ \frac{d d z}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + 2) z}{\odot v^3} + \frac{\delta \delta h (z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta h z}{\odot v^3}. \end{aligned}$$

Pro Saturno

$$\begin{aligned} \frac{d d x}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + h) x}{\odot v^3} - \frac{\delta \delta 2 (x - X)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta 2 x}{\odot v^3}, \\ \frac{d d y}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + h) y}{\odot v^3} - \frac{\delta \delta 2 (y - Y)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta 2 y}{\odot v^3}, \\ \frac{d d z}{d t^2} &= -\frac{\delta \delta (\odot + h) z}{\odot v^3} - \frac{\delta \delta 2 (z - Z)}{\odot w^3} - \frac{\delta \delta 2 z}{\odot v^3}. \end{aligned}$$

§. 9. Ponamus nunc $\delta \delta = \Delta$; ita vt fit

$$\Delta = 0,0002945493 \text{ et } l \Delta = 6,4691580;$$

praeterea vero statuamus $\frac{2}{\odot} = M$ et $\frac{h}{\odot} = m$, quibus valoribus introductis aequationes nostrae ita se habebunt:

Pro Ioue

$$\begin{aligned} \frac{d d x}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + M) x}{v^3} + \frac{m (x - X)}{w^3} - \frac{m x}{v^3}, \\ \frac{d d y}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + M) y}{v^3} + \frac{m (y - Y)}{w^3} - \frac{m y}{v^3}, \\ \frac{d d z}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + M) z}{v^3} + \frac{m (z - Z)}{w^3} - \frac{m z}{v^3}. \end{aligned}$$

Pro Saturno

$$\begin{aligned} \frac{d d x}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + m) x}{v^3} - \frac{M (x - X)}{w^3} - \frac{M x}{v^3}, \\ \frac{d d y}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + m) y}{v^3} - \frac{M (y - Y)}{w^3} - \frac{M y}{v^3}, \\ \frac{d d z}{\Delta d t^2} &= -\frac{(1 + m) z}{v^3} - \frac{M (z - Z)}{w^3} - \frac{M z}{v^3}. \end{aligned}$$

Vbi secundum mentem *Newtoni* valores litterarum *M* et *m* ita sunt assignati, vt fit $M = \frac{1}{1067}$ et $m = \frac{1}{3621}$; vnde patet

ret, partes posteriores harum aequationum, quae perturbationes continent, prae prioribus esse vehementer exiguas.

§. 10. His igitur aequationibus constitutis, quae iam omnibus numeris sunt determinatae, totum negotium huc redit, ut ad quodvis tempus, ab epocha fixa elapsum, quod sit aequale t diebus, quantitates lineares X, Y, Z et x, y, z definiantur: iis enim inventis ad tempus propositum locus utriusque planetae respectu ternorum axium fixorum SA, SB, SC , accurate assignari poterit. Inde etiam innotescunt formulae

$$\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt} \text{ et } \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

quibus celeritates utriusque planetae secundum easdem directiones ita definiuntur, ut iis spatia indicentur, quae his celeritatibus intervallo unius diei percurri possent.

De quantitatibus constantibus, per quas integrationes instituendae determinari debent.

§. 11. Quoniam amborum planetarum motus per sex aequationes differentiales secundi gradus exprimuntur, si singulas bis integrare liceret, in aequationes integrales completas ingrederentur duodecim constantes arbitrariae, quas ergo ex statu initiali, seu motu, qui utrique initio fuerit impressus, determinari oportebit, unde etiam duodecim determinationes orientur. Quia enim primo locus, quem uterque planeta initio in coelo occupavit, pro cognito est habendus, ternae coordinatae datos obtinebunt valores. Deinde quia motus utriusque planetae impressus etiam ut cognitus spectatur, ternae celeritates, quae inde
secun-

secundum directiones fixas SA, SB, SC nascuntur, erunt cognitae, ita vt harum determinationum numerus quoque ad duodecim affurgat.

§. 12. Ponamus ergo initium ibi capi, vbi erat $t = 0$, ac valores nostrarum quantitatum, quae in aequationes ingrediuntur initio, vbi $t = 0$, sequenti modo determinatos fuisse, vt tum fuisset

$$X = A, Y = B, Z = C; x = a, y = b, z = c;$$

$$\frac{dx}{dt} = A', \frac{dy}{dt} = B', \frac{dz}{dt} = C'; \frac{da}{dt} = a', \frac{db}{dt} = b', \frac{dc}{dt} = c'.$$

His igitur duodecim constantibus definitis duplex integratio omnium nostrarum aequationum ad aequationes integrales determinatas perducet, quibus natura vtriusque motus pro omnibus temporibus exprimetur.

De motu regulari, quo vterque Planeta remota actione effeet progressurus.

§. 13. Quoniam perturbationes, quas ambo planetae sibi mutuo inducunt, clarius et distinctius repraesentare non licet, quam si eae cum motu regulari, quo vterque planeta, si nullam pateretur perturbationem, effeet progressurus, comparentur et aberratio veri motus ad quodvis tempus assignetur: hanc ob rem ante omnia actionem mutuam planetarum seponamus, et motum inuestigemus, quo tum vterque planeta ob motum initio impressum effeet progressurus. Quanquam enim hoc problema iam saepissime variis modis est solutum: tamen, quia hic motum tribus coordinatis definiri assumimus, dum vulgo calculus tantum ad duas restringitur, operae vtique pretium erit, hanc analysin ad ternas coordinatas extendere, ac per statum

tum initialem determinare, vbi quidem sufficet alterius tantum motum inuestigasse, quem in finem hic motum Saturni eligamus, quoniam eius elementa litteris minusculis indicauimus.

§. 14. Reiectis igitur in aequationibus inuentis iis membris, quae ex perturbatione mutua nascuntur, si loco $\Delta (1 + m)$ scribamus breuitatis gratia n : motus Saturni regularis his tribus aequationibus exprimetur:

$$\text{I. } \frac{d d x}{d t^2} = -\frac{n x}{a^3} \quad \text{II. } \frac{d d y}{d t^2} = -\frac{n y}{a^3} \quad \text{III. } \frac{d d z}{d t^2} = -\frac{n z}{a^3}$$

vnde statim sequentes formemus combinationes:

$$\text{I. } \frac{y d d x - x d d y}{d t^2} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{z d d y - y d d z}{d t^2} = 0.$$

$$\text{III. } \frac{x d d z - z d d x}{d t^2} = 0.$$

quae singulae sunt integrabiles, earumque integralia per statum initialem determinata sequenti modo reperientur expressa:

$$\text{I. } \frac{y d x - x d y}{d t} = b a' - a b'.$$

$$\text{II. } \frac{z d y - y d z}{d t} = c b' - b c'.$$

$$\text{III. } \frac{x d z - z d x}{d t} = a c' - c a'.$$

Sicque iam adepti sumus tres aequationes primi gradus differentiales, ex quibus insignia symptomata motus derivare licebit, quanquam totam solutionem non exhauriunt; quia littera n , conditionem praecipuam motus inuoluens, in eas non ingreditur, id quod inde etiam patet, quod formulae differentio-differentiales, vnde sunt natae, ita sunt comparatae, vt binae tertiam iam inuoluant ideoque tantum pro duabus sint habendae.

§. 15. Has tres aequationes modo inuentas ita combinemus, vt primam per z , secundam per x ac tertiam per y multiplicemus, tum enim earum summa praebit hanc aequationem;

$$0 = (b a' - a b') z + (c b' - b c') x + (a c' - c a') y,$$

in qua coordinatae x, y, z , tantum vnicam dimensionem occupant; vnde concludimus omnia puncta z in eodem plano fore sita, cuius ergo inclinationem ad planum nostrum fixum $A S B$, simulque interfectionem assignari conueniet.

