DE STATV AEQVILIBRII MARIS A VIRIBVS SOLIS ET LVNAE SOLLICITATI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim quaestio de fluxu et refluxu maris summo studio sit pertractata, atque adeo tres dissertationes ab Academia Regia Scientiarum Parisina praemio sint condecoratae, hoc argumentum iam penitus exhaustum videbitur, ita vt nihil amplius desiderari queat. Quoniam vero illo tempore theoria de aequilibrio et motu fluidorum adhuc parum erat exculta, plurima ibi occurrunt, quae vel nimis operose et per plures ambages ex primis principiis sunt deducta, vel etiam hypothesibus precario assumtis et a veritate alienis sunt superstructa. Variae opiniones a veritate abhorrentes inualuerunt, cuiusmodi sunt, quod quantitas aestus marini potissimum ab interna Terrae structura, quae nobis penitus est incognita, atque adeo etiam a grauitate specifica aquae pendeat, ita vt, si ea effet esset vel maior vel minor, etiam aestus marini inde prodirent vel minores vel maiores, cum tamen secundum vera principia huius Theoriae postmodum stabilita hae circumstantiae nihil ad scopum conferant.

§. 2. Quanquam autem hic praecipua quaestio circa motum maris versabatur, tamen omnes, qui eius enodationem illo tempore susceperunt, vnanimi consensu agnouerunt, nihil in hac re determinari posse, nisi status aequilibrii, in quo oceanus, a viribus tam Solis quam Lunae agitatus, aequiescere queat, accuratae definiatur; vnde etiam istum aequilibrii statum ex principiis tum temporis cognitis determinare sunt conati, dum ex viribus, quibus singula puncta in superficie maris sollicitantur, eam curuam inuestigarunt, quae ad omnes earum virium directiones medias esset normalis, quod principium vtique in natura rei est fundatum, sed difficillimas euolutiones analyticas postulat, quas vix, ac ne vix quidem, expedire licuit. Tum vero etiam ad canales vsque ad centrum Terrae excauatos confugerunt et in eam figuram maris inquisiuerunt, vt omnes istae columnae fierent aequiponderantes, quae inuestigatio vtique exactam cognitionem structurae internae globi terraquei requirebat, quam quisque pro arbitrio ita finxerat, prouti scopo proposito maxime conuenire videbatur, cum tamen nuncquidem actum sit, inde vix quicquam ad hunc scopum conferri.

§. 3. Cum igitur post illud tempus theoriam de aequilibrio fluidorum ita mihi excolere et in lucem constituere contigerit, vt nihil insuper desiderari queat, his veris principiis insistens istud argumentum denuo sum sus-

 ceptu-

cepturus, quoniam hinc ad accuratam cognitionem ſtatus aequilibrii maris a viribus quibuscunque ſollicitati perueniemus, qua omnes illae opiniones peruerſae penitus remoueantur. Praeterea vero per haec noua principia tota iſta inueſtigatio a maximis illis difficultatibus, quibus ante premebatur, penitus liberabitur; atque hic imprimis ſummus vſus principii minimae actionis, quod illuſtriſſimo Praeſidi de Maupertuis acceptum referre debemus, clariſſime elucebit, cum eo vtentes plurimas easque difficillimas integrationes euitare queamus. Ab iſto igitur principio inchoëmus.

Principium Vniuerſale
Aequilibrii Fluidorum.

Tab. V. Fig. 1.

§. 4. Si ſingulae fluidi particulae Z ad quotcunque virium centra fixa C, C′, C″ vrgeantur, viribus, quae ſint cuicunque functioni diſtantiarum proportionales, tum ſuperficies fluidi A Z B erit in aequilibrio, ſi ſumma actionum, quas vires in ſingula puncta Z exerunt, vbique fuerit eadem. Hinc ergo ſi vocentur diſtantiae

$$CZ = z,\ C'Z = z,\ C''Z = z''\ \text{etc.},$$

ipſae autem vires ad haec centra tendentes ſint Z, Z′, Z″, etc., tum quia actiones harum virium per iſtas formulas exprimuntur: $\int Z\,dz$, $\int Z'\,dz'$, $\int Z''\,dz''$, pro ſtatu aequilibrii ſtatim habemus iſtam aequationem:

$$C = \int Z\,dz + \int Z'\,dz' + \int Z''\,dz'',$$

vbi C′ denotat quantitatem conſtantem ex circumſtantiis definiendam.

Status

Status quaestionis.

§. 5. Consideremus igitur totum globum terraqueum, siue circumquaque aquá circumfusum, siue ex aliqua tantum parte, cuius figura foret perfecte sphaerica, si nullae vires externae adessent; eius centrum sit in C, radius vero C A vnitate designetur. Hic enim a motu vertiginis Terrae animum abstrahimus, ita vt totus globus in perfecta quiete versetur, et singulae eius particulae a sola grauitate versus centrum C vrgeantur, viribus vtcunque a distantia pendentibus. In ipsa autem superficie vis grauitatis vnitate exprimatur. Quamcunque enim legem grauitas ad centrum accedendo tenuerit, si mutationes, quae eius figurae a viribus externis induci possunt, respectu totius magnitudinis Terrae fuerint quam minimae, prouti eas fore nouimus prope superficiem, vis grauitatis nunquam ab vnitate discrepare censeri potest. Tum vero facile intelligitur, quamcunque mutationem vires externae superficiei aquae induxerint in hypothesi perfectae quietis, tum etiam admisso motu vertiginis eandem mutationem verae figurae Terrae, quae tum erit sphaeroidica, accidere debere, quandoquidem etiam hoc casu differentia a figura sphaerica est quam minima. Tota enim inuestigatio in eo versatur, vt, quantum superficies aquae a viribus externis vltra statum naturalem siue attollatur siue deprimatur, inquiri debeat, ac tum perinde erit, siue figura naturalis fuerit sphaerica, siue paulisper ab ea recedat. His igitur constitutis quaestio eo redit; vt dum vel Sol vel Luna in quocunque coeli loco versentur, ibique tanquam fixi concipiantur, pro singulis punctis in superficie maris assumtis quantitas actionis a viribus horum corporum nata rite defi-

