DE MOTIBVS MAXIME IRREGVLARIBVS, QVI IN SYSTEMATE MVNDANO LOCVM HABERE POSSENT, VNA CVM METHODO HVIVSMODI MOTVS PER TEMPORIS SPATIVM QVANTVMVIS MAGNVM PROSEQVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In praecedente dissertatione nobis licuit limites naturales definire, quos inter planetas primarios et secundarios stabilire conuenit. Ostendimus enim sphaeram lunarem a centro terrae vsque ad partem centesimam distantiae Solis extendi, quandoquidem in hac distantia euenire posset, vt corpus certo modo proiectum, tam circa terram, quam circa Solem, circulum motu vniformi describeret; similique modo sphaeram satellitiam Iouis circiter ad partem decimam quintam eius distantiae a Sole, Saturni autem ad partem vicesimam circiter distantiae a Sole porrigi obseruauimus. Quibus limitibus constitutis omnia corpora, quae intra eos reuolutiones suas peragunt, ad classem Satellitellitum, quae autem extra eos motum ſuum abſoluunt, inter planetas principales referri conueniet.

§. 2. Quanquam autem in ipſis his limitibus motus exiſtere poteſt maxime regularis, quippe qui in circulo vniformiter perageretur: tamen hic ſe maximum paradoxon obtulit, in hoc conſiſtens, quod ſi motus vel minime ab iſta regularitate diſcrepauerit: in eo ſtatim maximae perturbationes ſe admiſceant, quas nullo adhuc modo in Aſtronomia vſitato ad certam legem reuocare liceat. Neque enim his caſibus tales perturbationes more ſolito per certas tabulas aequationum, proxime ſaltem, repraeſentari poterunt, quaecunque etiam talium tabularum argumenta in ſubſidium vocentur; atque hae perturbationes eo erunt maiores, quo propius huiusmodi motus ad ipſos limites deſignatos acceſſerint.

§. 3. Hinc intelligitur, tria genera huiusmodi motuum maxime perturbatorum conſtitui debere, quorum primum ea complectatur corpora, quae totum ſuum motum intra limites deſignatos circa planetam primarium abſoluant, quae ergo ad claſſem Lunarum ſeu ſatellitum referri oportet. Quae autem corpora extra ſphaeram lunarem ſeu ſatellitiam non procul a limitibus motum ſuum circa Solem abſoluunt, ea ſine dubio planetis principalibus annumerari debebunt, etiamſi eorum motus tantopere perturbetur, vt nullis plane aequationibus ad certam legem reduci queat. Tertium denique genus eiusmodi comprehendet corpora, quae ita oblique moueantur, vt modo ex ſphaera lunari egrediantur, modo ſe iterum in eam immergant; talia enim corpora alio tempore tanquam ſatellitellites, alio vero tanquam planetae principales ſpectari debebunt, cuiusmodi motus quemadmodum ſaltem menti vero tantum proxime repraeſentari queat, nequaquam adhuc intelligere licet. Si enim talia corpora in ſyſtemate noſtro ſolari occurrerent, eorum motus nobis adhuc penitus foret ignotus, ita vt eius loca in coelo nunquam ſine craſſiſſimo errore praedicere valeremus.

§. 4. His ſummis difficultatibus perpenſis, quilibet facile agnoſcet, quam diu in tanta ignoratione circa huiusmodi motus verſabimur, nos nullo modo ſperare poſſe, vt vnquam ad accuratam cognitionem omnium perturbationum, quibus vel planetae primarii, vel ſatellites revera premuntur, pertingere valeamus. Quamdiu enim nobis impoſſibile manebit, motum alius Lunae, quae ad diſtantiam vel duplo, vel triplo, vel adeo quadruplo maiorem circa terram reuolueretur, perſcrutari, nullo modo perfectam cognitionem omnium inaequalitatum verae Lunae aſſequi poterimus. Simili modo quoniam, ſi inter orbitas Iouis et Saturni exiſteret planeta primarius, eius motus nobis plane futurus eſſet imperſcrutabilis, hinc maniſeſto ſequitur, etiam nullam perfectam cognitionem omnium perturbationum, quae in motu Saturni obſeruantur, exſpectari poſſe.