T. XVIII.

Fig. 2.

§. 16. Sit igitur punctum z in isto plano quod quaerimus, existentibus coordinatis $S x = x, x y = y, y z = z$, ita vt fit vti inuenimus:

$$(b a' - a b') z + (c b' - b c') x + (a c' - c a') y = 0;$$

fitque recta $S \Omega$ interfectio huius plani cum plano tabulae $A S B$, fecans ordinatam $x y$ in puncto o , et quia in hac recta $S \Omega$ ordinatae z debent euanescere, pro positione huius rectae hanc habebimus aequationem:

$$(c b' - b c') x + (a c' - a c') y = 0,$$

vbi iam y denotat applicatam $x o$, manente $S x = x$; vnde cum fit $y = \frac{(b c' - c b') x}{a c' - c a'}$, ex hac aequatione, cum posito $x = 0$ fiat etiam $y = 0$, intelligimus, rectam $S \Omega$ per ipsum punctum S , seu centrum solis transire, ita vt, quod quidem est notissimum, orbita planetae per solem transeat. Ponamus iam angulum $A S \Omega = \zeta$, qui ergo longitudinem huius lineae nodorum, a puncto aequinoctiali verno A , secundum ordinem signorum $A B$ sumtam, indicabit.

§. 17.

§. 17. Cum igitur fractio $\frac{z}{y}$ tangentem huius anguli ζ exprimat, erit $\text{tang. } \zeta = \frac{z}{y} = \frac{b c' - c b'}{a c' - a' b'}$. Pro inclinatione autem inuenienda sumamus $x = 0$, et nostra aequatio euadet $(b a' - a b') z + (a c' - c a') y = 0$, unde fit

$$z = \frac{(c a' - a c') y}{b a' - a b'}$$

Sit igitur $S p = y$ et $p q = z$; tum vero ex p ad lineam nodorum $S \Omega$ ducatur normalis $p r$, iungaturque recta $q r$, ac manifestum est angulum $p r q$ metiri inclinationem orbitae planetae ad planum nostrum fixum $A S B$, cuius ergo tangens erit $\frac{p q}{p r}$. Cum autem sit angulus

$$p S \Omega = 90 - \zeta, \text{ erit } p r = y \cos. \zeta,$$

ideoque tangens inclinationis $= \frac{z}{y \cos. \zeta}$. Quod si ergo hanc inclinationem $p r q$ statuamus $= \eta$, loco z scribendo suum valorem habebimus

$$\text{tang. } \eta = \frac{(c a' - a c')}{(b a' - a b') \cos. \zeta}$$

§. 18. Ex statu igitur initiali planetae, qui litteris a, b, c , et a', b', c' , continetur, statim innotescit intersectio orbitae planetae cum plano nostro fixo $A S B$, siue angulus $A S \Omega = \zeta$, simulque inclinatio orbitae ad hoc planum, seu angulus $p r q = \eta$, quandoquidem inuenimus has formulas:

$$\text{tang. } \zeta = \frac{b c' - c b'}{a c' - a' b'} \text{ et } \text{tang. } \eta = \frac{c a' - a c'}{(b a' - a b') \cos. \zeta}$$

Quoniam supponimus planetam ab A versus B promoveri, postquam per lineam nodorum $S \Omega$ transit, in regionem borealem ascendit, et recta $S \Omega$ ad nodum ascendentem dirigitur, siquidem formula pro $\text{tang. } \zeta$ inuenta fuerit positua, simulque altera formula $\text{tang. } \eta$ etiam positua,

Q q 2

quippe

quippe ad quem casum nostra figura est accommodata, unde iudicium haud difficulter instituetur, si secus euenerit.

§. 19. Cum sit $\text{tang. } \zeta = \frac{b'c' - c'b'}{a'c' - c'a'}$ erit

$$\text{cos. } \zeta = \frac{a'c' - c'a'}{\sqrt{(b'c' - c'b')^2 + (a'c' - c'a')^2}},$$

quo valore in altera formula substituto prodibit

$$\text{tang. } \eta = \frac{\sqrt{(b'c' - c'b') + (a'c' - c'a')^2}}{a'b' - b'a'};$$

praecedens vero formula utique est commodior, quoniam, postquam angulus ζ fuerit inuentus, inde facilius angulus η concluditur.

§. 20. Ut autem indolem ipsius orbitae inuestigemus, aequationibus differentio-differentialibus primo exhibitis erit utendum. Primam igitur per $2 dx$, secundam per $2 dy$ ac tertiam per $2 dz$ multiplicando, summa dabit hanc aequationem:

$$\frac{2 dx dx + 2 dy dy + 2 dz dz}{d t^2} = - 2 n \frac{(x dx + y dy + z dz)}{v^3},$$

Hinc igitur, quia

$$v v = x x + y y + z z, \text{ ideoque } x dx + y dy + z dz = v dv,$$

ob elementum dt constans elicietur integrando

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d t^2} = + \frac{2 n}{v} + C.$$

Pro constante igitur determinanda faciamus

$$x = a, y = b, z = c; \frac{dx}{dt} = a', \frac{dy}{dt} = b', \frac{dz}{dt} = c',$$

tum vero fiat distantia $v = d$, ita ut sit

$$d = \sqrt{a a + b b + c c},$$

quo facto nostra aequatio fiet

$$a' a' + b' b' + c' c' = \frac{2 n}{d} + C, \text{ unde fit}$$

$$C = a' a' + b' b' + c' c' - \frac{2 n}{d}.$$

Sicque

Sicque aequatio nostra inuenta erit

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d t^2} = 2 n \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a} \right) + a' a' + b' b' + c' c'.$$

Quod si ergo breuitatis gratia ponamus

$$a' a' + b' b' + c' c' = \delta \delta, \text{ erit}$$

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d t^2} = 2 n \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a} \right) + \delta \delta,$$

quae aequatio alias ex principio virium vivarum deduci solet.

§. 21. Praeter tres igitur aequationes differentiales primi gradus nunc nacti sumus quartam eiusdem gradus, quae autem iunctim sumtae tantum tribus aequivalere sunt censendae, ideoque totam solutionem in se complectuntur. Sin autem ex his aequationibus primi gradus coordinatas x, y, z eliminare, earumque loco tantum distantiam a sole v cum anomalia vera planetae introducere vellemus, in calculos taediosissimos illabemur. Hinc igitur denuo in nouam aequationem integram inquiramus, ad quam sequens nos artificium perducet.

§. 22. Incipiamus ergo iterum a ternis aequationibus principalibus, ac prima ducta in x , secunda in y , ac tertia in z et in summam collecta producant hanc aequationem:

$$\frac{x d d x + y d d y + z d d z}{d t^2} = - \frac{n(x x + y y + z z)}{v^3} = - \frac{n}{v}.$$

Ad hanc aequationem iam addamus modo ante inuentam et cum sit $x d d x + d x^2 = d. x d x$; simulque

$$y d d y + d y^2 = d. y d y \text{ et } z d d z + d z^2 = d. z d z;$$

tum vero

$$x d x + y d y + z d z = v d v;$$

aggregatum harum aequationum euadet

$$\frac{d \cdot v \cdot d v}{d t^2} = \frac{v}{v} - \frac{2n}{d} + \delta \delta,$$

vbi tantum sumus lucrati, vt duas tantum quantitates variables hanc aequationem ingrediantur.