definiatur. Vires autem tam Solis quam Lunae quadrato distantiarum reciproce proportionales assumemus.

De quantitate actionis a viribus Solis et Lunae orta.

§. 6. Quoniam pro statu aequilibrii maris indagando ad quoduis tempus tam Sol quam Luna in eodem coeli loco permanere concipi debent, siquidem pro singulis momentis status aequilibrii variatur, ponamus distantiam Solis a centro Terrae perpetuo $= a$, distantiam vero Lunae ab eodem centro $= b$, quae igitur pro diuerso luminarium situ diuersos valores recipere possunt, inter quos medium sumendo hae distantiae per radium Terrae vnitate designatum ita definientur, vt sit $a = 24000$ et $b = 60\frac{1}{4}$ circiter. Praeterea vero vis Solis absoluta tanta sit, vt in distantia a centro Solis $= \alpha$ aequetur vi grauitatis $= 1$; pro Luna autem sit ista distantia, in qua eius vis grauitati aequaretur $= \beta$, vnde, si distantia a Sole fuerit $= z$, vis Solis erit $\frac{\alpha\alpha}{zz}$; sin autem z sit distantia a Luna, vis ibi ad Lunam tendens erit $= \frac{\beta\beta}{zz}$, ita vt hoc loco quantitates $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ idem denotent, quod vulgo per massam Solis vel Lunae indicari solet. Colligitur autem ex nouissimis parallaxis solaris determinationibus, fore $\alpha\alpha = 355426$, vnde fit $\alpha = 596$, ita vt in distantia Solis tot semidiametris Terrae aequali vis Solis aequetur ipsi vi grauitatis in superficie Terrae. Pro Luna autem quantitas $\beta\beta$ a *Newtono* aestimata est $\frac{1}{40}$, Celeb. autem *Bernoulli* ostendit, eam esse notabiliter minorem, ita vt propemodum aestimari possit $\beta = \frac{1}{8}$, vnde fieret $\beta\beta = \frac{1}{64}$.

§. 7.

§. 7. His igitur positis, si distantia siue Solis siue Lunae a puncto quocunque Z fuerit $= z$, erit vis hoc punctum sollicitans, scilicet $Z = \frac{\alpha\alpha}{zz}$, pro Sole, et $Z = \frac{\beta\beta}{zz}$, pro Luna. Hinc ergo quantitas actionis pro Sole erit $\int Z\, dz = -\frac{\alpha\alpha}{z}$ et pro Luna $= -\frac{\beta\beta}{z}$. Sit igitur C centrum Terrae et S centrum Solis, ac ponatur distantia $CS = a$; tum vero consideretur in superficie maris, postquam se iam ad aequilibrium composuerit, punctum quodcunque Z, cuius distantia a centro Terrae, quae iam erit aliquantillum siue maior siue minor vnitate, sit $CZ = r$, angulus vero SCZ vocetur $= \Phi$, eritque distantia Tab. V. Fig. 3.

$$ZS = z = \sqrt{(aa - 2ar\,\text{cos.}\,\Phi + rr)},$$

sicque quantitas actionis erit $= \frac{-\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\,\text{cos.}\,\Phi + rr)}}$. Simili modo pro Luna, cuius distantiam a centro Terrae ponimus $= b$, si eius elongationem ab eodem puncto Z statuamus $= \psi$, erit actio Lunae in punctum Z

$$= \frac{-\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\,\text{cos.}\,\psi + rr)}}.$$

§. 8. Hic autem probe perpendendum est, Solem et Lunam eatenus tantum in punctum Z agere, quatenus actio discrepat ab ea, quae in centrum Terrae exeritur. Cum igitur hoc centrum in S in directione CS sollicitetur vi $= \frac{\alpha\alpha}{zz}$, punctum Z a pari vi in directione contraria ZX vrgeri censendum est, existente ZX parallela ipsi CS; ad eam igitur ex C ducatur perdendicularis CX, voceturque interuallum $ZX = x$. Haec igitur vis ad punctum fixum, in recta ZX infinite remotum, trahere censenda est, ita vt distantia, quam in genere posuimus $= z$, hic sit $x + \infty$. Quia igitur ipsa vis, quam posuimus Z, hic est constans $=\frac{\alpha\alpha}{aa}$, erit eius actio in punctum Z

$$\int Z\,dz = \int \frac{\alpha\alpha}{aa}\,dx = \frac{\alpha\alpha}{aa}\,x.$$

Cum igitur ob angulum $SCZ = \Phi$ sit $ZX = x = r\cos.\Phi$, ista actio erit $\frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa}$, vnde actio tota a Sole oriunda in punctum Z erit:

$$-\frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa-2ar\cos.\Phi+rr)}} + \frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa},$$

similique modo tota actio a Luna in punctum Z exerta:

$$= -\frac{\beta\beta}{(\sqrt{bb-2br\cos.\psi+rr})} + \frac{\beta\beta r\cos.\psi}{bb}.$$

Aequatio

pro statu aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae sollicitati.