§. 5. Haec autem tanta impedimenta nullo modo ſuperari poterunt, niſi maxima incrementa in ſcientiam noſtram analyticam inferantur. Cum enim omnes motus, quantumis fuerint perturbati, nunc quidem ſine vlla difficultate aequationibus analyticis comprehendi queant, totum negotium ad idoneam harum aequationum reſolutionem

reuo-

reuoluitur. Ad hoc autem tanta incrementa deſiderantur, qualia vix adhuc, vel ne vix quidem, ſperari poſſe videntur. Interim tamen nullum eſt dubium, ſi talis motus reuera in mundo exiſteret, quem per longum temporis ſpatium nobis obſeruare licuiſſet, quin Aſtronomi in eiusmodi artificia incidiſſent, quibus vero ſaltem proxime talem motum ad certam legem quodammodo reuocare potuiſſent. Hanc ob rem ſi ſatis longam ſeriem talium obſeruationum, quales eiusmodi corpus ſuppeditaret, ob oculos exponere poſſemus, earum contemplatio vſu certe non eſſet caritura, eaque fortaſſe tutiſſimam viam nobis aperiret ad pleniorem cognitionem huiusmodi motuum appropinquandi.

§. 6. Quanquam autem vix vlla ſpes ſupereſt, aequationes analyticas, quibus tales motus continentur, perfecte reſoluendi: tamen iam pridem eiusmodi methodum propoſui, cuius beneficio huiusmodi motus quantumvis irregulares quaſi gradatim ita proſequi licet, vt ſi modo pro certo quodam tempore talis corporis tam locum quam motum nouerimus, inde ad quaeuis temporum interualla ſequentia verus locus ſatis exacte determinari queat. Haec igitur methodus nobis iſtum eximium vſum praeſtare poteſt, vt ſi talis motus exiſteret, longiſſimam ſeriem obſeruationum exhibere valeamus, quibus per longum temporis ſpatium vera loca talis corporis in coelo definiantur, quarum ergo contemplatio nos ad pleniorem cognitionem manuducere poterit.

§. 7. Vt igitur hanc viam ineamus et impedimenta minoris momenti remoueamus, fingamus terram in

 plano

plano eclipticae motu vniformi circa Solem in circulo reuolui, cuius radium vnitate exprimamus, eiusque motus commodissimam temporis mensuram suppeditabit. Deinde massam Solis pariter vnitate designemus, cuius respectu massa terrae sit $= m$, existente $m = \frac{3}{1000000}$. Iam in ipso plano eclipticae moueatur tale corpus lunare, cuius motum scrutamur, atque ad certum quodpiam tempus, dum

Tab. XI. Fig. 1. terram in T quiescentem spectamus, sit centrum Solis in S, existente $TS = 1$, Luna autem, quam consideramus, in L, cuius distantiam a Terra vocemus $TL = v$, et angulus $ATL = \Phi$, pro Sole vero ponatur angulus $ATS = \theta$, qui ergo nobis mensuram temporis praebebit, cuius elementum $d\theta$ in sequentibus aequationibus constans est assumtum. Praeterea vero ponamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$ et distantiam Lunae a Sole $LS = u$, ita vt sit

$$u = \sqrt{(1 - 2v\,\text{cos.}\,\eta + vv)},$$

quibus positis motus quaesitus istius Lunae L binis sequentibus aequationibus exprimetur:

$$1^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - v\,d\Phi^2)}{d\theta^2} = \frac{m}{vv} - \text{cos.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{v}{u^3}.$$

$$2^\circ.\ \frac{(1+m)(2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi)}{d\theta^2} = \text{sin.}\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

vti scilicet in praecedente dissertatione ostendimus.