§. 23. Vt iam hanc aequationem integrabilem reddamus, multiplicemus eam per $2 v d v$, quandoquidem hinc prodibit $\int 2 v d v d \cdot v d v = v v d v^2$, et aequatio integrata erit

$$\frac{v v d v^2}{d t^2} = 2 n v - \frac{2 n v v}{d} + \delta \delta v v + C,$$

quae constans inde debet definiri, quod initio, vbi $t = 0$ fit $v = d$. At cum fit

$$\frac{v d v}{d t} = \frac{x d x}{d t} + \frac{y d y}{d t} + \frac{z d z}{d t}, \text{ pro initio erit}$$

$$d \times \frac{d v}{d t} = a a' + b b' + c c',$$

hincque

$$\frac{d v}{d t} = \frac{a a' + b b' + c c'}{d}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{v v d v^2}{d t^2} = (a a' + b b' + c c')^2.$$

His igitur valoribus substitutis aequatio ad statum initialem accommodata erit

$$(a a' + b b' + c c')^2 = \delta \delta d d + C,$$

vnde prodit constans

$$C = (a a' + b b' + c c')^2 - \delta \delta d d,$$

consequenter aequatio nostra integrata ita se habebit:

$$\frac{v v d v^2}{d t^2} = 2 n v - \frac{2 n v v}{d} + \delta \delta v v + (a a' + b b' + c c')^2 - \delta \delta d d,$$

vbi est

$$(a a' + b b' + c c')^2 - \delta \delta d d =$$

$2 a b a' b'$

$$2abab' + 2acac' + 2bcbb' - aab'b' - aac'c' - bbc'c' \\ - bba'a' - cca'a' - ccb'b'$$

siue

$$(aa' + bb' + cc')^2 - \delta\delta dd = -(ab' - ba')^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2.$$

§. 24. Quo nunc hanc aequationem concinnio-
rem reddamus, statuamus breuitatis gratia:

$$ba' - ab' = \gamma, \quad cb' - bc' = \alpha, \quad ac' - ca' = \beta,$$

unde formulae supra inuentae sunt simpliciores, quoniam
pro aequatione ad planum orbitae erit $\gamma z + \alpha x + \beta y = 0$,
hincque porro

$$\text{tang. } \zeta = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad \text{tang. } \eta = -\frac{\beta}{\gamma \cos \zeta}.$$

Deinde vero aequatio modo inuenta induet hanc formam:

$$\frac{v v d v^2}{d t^2} = -\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2n v - v v \left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right),$$

unde deducimus:

$$d t^2 = \frac{v v d v^2}{-\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2n v - v v \left(\frac{2n}{d} - \delta\delta\right)},$$

in qua aequatione ambae variables v et t sunt a se inuicem
separatae. Quemadmodum autem haec aequatio ad notio-
nes in Astronomia receptas reduci queat deinceps clarius
ostendemus.

§. 25. Quo nunc ipsam orbitam huius planetae T. XVIII.
facilius definiamus, eam in plano tabulae repraesentemus, Fig. 3.
vbi S. Q. sit recta ad nodum ascendentem directa, planeta
autem hoc tempore versetur in z , existente eius distantia a
sole S. $z = v$; tum vero ponamus angulum Q. S. $z = \Phi$, qui ergo
praebet argumentum latitudinis planetae. Elapso autem tem-
pusculo dt peruenerit planeta in z' et posito spatiolo $z z' = ds$,
ob

ob angulum $z S z' = d\Phi$ et $S z' = v + dv$ erit

$$d s^2 = d v^2 + v v d \Phi^2.$$

Erit autem $d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2$, et per priorem integrationem inuenimus

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d t^2} = 2 n \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a} \right) + \delta \delta,$$

hinc ergo erit

$$d s^2 = 2 n d t^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a} \right) + \delta \delta d t^2,$$

unde fit

$$v v d \Phi^2 = 2 n d t^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{a} \right) + \delta \delta d t^2 - d v^2.$$

Substituatur nunc hic loco $d t^2$ valor inuentus, ac reperietur

$$v v d \Phi^2 = \frac{(a a + \beta \beta + \gamma \gamma) d v^2}{-a a - \beta \beta - \gamma \gamma + 2 n v - v v \left(\frac{2 n}{a} - \delta \delta \right)},$$

hincque fiet

$$d \Phi = \frac{d v}{v} \sqrt{\frac{a a + \beta \beta + \gamma \gamma}{-a a - \beta \beta - \gamma \gamma + 2 n v - v v \left(\frac{2 n}{a} - \delta \delta \right)}},$$

quae aequatio cum priore, quae dat

$$d t = v d v$$

$$\sqrt{-a a - \beta \beta - \gamma \gamma + 2 n v - v v \left(\frac{2 n}{a} - \delta \delta \right)},$$

coniuncta, tam naturam orbitae quam ipsum motum planetae complectitur.

§. 26. Consideremus nunc formulam differentialem pro $d \Phi$ inuentam, ac ponamus breuitatis gratia

$$\frac{n}{a a + \beta \beta + \gamma \gamma} = F \text{ et } \frac{\frac{2 n}{a} - \delta \delta}{a a + \beta \beta + \gamma \gamma} = G,$$

vt habeamus

$$d\Phi = \frac{-dv}{v\sqrt{-r+2Fv-Gvv}}$$

cui signum — præfigimus, quoniam motum planetæ ab aphelio sumus profecturi, quo distantia v crescente angulo Φ diminuitur. Nunc quo hanc formulam planiorem reddamus, ponamus $v = \frac{r}{u}$, eritque $-\frac{dv}{v} = +\frac{du}{u}$, ideoque

$$d\Phi = \frac{du}{u\sqrt{-uu+2Fu-G}}$$

Sit nunc porro $u = F - r$ et prodibit

$$d\Phi = \frac{-dr}{r\sqrt{(FF-G-r r)}}$$

cuius integrale manifesto est arcus circuli, cuius cosinus $= \frac{r}{\sqrt{(FF-G)}}$. Hic igitur angulus vocetur $= \omega$, vt fiat

$$\frac{r}{\sqrt{(FF-G)}} = \text{cos. } \omega,$$

hincque per integrationem constantem adiiciendo, quæ sit $= \theta$, erit $\Phi = \omega + \theta$; tum vero habebitur

$$r = F - u = \text{cos. } \omega \sqrt{(FF-G)},$$

vnde fit

$$u = F - \text{cos. } \omega \sqrt{(FF-G)},$$

consequenter distantia planetæ a sole

$$v = \frac{r}{F - \text{cos. } \omega \sqrt{(FF-G)}}$$

§. 27. Restituamus nunc loco F et G valores assumptos atque habebimus

$$v = \frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n - \text{cos. } \omega \sqrt{(nn - (\frac{r}{a} - \delta\delta)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma))}}$$

Quod si iam tam numeratorem quam denominatorem per n diuidamus et breuitatis ergo faciamus

$$\frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n} = f \text{ et}$$

$$\sqrt{1 - \frac{(\frac{2}{d} - \delta\delta)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{nn}} = e$$

resultabit haec formula: $v = \frac{f}{1 - e \cos \omega}$, ex qua forma intelligimus, quantitatem f designare semiparametrum orbitae a planeta descriptae, litteram vero e eius excentricitatem; tum vero angulum ω exprimere anomaliam veram ab aphelio computatam. Ducamus igitur in figura rectam SP ad aphelium directam, ut angulus PSz exhibeat anomaliam veram ω ; et cum sit angulus $\Omega Sz = \Phi = \omega + \theta$, erit longitudo aphelii a nodo ascendente computata, siue angulus $\Omega SP = \theta$.