Tab. V. Fig. 4. §. 9. Hic igitur ante omnia vis grauitatis, qua punctum maris quodcunque Z ad ipsum centrum Terrae C vrgetur, considerari debet, quam, quia nullam mutationem sensibilem subire potest, ob variatam distantiam $CZ = r$, vnitate designamus, ita vt hoc casu sit $z = r$ et $Z = 1$. Hinc ergo actio grauitatis in punctum maris Z erit $= r$. Quam ob rem si curua AZB denotet superficiem maris iam ad aequilibrium reductam; tum vero hoc tempore Sol et Luna versentur in punctis S et L, ita vt distantiae sint $CS = a$ et $CL = b$, anguli vero $SCZ = \Phi$ et $LCZ = \psi$, summa omnium actionum, quibus punctum Z vrgetur, erit:

$$= r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa-2ar\cos.\Phi+rr)}} + \frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb-2br\cos.\psi+rr)}}$$
$$+ \frac{\beta\beta r\cos.\psi}{bb}$$

quae

quae ergo pro ſtatu aequilibrii debet aequari quantitati conſtanti, quam deſignemus littera C, atque hoc modo pro figura, quam mare accipiet, ſtatim nanciſcimur iſtam aequationem finitam atque adeo algebraicam:

$$C = r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r\,\text{coſ.}\,\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\,\text{coſ.}\,\psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r\,\text{coſ.}\,\psi}{bb}.$$

Hinc igitur praeſtantia huius methodi, principio minimae actionis innixae, clariſſime elucet, cum nobis ſtatim aequationem algebraicam pro ſtatu aequilibrii maris ſit largita, dum olim iſta determinatio per calculos moleſtiſſimos, ex hypotheſibus precario aſſumtis, deriuari debuerit. Hi enim calculi plerumque abſtruſiſſimas ſectionum conicarum proprietates requirebant, ſimulque ita erant comparati, vt nullo modo pateret, quomodo ad aequationem algebraicam perueniri poſſet, niſi adhibitis approximationibus. Hic autem nulla adhuc approximatione ſumus vſi.

§. 10. Nunc autem facillime eas approximationes, quae ad ſcopum noſtrum erant accommodatae, expedire poterimus. Cum enim diſtantiae a et b ſint praegrandes ratione radii $CZ = r$, euoluamus in genere hanc formulam irrationalem: $(aa - \Omega)^{-\frac{1}{2}}$, quae praebet ſequentem ſeriem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1.\,\Omega}{2.\,a^3} + \frac{1.\,3.\,\Omega^2}{2.\,4\,a^5} + \frac{1.\,3.\,5.\,\Omega^3}{2.\,4.\,6.\,a^7} + \text{etc.}$$

Nunc igitur pro Sole habemus $\Omega = 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi - rr$, vnde elicimus

$$\frac{1}{\sqrt{(aa - 2ar\,\text{coſ.}\,\Phi + rr)}} = \frac{1}{a} + \frac{r\,\text{coſ.}\,\Phi}{aa} - \frac{rr}{2a^3}(1 - 3\,\text{coſ.}\,\Phi^2) - \frac{r^3\,\text{coſ.}\,\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\text{coſ.}\,\Phi^2),$$

 ſimili

ſimili autem modo erit pro Luna:

$$\frac{1}{\sqrt{(bb - 2br\,\mathrm{coſ.}\,\psi + rr)}} = \frac{1}{b} + \frac{r\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{bb} - \frac{rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2)$$
$$- \frac{r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2).$$

Quoniam igitur hic prima membra conſtantia ſub conſtante C complecti licet, tota aequatio in ſequentem formam contrahetur:

$$0 = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2) + \frac{\beta\beta r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2).$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ſtatuamus $\frac{\alpha\alpha}{2a^3} = A$ et $\frac{\alpha\alpha}{2a^4} = \mathfrak{A}$, tum vero $\frac{\beta\beta}{2b^3} = B$ et $\frac{\beta\beta}{2b^4} = \mathfrak{B}$, aequatio noſtra erit:

$$0 = C + r + Arr(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2) + \mathfrak{A}r^3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ Brr(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2) + \mathfrak{B}r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2)$$

mox autem patebit litteras A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, fractiones eſſe quam minimas.

§. 11. Hactenus radium Terrae in ſtatu naturali vnitate expreſſimus. Quoniam vero exceſſum vel defectum quantitatis r ſupra vel infra hanc vnitatem in menſuris abſolutis, ſcilicet pedibus, deſideramus, ponamus radium Terrae naturalem $= k$, ita vt ſit vti ſupra oſtendimus $\alpha = 596\,k$ et $\beta = \frac{k}{8}$; tum vero pro diſtantiis mediis Solis et Lunae $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$, tantum opus eſt, vt hac littera k omnes termini aequationis inuentae ad eundem dimenſionum numerum reducantur; vnde cum in termino principali, qui eſt r, vnica ſit dimenſio, etiam in reliquis terminis vnica dimenſio ineſſe debet; quare quia litterae α, β, a et b iam vnam dimenſionem continent, aequatio noſtra ſequenti modo exhiberi debet:

$0 =$

$$0 = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3 \mathrm{cos}.\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\Phi^2) + \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\psi^2) + \frac{\beta\beta r^3 \mathrm{cos}.\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\psi^2)$$

quae ergo a praecedente non differt, et hoc nobis praestat commodum, vt nunc radium Terrae k tuto per quamcunque mensuram absolutam exprimere possimus, veluti in pedibus. Ex mensuris autem actu institutis iste radius terrae k deprehensus est continere 19601352 pedes parisinos.