§. 8. Hae aequationes tam sunt generales, vt aeque pateant ad omnia corpora, quae tam intra sphaeram lunarem quam extra in plano eclipticae reuoluuntur. Quoniam autem hic nobis potissimum est propositum in motus lunares inquirere, ita vt distantia v nunquam superet partem centesimam distantiae Solis, siue $\frac{1}{100}$, satis ex-

exacte statuere licebit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3\,v$ cos. η, et quoniam fractio $m = \frac{3}{1000000}$ est quasi euanescens, loco $1 + m$ tuto scribere licebit 1, vnde binae aequationes modo traditae sequentes formas adipiscentur:

$$\text{I. } \frac{ddv - vd\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v\,(1 + 3 \text{ cos. } 2\,\eta) \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} = -\tfrac{3}{2}v \text{ sin. } 2\,\eta,$$

ex quibus quemadmodum motum istius Lunae gradatim prosequi queamus, vt ad quoduis tempus, postquam fuerit in L, eius locus innotescat, hic imprimis explicemus.

§. 9. Sumamus igitur pro certa epocha istam Lunam fuisse in L, cuius tam distantia a Terra $TL = v$ quam angulus $ATL = \Phi$ fuerit cognitus, perinde ac locus Solis, seu angulus $ATS = \theta$, quo simul tempus istius epochae definiatur, si quidem ponamus ipso motus initio Solem fuisse in A, Lunam vero in I. Hinc igitur pro epocha assumta etiam datus erit angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$. Praeterea quia etiam motus huius Lunae in L vt cognitas spectatur, etiam dabitur tam eius motus, quo a Terra recedit, cuius celeritas est $\frac{dv}{d\theta}$, quam eius motus angularis, cuius celeritas celeritas est $\frac{d\Phi}{d\theta}$, quae binae celeritates cum sint cognitae, ponamus $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, et cum hinc sit

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta} \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{dq}{d\theta},$$

his valoribus substitutis nostrae ambae aequationes erunt

$$\text{I}^{\circ}.\ \frac{dp}{d\theta} - qqv = -\frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v\,(1 + 3 \text{ cos. } 2\,\eta)$$

$$\text{II}^{\circ}.\ 2pq + \frac{vdq}{d\theta} = -\tfrac{3}{2}v \text{ sin. } 2\,\eta.$$

Hinc iam cognoscimus mutationes momentaneas, quas litterae

terae p et q accipiunt; erit enim

$$\frac{dp}{d\theta} = qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\cos. 2\eta) \text{ et}$$

$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\sin. 2\eta,$$

dum ipsarum quantitatum v et Φ mutationes momentaneae sunt $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$.

§. 10. Ex cognitis autem his mutationibus, seu differentialibus primis, etiam differentialia altiora elici poterunt. Cum enim sit $d\eta = d\Phi - a\theta$, erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, vnde differentiando reperiemus

$$\text{I}^\circ.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = pqq + 2qv\frac{dq}{d\theta} + \frac{2mp}{v^3} + \frac{1}{2}p(1 + 3\cos. 2\eta) - 3v(q-1)\sin. 2\eta$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -\frac{2q}{v}\frac{dp}{d\theta} - \frac{2p}{v}\frac{dq}{d\theta} + \frac{2ppq}{vv} - 3(q-1)\cos. 2\eta,$$

quae expressiones reducuntur ad sequentes:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = -3pqq + \frac{2mp}{v^3} + \frac{1}{2}p(1 + 3\cos. 2\eta) - 3v(2q-1)\sin. 2\eta$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -q(2qq+1) + \frac{2mq}{v^3} + \frac{6ppq}{vv} + \frac{3p\sin. 2\eta}{v.} - 3(2q-1)\cos. 2\eta.$$

Similique modo etiam altiora differentialia, si opus fuerit, definiri poterunt.

§. 11. His autem differentialibus inuentis, tam situs quam motus nostrae Lunae, quae nunc erat in L, ad datum quoduis tempus hinc elapsum, quod sit $= \omega$, assignari poterit. Si enim pro tempore ab initio elapso $\theta + \omega$, quod designemus per θ', quatuor quantitates situm et motum continentes ponantur p', q', v' et Φ', eas tales

tales functiones ipsius $\theta + \omega$ esse oportet, quales ipsae quantitates primitiuae p, q, v et Φ erant functiones ipsius θ tantum; vnde ex principiis calculi differentialis constat fore:

$$v' = v + \omega \frac{dv}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddv}{1.2.d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 v}{1.2.3 d\theta^3} + \frac{\omega^4 d^4 v}{1.2.3.4.d\theta^4} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, si loco $\frac{dv}{d\theta}$ scribatur p, habebitur

$$v' = v + \omega p + \frac{\omega^2 dp}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddp}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 p}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

atque eodem modo tres reliquae quantitates definientur:

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \frac{\omega^2 dq}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddq}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 q}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\omega dp}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddp}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 p}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\omega dq}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddq}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 q}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

§. 12. Si has series in infinitum extendere vellemus, ad quoduis tempus ω, post epocham elapsum, quantumuis fuerit magnum, tam situm quam motum Lunae assignare valeremus, quod quidem laborem infinitum exigeret. Verum etiam manifestum est, has series eo promtius conuergere, quo minus accipiatur interuallum temporis ω; quam ob causam ipsi maiorem valorem tribui non conueniet, quam vt sufficiat, tres tantum, vel ad summum quatuor terminos illarum serierum sumsisse; tum quouis casu haud difficulter diiudicabitur, quovsque hoc temporis interuallum ω augere liceat, ne error sensibilis sit metuendus. Postquam autem hoc modo ad tempus $\theta + \omega$ fuerit peruentum, in eo constituatur noua epocha, a qua pari modo vlterius per simile tempus ω progredi licebit; haecque operationes, quoties lubuerit, repeti poterunt. Vnde perspicuum est, hac ratione plurima Lunae loca per satis mag-

magnum temporis interuallum assignari, ac talem obseruationum seriem pro lubitu vlterius continuari posse.

§. 13. Quoniam inuestigatio altiorum differentialium binarum quantitatum p et q satis molestum calculum postulat et mox ad enormem terminorum numerum excrescit: hoc labore facile supersedere poterimus, si modo interuallo temporis ω aliquanto minorem valorem tribuamus; tum autem istas operationes pluries repetere oportebit. Neque vero etiam necesse erit, in his determinationibus summum rigorem obseruare, quasi talis motus in coelo reuera existeret; sed quoniam nostrum institutum eo tantum dirigitur, vt ex contemplatione satis longae seriei huiusmodi obseruationum certum quendam ordinem et legem, quasi diuinando eliciamus: parum referet, vtrum loca assignata summo rigore fuerint computata, siue parumper a veritate discrepauerint. Qui ergo talem laborem suscipere voluerit, haud exiguum fructum in Astronomiam attulisse erit censendus.

Exemplum.

§. 14. Ponamus primo initio, cum Sol versaretur in A, corpus nostrum lunare in ipso plano eclipticae ad distantiam a Terra $TI = 0,008$ ita normaliter ad directionem TA fuisse proiectum, vt eius motus angularis circa Terram duplo rapidior fuerit quam motus Solis, atque ex hac determinatione status naturalis inuestigabimus motum, quo hoc corpus deinceps est progressurum. In hoc igitur tempore primam epocham constituamus, pro qua propterea habebimus sequentes conditiones:

1°.

1°. Longitudinem Solis $\theta = 0$, eius distantia a Terra perpetuo manente $= 1$.

2°. Longitudinem Lunae $\Phi = 0$, ideoque etiam $\eta = 0$.

3°. Distantiam Lunae a Terra $v = 0,008$, ideoque $l\,v = 7,9030900$.

4°. Quia prima motus directio in puncto I erat ad rectam T A normalis, habebimus $\frac{d v}{d \theta} = p = 0$.

5°. Quia motum angularem Lunae impressum duplo celeriorem statuimus quam motum Solis, erit $\frac{d \Phi}{d \theta} = q = 2$.