§. 28. Reducamus nunc etiam formulam pro dt inuentam ad anomaliam ω , et ex formulis inuentis fiet

$$\frac{dt}{d\Phi} = \frac{vv}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}$$

Cum igitur sit $d\Phi = d\omega$ et

$$vv = \frac{ff}{(1 - e \cos \omega)^2} \text{ et } \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)} = \sqrt{nf}$$

erit

$$dt = \frac{ff d\omega}{(1 - e \cos \omega)^2 \sqrt{nf}} = f \sqrt{\frac{f}{n}} \cdot \frac{d\omega}{(1 - e \cos \omega)^2}$$

ideoque integrando tempus

$$t = f \sqrt{\frac{f}{n}} \int \frac{d\omega}{(1 - e \cos \omega)^2}$$

cuius integrale per methodos consuetas facile eruitur. Constat autem, si fuerit $e < 1$ curuam fore ellipsin, si autem sit $e > 1$, hyperbolam; casu vero, quo $e = 1$, parabolam.

§. 29. Perpendamus nunc accuratius, quomodo haec duo noua elementa f et e ex elementis datis deter-

determinentur; ac primo quidem constat esse

$$f = \frac{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}{n}$$

deinde vero

$$e = \sqrt{1 - \frac{(\frac{2n}{a} - \delta\delta)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{nn}}$$

Vbi si loco $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$ scribamus nf , prodibit excentricitas ita expressa:

$$e = \sqrt{1 - \frac{f}{n}(\frac{2n}{a} - \delta\delta)} = \sqrt{1 - \frac{2f}{a} + \frac{\delta\delta f}{n}}$$

atque hinc porro colligitur distantia aphelii a sole $= \frac{f}{1-e}$,

et distantia perihelii $= \frac{f}{1+e}$, vnde fit semiaxis transuersus

$$= \frac{f}{1-e^2} = \frac{nd}{2n - a\delta\delta}, \text{ vbi est } \delta\delta = a'a' + b'b' + c'c'.$$

Sicque omnia, quae ad orbitae et motus determinationem pertinent, sunt assignata.

§. 30. Vt autem etiam positionem lineae apsidum determinemus, pro statu initiali quaeramus tam angulum ω quam angulum Φ : ex his enim erit $\theta = \Phi - \omega$; sicque innotescet angulus $\angle SP = \theta$. Initio autem erat $v = d$, vnde pro statu initiali ex formula $v = \frac{f}{e \cos \omega}$ erit $\cos \omega = \frac{d - f}{ae}$, quem angulum initialem designemus per Ω , ita vt fit $\cos \Omega = \frac{d - f}{ae}$, vnde igitur iste angulus computari poterit, quo inuento, si initio ponamus fuisse $\Phi = \Phi$, inde definietur angulus quaesitus $\theta = \Phi - \Omega$.

§. 31. Pro hoc autem angulo Φ inueniendo con- T. XVIII.
templentur iterum nostrum planum fixum A S B, in quo Fig. 4
fit recta S \angle linea nodorum, pro cuius positione vocauimus
R r 2 mus

mus angulum $AS\Omega = \zeta$, inuenimusque $\text{tang. } \zeta = -\frac{a}{b}$.
 Fuerit nunc initio planeta in puncto b , pro quo ergo
 erant coordinatae $Sf = a$, $fg = b$ et $gb = c$, ipsa vero
 distantia a sole $Sb = d$; ac manifestum est angulum ΩSb
 esse ipsum angulum Φ , quem quaerimus. Pro eo igitur
 inueniendo ex g ad $S\Omega$ agatur normalis gk , et quia bk
 etiam ad $S\Omega$ erit normalis, fiet utique $\text{cof. } \Phi = \frac{gk}{Sb}$; Quia
 vero angulus $AS\Omega = fgk = \zeta$, facile reperitur distantia
 $Sk = a \text{ cof. } \zeta + b \text{ sin. } \zeta$, ficque habebimus

$$\text{cof. } \Phi = \frac{a \text{ cof. } \zeta + b \text{ sin. } \zeta}{d}$$

vnde si computetur angulus Φ , erit quaesitus angulus
 $\vartheta = \Phi - \Omega$. Quemadmodum autem hic orbitam Saturni
 per statum initialem determinauimus, eadem formulae
 simili modo pro Ioue valebunt, si modo loco litterarum
 minuscularum maiusculae vsurpentur.

De comparatione motus planetarum veri cum motu regulari.

§. 32. Si planetae nullam actionem in se inui-
 cem excercerent, eorum motus per formulas ante inuen-
 tas ex statu initiali facile determinari possent; ac si eorum
 orbitae referantur ad planum nostrum fixum in coelo con-
 stitutum, quod cum situ, quem ecliptica initio huius sae-
 culi tenuit, conuenire assumimus, tabulae pro eorum motu
 definiendo multo forent simpliciores quam vulgo exhiberi
 solent. Primo enim tam linea nodorum quam inclinatio
 orbitae ad planum fixum nullam plane mutationem pate-
 retur. Deinde etiam positio lineae apsidum perpetuo ad
 eadem coeli puncta dirigeretur; vnde his elementis semel
 cogni-

cognitis sufficeret ad quoduis tempus longitudinem tantum mediam planetae, seu potius argumentum latitudinis medium ex tabulis mediorum motuum definire, neque opus esset, loca aphelii et nodorum computare, sed sola aequatio centri cum reductione ad planum fixum locum planetae exacte esset ostensura.

§. 33. Hoc igitur motu regulari constituto videamus quomodo planetarum motum verum, quatenus ab actione mutua perturbatur, cum regulari comparari et quantum ab eo discrepet definiendi conueniat. Quoniam autem ob actionem mutuam euenire potest: primo ut tempus periodicum quodpiam augmentum vel decrementum accipiat; secundo, ut excentricitas aliquam mutationem patiatur; tertio, ut lineae nodorum aliquis motus super plano fixo inducatur; quarto, ut etiam inclinatio laeuem quandam mutationem subeat; quinto, ut linea apsidum non in quiete permaneat, sed aliquem motum progressiuum recipiat; sexto denique, ut insuper aliae inaequalitates periodicae sese admisceant: hos effectus ex aequationibus principalibus, quas supra pro motu planetarum perturbato exhibuimus, peti oportebit.

§. 34. Quod ad duos priores effectus attinet, si scilicet tempus periodicum et excentricitas constantem quandam reciperent, forma tabularum ad motum regularem constructarum nullam plane mutationem acciperent, quandoquidem tantum opus esset tabulam mediorum motuum ad verum tempus periodicum accommodare, simulque tabulam aequationum centri ex vera excentricitate supputare. Ac si tam lineae nodorum quam apsidum ab ac-

tione mutua motus quispiam imprimeretur, qui faltem per aliquot faecula maneret constans, tum in tabulis meliorum motuum praeter loca media etiam ad quoduis tempus tam locus aphelii quam nodorum consignari deberet, vnde tabulae eandem plane formam impetrarent, qua more recepto exhiberi solent. Sin autem insuper etiam inclinatio per aliquot faecula quandam mutationem aequabilem pateretur, eam simili modo tabulis consuetis inferre liceret, dum scilicet tabula pro latitudine et reductione ad planum fixum simul ad plures inclinationes accommodaretur. Sin autem praeterea inaequalitas sexto loco commemoratae accederent, eas in peculiaribus tabulis tabulis consuetis adiici oporteret.