§. 12. Quoniam igitur iam certi sumus distantiam r non vltra aliquot pedes a radio naturali k differre posse, statuamus $r = k + v$, ita vt v sit quantitas quam minima prae k, ideoque

$$rr = kk + 2kv \text{ et } r^3 = k^3 + 3kkv,$$

quibus valoribus introductis aequatio nostra pro quantitate v determinanda ita se habebit:

$$\begin{aligned} 0 = C + k &+ \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha k^3 \mathrm{cos}.\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{cos}.\Phi^2) \\ &+ \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\psi^2) + \frac{\beta\beta k^3 \mathrm{cos}.\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\psi^2) \\ &+ v\left(1 + \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk \mathrm{cos}.\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{cos}.\Phi^2)\right) \\ &+ \frac{\beta\beta k}{b^3}v\left((1 - 3\,\mathrm{cos}.\psi^2) + \frac{\beta\beta kk \mathrm{cos}.\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\psi^2)\right), \end{aligned}$$

vbi ergo $C + k$ quantitatem minimam exprimere debebit. Quod si ergo loco $C + k$ scribamus $-c$ et priores terminos ad alteram partem aequationis transferamus, aequatio nostra hanc induet formam:

$$\begin{aligned} v\Big(1 &+ \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk \mathrm{cos}.\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{cos}.\Phi^2) \\ &+ \frac{\beta\beta k}{b^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\psi^2) + \frac{\beta\beta kk \mathrm{cos}.\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\psi^2)\Big) \\ = c &- \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\Phi^2) - \frac{\alpha\alpha k^3 \mathrm{cos}.\Phi}{2a^4}(9 - \mathrm{cos}.\Phi^2) \\ &- \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{cos}.\psi^2) - \frac{\beta\beta k^3 \mathrm{cos}.\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{cos}.\psi^2), \end{aligned}$$

 vbi

vbi c eſt conſtans per integrationem ingreſſa, quam quovis caſu ita determinari oportet, vt totum mare in ſtatu mutato adhuc eandem aquae quantitatem contineat atque in ſtatu naturali.

Euolutio numerica Aequationis inuentae per Pedes Pariſinos.

§. 13. Primo igitur littera c certum numerum pedum deſignabit, ex quantitate omnis aquae, quam mare continet, definiendum; tum vero, vt ſupra vidimus, eſt $\alpha = 596\,k$, $\beta = \frac{k}{8}$, pro diſtantiis autem mediis Solis et Lunae ſumamus $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$. Hinc ergo pro aequationis noſtrae parte priore habebimus vt ſequitur:

$$\frac{\alpha\alpha k}{a^3} = \frac{596^2}{24000^3} = 0,0000000257$$
$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^4} = \frac{596^2}{2 \cdot 24000^4} = 0,0000000000$$
$$\frac{\beta\beta k}{b^3} = \frac{1}{64 \cdot 60^3} = 0,0000000723$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^4} = \frac{1}{128 \cdot 60^4} = 0,0000000006$$

vnde patet, pro prima parte noſtrae aequationis ſine vllo errore ſcribi poſſe v. Pro altera autem aequationis parte habebimus:

$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^3} = \frac{596^2 \cdot k}{2 \cdot 24000^3} = 0,25183$$
$$\frac{\alpha\alpha k^3}{6\alpha^4} = \frac{596^2 \cdot k}{6 \cdot 24000^4} = 0,00000$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^3} = \frac{k}{2 \cdot 64 \cdot 60^3} = 0,70896$$
$$\frac{\beta\beta k^3}{2b^4} = \frac{k}{6 \cdot 64 \cdot 60^4} = 0,00399.$$

Hinc

Hinc igitur aequatio nostra hanc induet formam:

$$v = c - 0,25183\,(1 - 3\,\mathrm{cos}.\,\Phi^2) - 0,70896\,(1 - 3\,\mathrm{cos}.\,\psi^2)$$
$$- 0,00000\,\mathrm{cos}.\,\Phi\,(3 - 5\,\mathrm{cos}.\,\Phi^2) - 0,01197\,\mathrm{cos}.\,\psi\,(3 - 5\,\mathrm{cos}.\,\psi^2)$$

vnde valor ipsius v in pedibus Parisinis elicietur.