§. 15. His iam pro prima epocha constitutis, ex formulis nostris supra inuentis erit:

$$1°.\ \frac{d p}{d \theta} = 4.0,008 - \frac{m l}{v v} + 2 v; \quad 2°.\ \frac{d q}{d \theta} = 0.$$

Pro priore autem formula erit $4 v = 0,032$; deinde ob $m = \frac{3}{1000000}$, ideoque $l\,m = 4,4771213$, erit

$$\frac{m}{v v} = 0,046875 \text{ et } 2 v = 0,016,$$

vnde habebimus $\frac{d p}{d \theta} = 0,001125$. Simili modo pro differentialibus secundis ipsarum p et q habebimus

$$3 p q q = 0; \ \frac{2 m p}{v^3} = 0; \ \tfrac{1}{2} p (1 + 3 \operatorname{cof.} 2 \eta) = 0;$$

$$3 v (2 q - 1) \operatorname{fin.} 2 \eta = 0, \text{ ideoque } \frac{d d p}{d \theta} = 0.$$

Tum vero ob

$$- q (2 q q + 1) = - 18; \ \frac{2 m q}{v^3} = 23,43750;$$

$$\frac{6 p p q}{v v} = 0; \ \frac{3 p \operatorname{fin.} 2 \eta}{v} = 0;$$

$$- 3 (2 q - 1) \operatorname{cof.} 2 \eta = - 9, \text{ erit}$$

$$\frac{d d q}{d \theta^2} = - 3,5625.$$

§. 16. Hinc iam, poſtquam elapſum fuerit tempus $= \omega$, pro ſtatu corporis lunaris habebimus ſequentes determinationes:

1°. $\theta' = \omega$.

2°. $v' = 0,008 + \omega . 0 + \omega^2 . 0,000562 + \frac{1}{6}\omega^3 . 0$.

3°. $\Phi' = 0 + 2\omega + \frac{1}{2}\omega^2 . 0 - \omega^3 . 0,59375$.

4°. $p' = 0 + \omega . 0,001125 + \frac{1}{2}\omega^2 . 0$.

5°. $q' = 2 + \omega . 0 - \omega^2 . 1,78125$.

Vbi iam pro ω quaeuis tempora, dummodo ſatis fuerint exigua, aſſumere licebit. Quia autem tempora per ipſum motum Solis, ſeu angulum θ exhibere inſtituimus, per ſingulos gradus progrediemus, ponendo ſucceſſiue $\omega = 1°$; $\omega = 2°$; $\omega = 3°$; etc. vbi notetur tempus vni gradui reſpondens fore $= 1^d, 0^h, 21'$. In ſubſidium autem calculi apponamus valores ipſius ω in partibus radii, ſimulque logarithmos adiungamus.

	$\omega = 1°$.	$\omega = 2°$.	$\omega = 3°$.	$\omega = 4°$.	$\omega = 5°$.
ω.	0,017452	0,034904	0,052356	0,069808	0,087260
$l\,\omega$.	8,241845	8,542875	8,718966	8,843905	8,940815
$l\,\omega^2$.	6,483690	7,085750	7,437932	7,687810	7,881630.
$l\,\omega^3$.	4,725535	5,628625	6,156898	6,531715	6,822445

§. 17. His praemiſſis facile erit ad ſingula tempora per 1°, 2°, 3°, 4°, etc. expreſſa et ab epocha elapſa ſtatum noſtrae Lunae aſſignare; vbi tantum notetur, quoniam longitudo Φ in gradibus et minutis exprimi debet, formulam inuentam in genere ita eſſe repraeſentandam:

$$\Phi' = \Phi + \omega \left(q + \tfrac{1}{2}\omega . \tfrac{dq}{d\theta} + \tfrac{1}{6}\omega^2 . \tfrac{ddq}{d\theta^2} + \text{etc.}\right)$$

at-

atque in membro posteriore factorem ω in gradibus, alterum vero factorem vncinulis inclusum in partibus radii exprimi debere. Quo obseruato ab ipsa epocha per singulos gradus progrediamus, ac statum nostrae Lunae in sequenti tabula repraesentemus:

	$\omega = 1°$.	$\omega = 2°$.	$\omega = 3°$.	$\omega = 4°$.	$\omega = 5°$.
θ'.	$1°, 0'$	$2°, 0'$	$3°, 0'$	$4°, 0'$	$5°, 0'$
Φ'.	$2°, 0'$	$3°, 59'$	$5°, 59'$	$7°, 59'$	$9°, 58'$
η'.	$1°, 0'$	$1°, 59'$	$2°, 59'$	$3°, 59'$	$4°, 58'$
v'.	0,008000	0,008000	0,008001	0,008003	0,008004
p'.	0,000019	0,000039	0,000059	0,000078	0,000098
q'.	1,999458	1,997830	1,995117	1,991319	1,986437