§. 35. Quare si ex aequationibus principalibus omnes aberrationes a motu regulari perscrutari et cum tabulis more solito exstructis comparare velimus, probe perpendere debemus, omnes effectus perturbationis, praeter vltimum, iam in ipsas tabulas esse relatas, ita vt tantum superfit inaequalitates vltimi generis inuestigare; vnde in hac inuestigatione maxime curandum est, vt inaequalitates postremi ordinis sollicite ab iis distinguamus, quae tabulis ordinariis iam sunt insertae; quia alioquin easdem perturbationes bis in computum traheremus, quod vitium forte iis correctionibus, quibus Astronomi tabulas planetarum iam emendare sunt conati, obiici potest, dum effectus perturbationis in motu apheliorum productos denuo tabulis peculiaribus adiectis implicuerunt, cum tamen in promotione apheliorum iam fuerint in tabulas illati.

§. 36. His circumstantiis probe perpensis si in omnes effectus a perturbatione oriundos inquirere velimus, eos neutiquam cum tabulis astronomicis receptis comparari conuenit, quippe quae non contemnendam partem omnium perturbationum iam inuoluunt. Sed potius necesse erit ex statu initiali cuiusque planetae peculiare tabulas conficere, quae eorum motum, si nulla plane ad effectum perturbatio, accurate indicarent; tum enim admissa actione mutua si ex theoria perturbationum ad quoduis tempus verus planetae locus assignari potuerit, isque cum loco istarum tabularum comparetur, tum demum iudicare licebit, quinam effectus perturbationi quouis casu sit tribuendus. Cum autem talis inuestigatio etiam nunc sit difficillima, praecipue pro talibus planetis, quorum orbitae non adeo a se inuicem sunt remotae, methodum hic adiungam, cuius ope, saltem per temporis spatium non nimis magnum, effectus perturbationis accurate assignari poterit.

De perturbatione motus planetarum per temporis interuallum non minus magnum oriunda.

§. 37. Inchoemus hanc inuestigationem ab ipso statu initiali, quo erat $t = 0$, et quoniam posuimus tum fuisse pro Ioue,

$$X = A; Y = B; Z = C; \frac{dx}{dt} = A'; \frac{dy}{dt} = B'; \frac{dz}{dt} = C';$$

pro Saturno

$$x = a; y = b; z = c; \frac{dx}{dt} = a'; \frac{dy}{dt} = b'; \frac{dz}{dt} = c';$$

manifestum est, si nullae plane adessent vires sollicitantes, vtriusque planetae motum futurum esse aequabilem et in directum procedentem. Tum igitur elapso tempore t dierum

dierum foret

$$X = A + A' t, \quad Y = B + B' t, \quad Z = C + C' t,$$

similique modo

$$x = a + a' t, \quad y = b + b' t, \quad z = c + c' t,$$

haecque formulae ergo etiam cum vero motu vtriusque planetae conuenient, si modo tempus t accipiatur infinite paruum; vnde intelligitur, quo minus id statuatur, eo propius has formulas ad verum motum esse accessuras.

§. 38. Hinc igitur patet, pro maiusculis temporis interuallis motum accuratius per huiusmodi formulas expressum iri:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3 + \text{etc.}$$

$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3 + \text{etc.}$$

$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3 + \text{etc.}$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3 + \text{etc.}$$

$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3 + \text{etc.}$$

$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3 + \text{etc.}$$

Quod si ergo sumamus has formulas non vltra potestatem tertiam ipsius t extendi, quoniam earum termini sequentes vehementer conuergere debent, istae formulae iam ad fatis notabile tempus applicari poterunt, dabiturque talis terminus, quem si tempus t non superet, hae formulae a motu vero vtriusque planetae vix aberrare erunt censendae, siue error saltem pro insensibili haberi poterit.

§. 39. His autem valoribus adhibitis pro sex nostris aequationibus fundamentalibus, quas supra §. 9. exhibuimus, habebimus:

$$\begin{array}{l|l} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 A'' + 6 A''' t & \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 a'' + 6 a''' t \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 B'' + 6 B''' t & \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 b'' + 6 b''' t \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = 2 C'' + 6 C''' t & \frac{d^2 z}{dt^2} = 2 c'' + 6 c''' t \end{array}$$

Quod si ergo hos valores pro membris sinistris nostrarum aequationum scribamus, in dextris autem, ubi nulla occurrunt differentialia, valores pro ipsis litteris X, Y, Z, et x, y, z, assumptos substituamus, inde nouos coëfficientes etiam nunc incognitos A, A, a, a, etc. inde definire licebit. At quoniam in membris sinistris tempus t non ultra primam dimensionem affurgit, etiam in dextris altiores potestates tuto negligere licebit, ita vt sufficiat ibi statuiffe

$$\begin{aligned} X &= A + A' t, & Y &= B + B' t, & Z &= C + C' t, \\ x &= a + a' t, & y &= b + b' t, & z &= c + c' t, \end{aligned}$$

quae formulae cum penitus sint cognitae, ex iis coëfficientes adhuc incogniti in membris sinistris occurrentes facillime poterunt definiri.

§. 40. His obseruatis euoluamus primo distantias litteris V, v et w expressas, et cum sit $V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, erit quadratis ipsius t omiffis

$$V^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(A A' + B B' + C C') t,$$

pro qua expressiōne faciamus breuitatis gratia

$A^2 + B^2 + C^2 = F^2$ et $A A' + B B' + C C' = G$, ita vt sit $V^2 = F F + 2 G t$. Simili modo pro distantia v faciamus

$$aa + bb + cc = ff \text{ et } aa' + bb' + cc' = g;$$

vt fiat $vv = ff + 2gt$. Denique pro distantia w ponamus

$$(a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F} \text{ et}$$

$$(a - A)(a' - A') + (b - B)(b' - B') + (c - C)(c' - C') = \mathfrak{G}$$

vt fiat $w = \mathfrak{F}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{G}t$.

§. 41. Nunc igitur cum harum distantiarum cubi soli in denominatoribus occurrant; iis euolutis et alioribus ipsius t potestatibus post primam omisiss, habebimus vt sequitur:

$$\frac{x}{V^3} = \frac{x}{F^3 - \frac{3CGt}{F^2}}; \frac{y}{v^3} = \frac{y}{f^3 - \frac{3gt}{f^2}}; \frac{z}{w^3} = \frac{z}{\mathfrak{F}^3 - \frac{3\mathfrak{G}t}{\mathfrak{F}^2}}$$

quas ergo formulas in nostris aequationibus singulas cum suis numeratoribus coniungi oportet.