§. 14. Ponamus breuitatis gratia istos valores numericos modo inuentos, pro Sole: $0,25183 = m$, pro Luna autem: $0,70896 = n$ et $\nu = 0,01197$, vt fit:

$$v = c + m\,(3\,\mathrm{cos}.\,\Phi^2 - 1) + n\,(3\,\mathrm{cos}.\,\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\mathrm{cos}.\,\psi\,(5\,\mathrm{cos}.\,\psi^2 - 3).$$

Vbi notetur, valorem ipsius m, ad Solem pertinentem, satis esse iustum, dummodo ad distantiam mediam Solis et Terrae referatur, at vero valores n et ν quodammodo adhuc esse incertos, quoniam a massa Lunae pendent, pro qua assumsimus litteram $\beta = \frac{1}{3}k$, quemadmodum praecessio aequinoxiorum postulare videtur; fieri igitur posset vt aliquanto maior vel minor accipi deberet. Praeterea vero etiam hi valores ad distantiam mediam Lunae a Terra sunt accomodati, vnde eos, si Luminaria fuerint in Apogeo, paulisper diminui, in Perigeo autem augeri oportet. Quare cum excentricitas Solis sit quasi $\frac{1}{60}$, si Sol fuerit in Apogeo, littera m diminui debet in ratione triplicata distantiae, siue vt $1 : (1 + \frac{1}{60})^3$, quae ratio proxime est vt $1 : 1\frac{1}{20}$, vnde pro Apogeo Solis fit $m = 0,23924$, pro Perigeo autem tanto maior, id est $m = 0,26442$. Deinde quia Lunae excentricitas est quasi $\frac{1}{18}$, pro eius Apogeo valor litterae n diminui debet sua parte sexta, ita vt fit $n = 0,59080$, pro Perigeo vero tantundem augeri, fietque $n = 0,82712$. Littera denique ν, quae biquadrato

drato diſtantiae reciproce eſt proportionalis, pro Apogeo fiet $\nu = 0,00931$, pro Perigeo vero $\nu = 0,01463$. Hoc igitur modo harum litterarum valores minimi, medii et maximi ita ſe habebunt:

Valor	min.	med.	max.
m	0, 23924	0, 25183	0, 26442
n	0, 59080	0, 70896	0, 82712
ν	0, 00931	0, 01197	0, 01463

Sufficiet autem hos valores noſſe, quoniam ridiculum foret, in hoc negotio minutiis inhaerere.

Applicatio Formulae inuentae ad ſuperficiem Sphaericam.

Tab. V. Fig. 5. §. 15. Repraeſentet iam circulus A B C D globum terraqueum, in cuius ſuperficie notentur puncta S et L, quibus hoc tempore Sol et Luna verticaliter immineant, ita vt Sol verſetur in zenith loci S, Luna vero in zenith loci L, et quaeramus ſtatum maris, quem pro hoc luminarium ſitu eſſet accepturum. Conſideremus igitur in maris ſuperficie quodcunque punctum Z, quod ſupra libellam naturalem ab actione luminarium attollatur per interuallum $= v$, in pedibus Pariſinis determinandum. Hinc ergo ad puncta S et L ducantur arcus circulorum maximorum Z S et Z L, qui vocentur $ZS = \Phi$ et $ZL = \psi$, ac manifeſtum eſt angulum Φ exprimere diſtantiam Solis a puncto zenith loci Z, ſimilique modo angulus ψ diſtantiam Lunae ab eodem zenith, quibus poſitis ſpatium eleuationis v ſupra libellam definietur hac aequatione:

$v =$

$$v = c + m(3 \cos.\phi^2 - 1) + n(3 \cos.\psi^2 - 1) + \nu \cos.\psi(5 \cos.\psi^2 - 3),$$

vbi quantitas conſtans c quouis caſu ita debet determinari, vt facta mutatione ſtatus etiamnunc eadem copia aquae in mari propoſito reperiatur.

§. 16. Ad hanc igitur conſtantem c inueniendam, tota figura eius maris, cuius ſtatus quaeritur, probe eſt perpendenda, niſi quaeſtio inſtituatur de vniuerſo oceano totam Terram ambiente. Sit igitur $a\,b\,c\,d$ mare illud vndequaque clauſum et terminatum; cuius ſtatus aequilibrii pro deſcripto luminarium ſitu deſideretur; eius quoduis elementum circa punctum Z ſitum deſignetur per dS, cui ergo inſiſtit columna aquea altitudinis $= v$, ita vt eius volumen ſit $v\,d$S. Haec igitur formula differentialis integretur, eiusque integrale per totum ſpatium $a\,b\,c\,d$ extendatur, vt obtineatur tota maſſa aquea huic ſpatio inſiſtens, quae cum eſſe debeat nihilo aequalis, ex aequatione $\int v\,d\mathrm{S} = 0$ colligetur valor conſtantis c. Perſpicuum autem eſt, hoc fieri non poſſe, niſi per totum ſpatium $a\,b\,c\,d$ valores negatiui ipſius v valoribus poſitiuis aequiualeant. Ex quo facile intelligitur, valorem iſtius conſtantis c non ſolum a figura maris propoſiti $a\,b\,c\,d$, ſed etiam a poſitione luminarium S et L potiſſimum pendere, ita vt pro quouis alio ſitu iſta inueſtigatio de nouo inſtitui debeat. Deinceps autem videbimus, quomodo hanc rationem expedire conueniat. Tab. V. Fig. 5.