§. 42. Hinc igitur pro terminis per V^3 diuisis, si quadrata temporis t pariter omittantur, reperiemus

$$\frac{x}{V^3} = \frac{A}{F^3} + \left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3ACG}{F^5} \right) t$$

$$\frac{y}{v^3} = \frac{B}{f^3} + \left(\frac{B'}{f^3} - \frac{3Bfg}{f^5} \right) t$$

$$\frac{z}{w^3} = \frac{C}{\mathfrak{F}^3} + \left(\frac{C'}{\mathfrak{F}^3} - \frac{3CCG}{\mathfrak{F}^5} \right) t$$

similique modo pro terminis per v^3 diuisis

$$\frac{x}{v^3} = \frac{a}{f^3} + \left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3aGg}{f^5} \right) t$$

$$\frac{y}{v^3} = \frac{b}{f^3} + \left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bGg}{f^5} \right) t$$

$$\frac{z}{v^3} = \frac{c}{f^3} + \left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cGg}{f^5} \right) t$$

At vero pro terminis per w^3 diuisis, quo ibi concinnius exprimantur, statuamus breuitatis gratia:

$a - A$

$$a - A = \mathfrak{A}; \quad b - B = \mathfrak{B}; \quad c - C = \mathfrak{C};$$

$$a' - A' = \mathfrak{A}'; \quad b' - B' = \mathfrak{B}'; \quad c' - C' = \mathfrak{C}';$$

vnde hi termini fient

$$\frac{x - X}{w^3} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}^3} + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{G}^3} - \frac{3 \mathfrak{A} \mathfrak{G}}{\mathfrak{G}^5} \right) t$$

$$\frac{y - Y}{w^3} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{G}^3} + \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{G}^3} - \frac{3 \mathfrak{B} \mathfrak{G}}{\mathfrak{G}^5} \right) t$$

$$\frac{z - Z}{w^3} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{G}^3} + \left(\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{G}^3} - \frac{3 \mathfrak{C} \mathfrak{G}}{\mathfrak{G}^5} \right) t$$

§. 43. Quia igitur nil aliud superest, nisi vt isti valores in nostris aequationibus substituantur et valores a tempore t immunes cum coefficientibus A'' , B'' , C'' ; a'' , b'' , c'' etc. illi vero qui tempus t continent cum litteris A , B , C et a , b , c comparentur, hoc facto sequentes horum coefficientium bis signatorum incognitorum reperiemus determinaciones:

$$A'' = - \frac{\Delta (1 + M) A}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{A}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta m a}{f^3},$$

$$B'' = - \frac{\Delta (1 + M) B}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{B}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta m b}{f^3},$$

$$C'' = - \frac{\Delta (1 + M) C}{F^3} + \frac{\Delta m \mathfrak{C}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta m c}{f^3},$$

porro

$$a'' = - \frac{\Delta (1 + m) a}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{A}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta M A}{F^3},$$

$$b'' = - \frac{\Delta (1 + m) b}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{B}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta M B}{F^3},$$

$$c'' = - \frac{\Delta (1 + m) c}{f^3} - \frac{\Delta M \mathfrak{C}}{\mathfrak{G}^3} - \frac{\Delta M C}{F^3},$$

§. 44. Praeterea vero pro hisdem litteris ter signatis nanciscemur sequentes valores:

$$\begin{aligned}
 A''' &= -\Delta(1+M)\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta m\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3aG}{f^5}\right), \\
 B''' &= -\Delta(1+M)\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta m\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bG}{f^5}\right), \\
 C''' &= -\Delta(1+M)\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right) + \Delta m\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta m\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cG}{f^5}\right), \\
 a''' &= -\Delta(1+m)\left(\frac{a'}{f^3} - \frac{3aG}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta M\left(\frac{A'}{F^3} - \frac{3AG}{F^5}\right), \\
 b''' &= -\Delta(1+m)\left(\frac{b'}{f^3} - \frac{3bG}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta M\left(\frac{B'}{F^3} - \frac{3BG}{F^5}\right), \\
 c''' &= -\Delta(1+m)\left(\frac{c'}{f^3} - \frac{3cG}{f^5}\right) - \Delta M\left(\frac{M'}{S^3} - \frac{3MG}{S^5}\right) - \Delta M\left(\frac{C'}{F^3} - \frac{3CG}{F^5}\right),
 \end{aligned}$$

§. 45. Inuentis igitur his coefficientibus, motum
 variusque planetæ per tempus non nimis magnum t die-
 rum ab initio elapsum satis exacte cognoscemus; erit
 enim uti assumimus:

Pro Ioue

$$\begin{aligned}
 X &= A + A' t + A'' t t + A''' t^3. \\
 Y &= B + B' t + B'' t t + B''' t^3. \\
 Z &= C + C' t + C'' t t + C''' t^3.
 \end{aligned}$$

Pro Saturno

$$\begin{aligned}
 x &= a + a' t + a'' t t + a''' t^3. \\
 y &= b + b' t + b'' t t + b''' t^3. \\
 z &= c + c' t + c'' t t + c''' t^3.
 \end{aligned}$$

ex quibus formulis, postquam pro quouis casu in numeris
 fuerint euolutæ, facile discernere licebit, quot dies tem-
 pori t sine errore tribui poterunt. Cum enim hae for-
 mulae plerumque vehementer conuergant, haud difficulter
 iudicabitur, vtrum sequentes terminos post tertiam potes-
 tatem ipsius t sine errore negligere liceat nec ne.

§. 46. Cum autem hoc modo quantitas interualli temporis fuerit constituta, status planetarum pro fine huius temporis inuentus iterum tanquam status initialis spectari poterit, a quo simili modo per aequale temporis interuallum ulterius progredi licebit; et ita porro pro singulis interuallis cognoscetur effectus perturbationis. Vnde si talia interualla per aliquot reuolutiones integras vtriusque planetae computentur, haud difficulter diiudicare licebit, quantas immutationes tam tempora periodica et excentricitates quam positio lineae apsidum et nodorum inde accipiant, quae ergo iam in tabulis ordinariis contineri sunt censendae; reliquae vero portiones perturbationis praebebunt inaequalitates periodicas, quas peculiaribus tabulis complecti conueniet; atque hic tutissimus videtur modus, ad perfectam cognitionem omnium perturbationum, quas planetae sibi mutuo inferunt, perueniendi.

§. 47. Quo vsu harum formulam exemplo illustremus, constituamus initium interualli temporis nostri t in ipso initio huius saeculi, quoniam positio, quam ecliptica tum tenuit, nostrum ipsum planum fixum suppeditat, et tabulis Cassinianis vtentes reperimus pro hoc tempore loca heliocentrica Iouis et Saturni vt sequitur:

Pro Ioue.

Anno 1700 Ianuar. 1 d.	Anno 1700 Ianuar. 2 d.
Longit. $2 = 9^{\circ}. 10^{\circ}. 26'. 53''$	$9^{\circ}. 10^{\circ}. 32'. 1''$
Latitudo Austr. $0^{\circ}. 4'. 5$	$0. 4. 13$
Distantia a sole $5, 1864$	$5, 1861$

Pro Saturno.

Anno 1700 Ianuar. 1 d. Longit. $\theta = 11^{\circ}. 2'. 57''. 54'''$ Latitudo Austr. 1. 40. 18 Distantia a sole = 9,7470	Anno 1700 Ianuar. 2 d. $11^{\circ}. 2'. 59''. 51'''$ 1. 40. 21 9,7466
--	--