§. 17. Hic autem aſſumamus, iſtius litterae c valorem iam rite eſſe aſſignatum, et ſpatium $a\,b\,c\,d$ per totam

tam Terrae superficiem esse extensum, vt, quantum aqua in singulis Terrae locis siue supra libellam attolli siue infra eam deprimi debeat, definire queamus. Ac primo quidem facile patet, aquam maxime eleuari debere in loco quodam inter puncta S et L sito, qui sit in E, quandoquidem nouimus, ab vtriusque luminaris actione seorsim considerata aquam maxime attolli in eo loco, cui luminare verticaliter imminet. Ponamus igitur distantiam luminarium $SL = \zeta$, ac translato puncto indefinito Z in E habebimus arcum $SE = \Phi$, arcum vero $LE = \zeta - \Phi = \psi$, ita vt sit $d\psi = -d\Phi$. Quare pro maximo valore ipsius ω inueniendo, eius differentiale nihilo aequemus, at ob $d\psi = -d\Phi$ prodibit ista aequatio:

$$-6m \sin.\Phi \cos.\Phi + 6n \sin.\psi \cos.\psi + 15\nu \sin.\psi \cos.\psi^2$$
$$-3\nu \sin.\psi = 0,$$

vbi cum ν sit valde paruum prae m et n, erit proxime:

$$-m \sin.\Phi \cos.\Phi + n \sin.\psi \cos.\psi = 0, \text{ siue}$$
$$m \sin.2\Phi = n \sin.2\psi = n \sin.(2\zeta - 2\Phi),$$

sicque punctum E ibi reperietur, vbi erit

$$m \sin.2SE = n \sin.2LE.$$

§. 18. Cum igitur sit

$$\sin.(2\zeta - 2\Phi) = \sin.2\zeta \cos.2\Phi - \cos.2\zeta \sin.2\Phi,$$

hinc colligitur fore $\tang.2\Phi = \frac{n \sin.2\zeta}{m + n \cos.2\zeta}$. Quaeratur ergo angulus θ, cuius tangens sit $= \frac{n \sin.2\zeta}{m + n \cos.2\zeta}$, et cum eadem quoque sit tangens anguli $\theta + 180°$, hinc nanciscemur duos valores pro angulo Φ, quorum alter erit $\Phi = \frac{1}{2}\theta$, alter vero $\Phi = \frac{1}{2}\theta + 90°$. Prior igitur manifesto dat lo-

cum

cum E, vbi aqua maxime eleuabitur, poſterior vero eum locum, vbi maxime deprimetur, qui ergo a loco E interuallo quadrantis erit remotus in arcu S L producto. Simul vero etiam patet, in locis diametraliter oppoſitis aquam fore vel maxime eleuatam vel depreſſam.

§. 19. Haec autem, quoniam ad diſtantiam quamcunque inter luminaria ſpectant, nimis ſunt generalia, quam vt inde concluſiones concinnas deriuare queamus. Infra autem has determinationes ad caſus particulares accommodabimus. Nunc autem rem in genere conſiderantes videamus ſtatum aquae tam in ipſo loco S quam in loco L. Pro priore igitur, translato puncto Z in S, erit $\Phi = 0$ et $\psi = \zeta$, vnde fit

$$v = c + 2m + n(3\cos\zeta^2 - 1) + \nu\cos\zeta(5\cos\zeta^2 - 3);$$

at vero translato Z in L erit $\Phi = \zeta$ et $\psi = 0$, hincque

$$v = c + m(3\cos\zeta^2 - 1) + 2n + 2\nu.$$

Sin autem punctum Z ita capiatur, vt ambo arcus S Z et L Z fiant quadrantes, tum ob $\Phi = 90°$ et $\psi = 90°$ erit $v = c - m - n$, vbi ergo aqua ſemper erit maxime depreſſa.

Applicatio ad hypotheſin,

qua tota Terra aqua circumdata ponitur.

§. 20. Contemplemur nunc caſum, quo tota Terra eſſet fluida, vel ſaltem continuo maris tractu cincta, et quaeramus valorem quantitatis conſtantis c pro quouis ſitu amborum luminarium, vt inde vera eleuatio maris ſuper libellam naturalem in omnibus locis aſſignari queat.

Ad

Ad hoc igitur neceſſe eſt, vt formula integralis $\int v\, d\,S$ per totam Terrae ſuperficiem extendatur et valor reſultans nihilo aequetur; ſic enim peruenietur ad aequationem, ex qua quantitas c facile determinari poterit. Vbi notetur, differentiale $d\,S$ exprimere elementum quodcunque ſuperficiei ſphaericae.

§. 21. Cum igitur valor quantitatis v ex quatuor partibus ſit compoſitus, quarum prima eſt ipſa conſtans c, quae quaeritur; ſecunda, actio a Sole orta $m\,(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1)$; tertia, actio principalis a Luna orta $n\,(3\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 1)$; quarta denique, correctio iſtius actionis $= \nu\,\text{coſ.}\,\psi\,(5\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 3)$: ſingulas iſtas partes in elementum ſuperficiei $d\,S$ ducamus et integralia per totam ſuperficiem Terrae extendamus, quo facto aggregatum omnium nihilo aequari debebit. Prima igitur pars, ſeu conſtans c ſtatim praebet $\int c\,d\,S = c\,S$, vbi loco S totam ſuperficiem Terrae aſſumi oportet. Hic iterum radium Terrae vnitate deſignemus, quandoquidem non quantitas abſoluta ſpectatur, ac poſita ratione diametri ad peripheriam vt $1 : \pi$, notum eſt, totam ſuperficiem Sphaere eſſe $= 4\,\pi$, vnde integrale ex prima parte ortum erit $= 4\,\pi\,c$.

Tab. V. Fig. 6. §. 22. Pro ſecunda parte $m\,(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1)$ circa punctum S in ſuperficie ſphaerica deſcribamus circulum, interuallo $S\,Z = \Phi$, eritque $\text{ſin.}\,\Phi$ radius huius circuli in plano conſiderati, eiusque propterea peripheria $= 2\,\pi\,\text{ſin.}\,\Phi$. Iam tribuamus arcui $S\,Z = \Phi$ incrementum infinite paruum $Z\,z = d\,\Phi$, quod in peripheriam $2\,\pi\,\text{ſin.}\,\Phi$ ductum dabit incrementum areae iſtius areae circularis in ſuperficie ſphaerica, quod ergo erit $= 2\,\pi\,d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$; quamobrem iſtud

istud incrementum per secundam partem $m(3\,\text{cos}.\,\phi^2 - 1)$ multiplicetur, et integrari debebit ista formula:

$$2\,m\,\pi\,d\phi\,\text{sin}.\,\phi\,(3\,\text{cos}.\,\phi^2 - 1).$$

Hunc in finem ponamus

$$\text{cos}.\,\phi = x,\ \text{eritque}\ d\phi\,\text{sin}.\,\phi = -dx,$$

et formula integranda euadet $= -2\,m\,\pi\,d\,x\,(3\,x\,x - 1)$, cuius ergo integrale fit

$$2\,m\,\pi\,(x - x^3) + C = 2\,m\,\pi\,(\text{cos}.\,\phi - \text{cos}.\,\phi^3) + C,$$

quae constans C autem euanescit, quia integrale inuentum sponte fit $= 0$, sumto arcu $\phi = 0$, ita vt integrale ex hac parte ortum sit $2\,m\,\pi\,\text{cos}.\,\phi\,\text{sin}.\,\phi^2$, cuius valor vt per totam superficiem sphaericam extendatur, arcus indefinitus ϕ sumi debet semicirculo aequalis; vnde, cum fiat $\text{sin}.\,\phi = 0$, euidens est, integrale ex secunda parte ipsius v natum sponte fieri $= 0$, atque hinc simul manifestum est, etiam integrale ex tertia parte oriundum ad nihilum reduci.

§. 23. Pro parte quarta ipsius v in figura loco S sumatur punctum L, voceturque arcus $LZ = SZ = \psi$, et quia elementum spatii circularis nunc erit $2\,\pi\,d\psi\,\text{sin}.\,\psi$, formula differentialis ex quarta parte nata erit

$$2\,\nu\,\pi\,d\psi\,\text{sin}.\,\psi\,\text{cos}.\,\psi\,(5\,\text{cos}.\,\psi^2 - 3).$$

Faciamus hic iterum $\text{cos}.\,\psi = x$, vt habeamus hanc formulam: $-2\,\nu\,\pi\,x\,d\,x\,(5\,x\,x - 3)$, cuius integrale est

$$-2\,\nu\,\pi\,(\tfrac{5}{4}x^4 - \tfrac{3}{2}x\,x) = 2\,\nu\,\pi\,(\tfrac{5}{4}\text{cos}.\,\psi^4 - \tfrac{3}{2}\text{cos}.\,\psi^2) + C.$$

Erit autem $C = \frac{1}{2}\nu\,\pi$. Extendatur nunc hoc integrale per totam Sphaeram, ponendo $\psi = 180$, atque etiam haec quarta pars euadet $= 0$.

§. 24. Hinc igitur patet, ſi tota terra continuo oceano eſſet obducta, tum ſemper fore conſtantem $c = 0$, in quocunque loco coeli ambo luminaria verſentur, ita vt pro hac hypotheſi ſemper valeat iſta aequatio:

$$v = m\,(3\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1) + n\,(3\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\text{coſ.}\,\psi\,(5\,\text{coſ.}\,\psi^2 - 3),$$

vnde pro ſingulis Terrae locis eleuatio aquae ſupra libellam in pedibus pariſinis definiri poterit. Scilicet ſi valor ipſius v prodeat poſitiuus, eleuatio ſupra libellam naturalem indicabitur; vbi autem obtinuerit valorem negatiuum, ibi depreſſio infra libellam indicabitur. Haec autem omnia intelligenda ſunt de ſtatu aequilibrii, quem actio luminarium Terrae eſſet inductura, ſi tam Terra quam ipſa luminaria perpetuo in eodem loco quieſcerent. In hac igitur hypotheſi ſequens Problema reſolui poterit.

Problema.

§. 25. In hypotheſi Terrae quieſcentis et oceano continuo circumdatae, ſi dentur in coelo loca Solis et Lunae, vbi per aliquot tempus commorari concipi debent, vt totus Oceanus ſe ad ſtatum aequilibrii componere poſſit, in omnibus Terrae locis ſiue eleuationem ſiue depresſionem aquae ſupra vel infra libellam naturalem determinare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 7. Referat circulus AEBF ſuperficiem Terrae, vbi A et B ſint Poli borealis et auſtralis, ſemicirculus vero AEB repraeſentet primum meridianum, tum vero puncta S et L ea ſint loca, quibus Sol et Luna verticaliter immineant, pro

pro quibus ductis meridianis A S et A L, sint longitudines E A S $= \zeta$ et E A L $= \eta$, distantiae vero a polo boreali A vocentur A S $= f$ et A L $= g$. Iam proponatur Terrae locus quicunque Z, cuius longitudo sit E A Z $= \omega$, et distantia a Polo A Z $= z$. Quo igitur pro hoc loco quantitas v possit definiri, eius distantiae a punctis S et L, scilicet arcus Z S $= \Phi$ et Z L $= \psi$ quaeri debent. Pro priore Z S $= \Phi$ ex triangulo spaerico Z A S, in quo habentur latera A Z $= z$ et A S $= f$, cum angulo intercepto Z A S $= \zeta - \omega$, deducitur:

$$\text{cof. } SZ = \text{cof. } \Phi = \text{cof. } f \text{ cof. } z + \text{fin. } f \text{ fin. } z \text{ cof. } (\zeta - \omega).$$