Haec ergo loca pro meridiano Parisino ipso momento meridiei vtriusque diei sunt intelligenda. At quoniam in his tabulis distantia secundum regulam *Kepleri* ex temporibus periodicis sunt definitae, vbi assumitur planetas a sola massa Solis ad Solem attrahi, cum tamen, vt vidimus, ad massam Solis insuper massa planetae sit addenda, ita vt vis Iouem ad Solem vrgens sit vt $1 + M = 1 + \frac{1}{1067}$ et vis Saturnum ad Solem attrahens vt $1 + m = 1 + \frac{1}{3021}$, cubi distantiarum in eadem ratione augeri debebunt, vnde distantiam Iouis a sole augeri oportebit in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{3200}$, distantia vero Saturni in ratione 1 ad $1 + \frac{1}{3000}$,

vnde fiet pro primo Ianuarii

Distantia Iouis = 5,188128, Distantia Saturni = 9,748083

at pro secundo Ianuarii

Distantia Iouis = 5,187829, Distantia Saturni = 9,747683

§. 48. Ex his iam locis computemus ternas coordinatas, quae pro Ioue ex primo Ianuarii dabunt litteras A, B, C hincque etiam distantiam F; pro Saturno autem a, b, c et f, quas igitur hic apponamus:

a =

$$a = 8,679506; \quad b = -4,428979; \quad c = -0,284367; \quad f = 9,748083$$

$$A = 0,940210; \quad B = -5,093711; \quad C = -0,006146; \quad F = 5,188128$$

$$a-A = 7,739296; \quad b-B = +0,669732; \quad c-C = -0,278221;$$

sive \mathfrak{A} sive \mathfrak{B} sive \mathfrak{C}

Deinde hae coordinatae ab iis quae Ianuario 2 respondent subtractae relinquunt ternas celeritates, quae erunt:

$$a' = 0,002282; \quad b' = -0,005108; \quad c' = -0,000130; \quad f' = -0,000400$$

$$A' = 0,007556; \quad B' = -0,001711; \quad C' = -0,000185; \quad F' = -0,000299$$

$$a-A' = -0,005274; \quad b-B' = -0,003397; \quad c-C' = +0,000055$$

sive \mathfrak{A}' sive \mathfrak{B}' sive \mathfrak{C}'

praeterea hic notasse iuvabit, cum sit

$$G = A A' + B B' + C C'$$

fore $G = F F'$, similique modo $g = f f'$.

§. 49. His valoribus euolutis definiamus quoque valores.

$$\mathfrak{S}^2 = (a-A)^2 + (b-B)^2 + (c-C)^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 \text{ et}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \mathfrak{A}' + \mathfrak{B} \mathfrak{B}' + \mathfrak{C} \mathfrak{C}'$$

ac reperiemus.

$\mathfrak{A}^2 = 59,89670$	$\mathfrak{A} \mathfrak{A}' = -0,04082$
$\mathfrak{B}^2 = 0,44854$	$\mathfrak{B} \mathfrak{B}' = -0,00227$
$\mathfrak{C}^2 = 0,07741$	$\mathfrak{C} \mathfrak{C}' = -0,00001$
$\mathfrak{S}^2 = 60,42265$	$\mathfrak{G} = -0,04310$
	ergo $3 \mathfrak{G} = -0,12930$.

Vt nunc hinc valores supra datos euoluamus, in subordi-

um apponamus logarithmos terminorum, quibus indigemus:

$$l \frac{1}{F^3} = 7,8549679; l \frac{1}{f^3} = 7,0332427; l \frac{1}{g^3} = 7,3282005.$$

Deinde cum fit $G = FF'$ et $g = ff'$, erit

$$\frac{zG}{F^5} = \frac{zF'}{F^4} \text{ et } \frac{zg}{f^5} = \frac{zf'}{f^4};$$

hinc per logarithmos:

$$l \frac{zG}{F^5} = (-) 4,0927469; l \frac{zg}{f^5} = (-) 3,1235048;$$

$$l \frac{zG}{g^5} = (-) 4,6585993.$$

§. 50. Ex his iam valoribus computemus litteras bis signatas, tam maiusculas quam minusculas, quem in finem euoluamus sequentes valores:

$$l \frac{A}{F^3} = 7,8281928; l \frac{B}{F^3} = (-) 8,5624283; l \frac{C}{F^3} = (-) 5,6435605$$

$$\frac{A}{F^3} = 0,0067328; \frac{B}{F^3} = -0,0365114; \frac{C}{F^3} = -0,0000440,$$

porro

$$l \frac{a}{f^3} = 7,9717377; l \frac{b}{f^3} = (-) 7,6795464; l \frac{c}{f^3} = (-) 6,4871219$$

$$\frac{a}{f^3} = 0,0093699; \frac{b}{f^3} = -0,0047813; \frac{c}{f^3} = -0,0003070$$

tandem

$$l \frac{M}{g^3} = (+) 8,2169019; l \frac{m}{g^3} = (+) 7,1541015; l \frac{C}{g^3} = (-) 6,7725904$$

$$\frac{M}{g^3} = 0,0164779; \frac{m}{g^3} = 0,0014254; \frac{C}{g^3} = -0,0005923.$$

§. 51. Hinc igitur colligere poterimus valores litterarum bis signatarum, vbi quidem fractiones M et m cum littera Δ adhuc in calculo retineamus, ficque reperiemus:

Pro

Pro Ioue

$$A'' = -\Delta(1+M).0,0067328 + \Delta m.0,0164779 - \Delta m.0,0093699$$

$$\text{fiue } A'' = -0,0067328.\Delta(1+M) + 0,0071080.\Delta m$$

$$B'' = +\Delta(1+M).0,0365114 + \Delta m.0,0014254 + \Delta m.0,0047813$$

$$\text{fiue } B'' = 0,0365114.\Delta(1+M) + 0,0062067.\Delta m$$

$$C'' = +\Delta(1+M).0,0000440 - \Delta m.0,0005923 + \Delta m.0,0003070$$

$$\text{fiue } C'' = 0,0000440.\Delta(1+M) - 0,0002853.\Delta m$$

Pro Saturno

$$a'' = -\Delta(1+m).0,0093699 - \Delta M.0,0164779 - \Delta M.0,0067328$$

$$\text{fiue } a'' = -0,0093699.\Delta(1+m) - 0,0232107.\Delta M$$

$$b'' = \Delta(1+m).0,0047813 - \Delta M.0,0014254 + \Delta M.0,0365114$$

$$\text{fiue } b'' = 0,0047813.\Delta(1+m) + 0,0350860.\Delta M$$

$$c'' = +\Delta(1+m).0,003070 + \Delta M.0,0005923 + \Delta M.0,0000440$$

$$\text{fiue } c'' = 0,0003070.\Delta(1+m) + 0,0006363.\Delta M$$

§. 52. Substituamus nunc pro Δ , M et m valores supra inuentos, scilicet;

$$\Delta = 0,0002945493; M = \frac{1}{1567} \text{ et } m = \frac{1}{3021},$$

vnde fit

$$l \Delta(1+M) = 6,4695649; l \Delta(1+m) = 6,4693018;$$

$$l \Delta M = 3,4409936; l \Delta m = 2,9890073;$$

vnde valores ante inuentos ita per meros numeros euoluamus, vt maneant bipartiti, quandoquidem pars prior ad motum regularem pertinet, posterior vero perturbationem complectitur. Erunt igitur

Numeri.	Logarithmi.
$A'' = -0,00000198499 \dots$	$4,2977577$
$+ 0,00000000069 \dots$	$0,8407547$
$B'' = +0,00001076448 \dots$	$5,0319932$
$+ 0,00000000060 \dots$	$0,7818680$
$C'' = +0,00000001297 \dots$	$2,1131254$
$- 0,00000000003 \dots$	$-1,4443091$
$a'' = -0,00000276083 \dots$	$4,4410395$
$- 0,00000000641 \dots$	$1,8066818$
$b'' = +0,00000140880 \dots$	$0,1488482$
$+ 0,06000000968 \dots$	$1,9861275$
$c'' = +0,00000009045 \dots$	$2,9564237$
$+ 0,00000000017 \dots$	$0,2446555$