Simili modo ex triangulo Z A L, in quo habentur latera ZA $= z$ et AL $= g$, cum angulo intercepto ZAL $= \eta - \omega$, colligitur

$$\text{cof. } LZ = \text{cof. } \psi = \text{cof. } g \text{ cof. } z + \text{fin. } g \text{ fin. } z \text{ cof. } (\eta - \omega).$$

His igitur duobus angulis Φ et ψ inuentis, erit eleuatio aquae in loco Z fupra libellam naturalem:

$$v = m(3 \text{ cof. } \Phi^2 - 1) + n(3 \text{ cof. } \psi^2 - 1)$$
$$+ \nu \text{ cof. } \psi (5 \text{ cof. } \psi^2 - 3),$$

vbi litterarum m, n et ν valores pro ratione distantiae tam Solis quam Lunae ex §. 14 sunt desumendi.

Corollarium 1.

§. 26. Quod si ergo locus Z in ipso polo boreali A accipiatur, vt sit $z = 0$, statim habebitur $\Phi = f$ et $\psi = g$, vnde pro hoc loco erit

$$v = m(3 \text{ cof. } f^2 - 1) + n(3 \text{ cof. } g^2 - 1) + \nu \text{ cof. } g (5 \text{ cof. } g^2 - 3).$$

Sin autem punctum Z in polo australi B accipiatur, fiet

$\Phi =$

$$\Phi = 180^\circ - f \text{ et } \psi = 180^\circ - g,$$

et pro hoc loco erit

$$v = m(3\,\text{cof.}\,f^2 - 1) + n(3\,\text{cof.}\,g^2 - 1) - \nu\,\text{cof.}\,g\,(5\,\text{cof.}\,g^2 - 3),$$

vbi vltimum membrum contrario figno eft affectum.

Corollarium 2.

§. 27. Si punctum Z in aequatore accipiatur, vt fit $z = 90^\circ$, manente longitudine indefinita $EAZ = \omega$, reperietur

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{fin.}\,f\,\text{cof.}\,(\zeta - \omega) \text{ et } \text{cof.}\,\psi = \text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,(\eta - \omega),$$

vnde eleuatio aquae erit,

$$v = m(3\,\text{fin.}\,f^2\,\text{cof.}\,(\zeta - \omega)^2 - 1) + n(3\,\text{fin.}\,g^2\,\text{cof.}\,(\eta - \omega)^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,(\eta - \omega)\,(5\,\text{fin.}\,g^2\,\text{cof.}\,(\eta - \omega)^2 - 3).$$

Corollorium 3.

§. 28. Si Sol et Luna fuerint in coniunctione, vt fit $\eta = \zeta$ et $g = f$, erit

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,\psi = \text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z + \text{fin.}\,f\,\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,(z - \omega),$$

quibus inuentis eleuatio in loco z reperietur:

$$v = (m + n)(3\,\text{cof.}\,\Phi^2 - 1) + \nu\,\text{cof.}\,\Phi\,(5\,\text{cof.}\,\Phi^2 - 3).$$

Sin autem Sol et Luna fuerint in oppofitione, erit $\eta - \zeta = 180$ et $g = 180^\circ - f$, vnde cum fit

$$\text{fin.}\,\eta = -\,\text{fin.}\,\zeta,\ \text{cof.}\,\eta = -\,\text{cof.}\,\zeta,$$
$$\text{fin.}\,g = \text{fin.}\,f, \text{ et } \text{cof.}\,g = -\,\text{cof.}\,f,$$

fequitur fore

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z + \text{fin.}\,f\,\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,(\zeta - \omega) \text{ et}$$
$$\text{cof.}\,\psi = -\,\text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z - \text{fin.}\,f\,\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,(\zeta - \omega).$$

Sicque

Sicque patet fore $\cos.\ \psi = -\cos.\ \phi$, ex quibus eleuatio aquae in z colligitur:

$$v = (m + n)(3 \cos.\ \phi^2 - 1) - \nu \cos.\ \phi\,(5 \cos.\ \phi^2 - 3).$$

Scholion.

§. 29. In hac hypothesi commode accidit, vt pro omnibus locis Solis et Lunae quantitas constans c eundem valorem nanciscatur. Sin autem mare vndique clausum proponatur, quod tantum modicam portionem superficiei Terrae occuparet, tum pro quouis situ luminarium valor istius quantitatis constantis c seorsim computari deberet, quod vtique calculum non parum molestum postularet. Plerumque autem sufficiere poterit differentiam tantum inter eleuationem aquae in variis locis talis maris determinasse, ita vt tum non opus sit veram quantitatem litterae c definire. Ceterum quoniam hoc loco mihi tantum fuit propositum, pro quouis situ Solis ac Lunae, statum aequilibrii, in quo maria acquiescere queant, ex veris principiis determinare, hoc argumentum vlterius non prosequor, neque quicquam de Phaenomenis fluxus et refluxus maris hic attingam, quippe quae iam dudum satis dilucide sunt tractata.