§. 53. Computemus denique etiam litteras ter figuratas, id quod commodissime fiet sequenti modo

$$\begin{aligned} \frac{A'}{F^3} &= 0,0000541678; \\ -\frac{3GA}{F^5} &= \frac{+0,0000011640}{+0,0000552718}; \\ \frac{B'}{F^3} &= -0,0000122523; \\ -\frac{3GB}{F^5} &= \frac{-0,0000063126}{-0,0000185649}; \\ \frac{C'}{F^3} &= -0,0000013262. \\ -\frac{3GC}{F^5} &= \frac{-0,0000000076}{-0,0000013338}. \\ \frac{a'}{f^3} &= +0,0000024635; \\ -\frac{3aG}{f^5} &= \frac{+0,0000011534}{+0,0000036169}; \end{aligned}$$

$\frac{b'}{f^3}$

$$\begin{aligned} \frac{b'}{f'} &= -0,0000055143; \\ -\frac{abg}{f^3} &= \frac{-0,0000005886}{-0,0000061029}; \\ \frac{c'}{f^2} &= -0,0000001403. \\ -\frac{scg}{f^2} &= \frac{-0,0000000378}{-0,0000001781}; \\ \frac{m'}{g^2} &= -0,0000112299; \\ -\frac{smg}{g^2} &= \frac{+0,0000342615}{+0,0000240316}; \\ \frac{st}{g^2} &= -0,0000072327; \\ -\frac{stg}{g^2} &= \frac{+0,0000041813}{-0,0000041813}; \\ \frac{e'}{g^2} &= +0,0000001171. \\ -\frac{seg}{g^2} &= \frac{-0,0000012676}{-0,0000011505} \end{aligned}$$

§. 54. His iam formulis per numeros evolutis pro litteris nostris ter signatis §. 44 sequentes valores colligemus:

Pro Ioue.

$$\begin{aligned} A''' &= -\Delta(1+M) \cdot 0,0000552718 + \Delta m \cdot 0,0000240316 \\ &\quad - \Delta m \cdot 0,0000036169 \\ \text{siue } A''' &= -0,0000552718 \cdot \Delta(1+M) + 0,0000204147 \Delta m \\ B''' &= \Delta(1+M) \cdot 0,0000185649 - \Delta m \cdot 0,0000041813 \\ &\quad + \Delta m \cdot 0,0000061029 \\ \text{siue } B''' &= +0,0000185649 \cdot \Delta(1+M) + 0,0000019216 \Delta m \\ C''' &= \Delta(1+M) \cdot 0,0000013338 - \Delta m \cdot 0,0000011505 \\ &\quad + \Delta m \cdot 0,000001781 \\ \text{siue } C''' &= 0,0000013338 \cdot \Delta(1+M) - 0,0000009724 \Delta m \end{aligned}$$

Pro Saturno.

$$\begin{aligned}
 a''' &= -\Delta(1+m). 0,000006169 - \Delta M. 0,0000240316 \\
 &\quad - \Delta M. 0,0000552718 \\
 \text{fiue } a''' &= -0,0000036169.\Delta(1+m) - 0,0000793034.\Delta M \\
 b''' &= \Delta(1+m). 0,0000061029 + \Delta M. 0,0000041813 \\
 &\quad + \Delta M. 0,0000185649 \\
 \text{fiue } b''' &= 0,0000061029.\Delta(1+m) + 0,0000227462.\Delta M \\
 c''' &= \Delta(1+m). 0,0000001781 + \Delta M. 0,0000011505 \\
 &\quad + \Delta M. 0,0000013338 \\
 \text{fiue } c''' &= 0,0000001781.\Delta(1+m) + 0,0000024843.
 \end{aligned}$$

§. 55. Tandem hi valores penitus per numeros evoluantur, distinguendis tamen binis cuiusque partibus, quippe prior respondet motui regulari, posterior vero perturbationi. Sicque nanciscemur

	Numeros.	logarithmos.
$A''' =$	$- 0,00000001629553 \dots$	$2,2120684$
	$+ 0,000000000000199 \dots$	$- 2,2989503$
$B''' =$	$+ 0,00000000547340 \dots$	$1,7382576$
	$+ 0,000000000000019 \dots$	$- 3,2726703$
$C''' =$	$+ 0,00000000039324 \dots$	$0,5946556$
	$- 0,000000000000009 \dots$	$- 4,9768523$
$a''' =$	$- 0,00000000106571 \dots$	$1,0276383$
	$- 0,00000000002189 \dots$	$- 1,3402854$
$b''' =$	$+ 0,00000000179820 \dots$	$1,2548380$
	$+ 0,00000000000627 \dots$	$- 2,7979204$
$c''' =$	$+ 0,00000000005247 \dots$	$1,7199657$
	$+ 0,00000000000068 \dots$	$- 3,8361976$

§. 56. Quod si hi valores ter signati cum praecedentibus bis signatis comparentur, circiter millies minores deprehenduntur; vnde concludere licet, si ad litteras quater signatas progredi vellemus, eas denuo prope modum millies minores esse prodituras. His autem valoribus inuentis pro tempore t dierum elapso coordinatae pro locis vtriusque planetae erunt:

Pro Ioue

$$X = A + A' t + A'' t t + A''' t^3$$

$$Y = B + B' t + B'' t t + B''' t^3$$

$$Z = C + C' t + C'' t t + C''' t^3$$

Pro Saturno

$$x = a + a' t + a'' t t + a''' t^3$$

$$y = b + b' t + b'' t t + b''' t^3$$

$$z = c + c' t + c'' t t + c''' t^3$$

§. 57. Praeterea vero etiam hinc ternae celeritates vtriusque planetae ad idem tempus assignari poterunt, quippe quae erunt:

Pro Ioue.

Pro Saturno.

$$\begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = A' + 2 A'' t + 3 A''' t t \\ \frac{dY}{dt} = B' + 2 B'' t + 3 B''' t t \\ \frac{dZ}{dt} = C' + 2 C'' t + 3 C''' t t \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a' + 2 a'' t + 3 a''' t t \\ \frac{dy}{dt} = b' + 2 b'' t + 3 b''' t t \\ \frac{dz}{dt} = c' + 2 c'' t + 3 c''' t t \end{array} \right.$$

§. 58. Quia haec progressionem tantopere conuergunt, litterae t satis magnum valorem tribuere licebit, antequam error sensibilis metui debeat. Ad quod diuidendum

T t 3

candum

candum obseruasse iuuabit, errorem unitatis in quinta figura decimali commisso vix errorem duorum minorum secundorum in loco planetae producere; vnde intelligitur, pro littera t tuto decem vel 20 dies accipi posse, neque verendum esse ne in parte regulari error vnus minuti secundum resulter. Pro partibus autem perturbationem continentibus nullus error exsurget, etiamsi interuallum centum dierum assumemus sumendo $t = 100$. Pro partibus quidem regularibus valor $t = 100$ vnique nimis foret magnus; sed quoniam ex statu initiali rite constituto facile tabulae pro motu regulari sequente construi possunt, ex iis pro initio cuiusque interualli tam locus quam motus vtriusque planetae excerpti poterit, qui etiamsi a vero parumper discrepet, tamen perturbationes in sequentibus interuallis nullum inde mutationem patientur. Hoc modo omnia interualla temporis successua vsque ad 100 dies augere licebit, quandoquidem totum negotium huc redit, vt effectus perturbationis in singulis interuallis satis exacte definiatur.

§. 59. Quod si ergo hac ratione per interualla centum dierum progredi et ambos planetas in motu quasi prosequi velimus, omnes perturbationes ex singulis interuallis collectae effectum totum inde oriundum declarabunt. Ac si hoc modo calculum vsque ad 60 annos, quo tempore Saturnus duas, Iupiter vero quinque reuolutiones absoluit, continuare lubuerit, inde haud difficulter omnes inaequalitates ab actione mutua oriundas cognoscere indeque tabulas solitas emendare licebit.