Videtur igitur in hac epocha prima satis tuto ad tempus $\omega = 5°$ progredi licere, neque a terminis neglectis, seu altioribus potestatibus ipsius ω vllum notabilem errorem esse metuendum; hanc ob rem cum primam epocham ad tempus $\theta = 0$ constituerimus, sequentes epochas ad tempora $\theta = 5°$; $\theta = 10°$; etc. constituamus.

Epocha secunda.

§. 18. Secunda igitur epocha constituatur ad tempus $\theta = 5°$; pro qua ergo elementa nostra erunt:

$\theta = 5°, 0'$	$v = 0,008004$	$lv = 7,903307$
$\Phi = 9°, 58'$	$p = 0,000098$	$lp = 5,991226$
$\eta = 4°, 58'$	$q = 1,986437$	$lq = 0,297075$
$2\eta = 9°, 56'$		

Nunc pro differentialibus primis dp et dq quaerantur sequentes valores:

$q q v = 0,031438$	$\frac{2pq}{v} = 0,048530$
$\frac{m}{vv} = 0,046875$	$\frac{3}{2}$ fin. $2\eta = 0,258753$
$\frac{1}{2} v = 0,004002$	$\frac{3}{2} v$ cof. $2\eta = 0,011826$

vnde colligitur fore

$$\frac{dp}{d\theta} = 0,000391 \text{ et } \frac{dq}{d\theta} = -0,307283.$$

Pro differentialibus autem fecundis quaeri oportet fequentes valores:

$3pqq = 0,001154$	$q(2qq+1) = 17,555237$
$\frac{2mp}{v^3} = 0,001146$	$\frac{2mq}{v^3} = 23,19022$
$\frac{1}{2} p = 0,000049$	$\frac{6ppq}{vv} = 0,001782$
$\frac{3}{2} p$ cof. $2\eta = 0,000144$	$\frac{3p\,fin.\,2\eta}{v} = 0,006336$
$6vq$ fin. $2\eta = 0,016417$	$3(2q-1)$ cof. $2\eta = 8,78490$
$3v$ fin. $2\eta = 0,004142$	

vnde colligitur

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -0,012090 \text{ et } \frac{ddq}{d\theta^2} = -3,141799.$$

Quodfi iam iterum fucceffiue pro ω fcribamus 1°, 2°, 4°, 5° prodit fequens tabella:

	$\omega = 1°.$	$\omega = 2°.$	$\omega = 3°.$	$\omega = 4°.$	$\omega = 5°.$
Φ'.	11°, 57′	13°, 55′	15°, 53′	17°, 51′	19°, 48′
θ'.	6°, 0′	7°, 0′	8°, 0′	9°, 0′	10°, 0′
η'.	5°, 57′	6°, 55′	8°, 53′	9°, 51′	10°, 48′
v'.	0,008006	0,008007	0,008009	0,008011	0,008013
p'.	0,000103	0,000104	0,000102	0,000096	0,000086
q'.	1,980598	1,973793	1,966053	1,957349	1,947691

§. 19. Si hos calculos attentius confideremus, deprehendimus, valores ex formulis differentialibus fecundis

ddp

$\frac{ddp}{d\theta^2}$ et $\frac{ddq}{d\theta^2}$ oriundos tum demum notabiles euasisse, vbi sumsimus $\omega = 5°$, quippe qui pro $\omega = 3°$, tam parui prodierunt, vt tuto negligi potuerint. Quam ob rem, si interualla non vltra $\omega = 3°$ constituere velimus, formulas differentiales secundi gradus sine errore praetermittere licebit; vnde totus calculus mirifice contrahetur. Nam quoniam inuestigatio istarum formularum haud parum prolixum calculum postulat, hoc modo labor magnopere subleuabitur; quamquam enim tum numerus epocharum multiplicari debet, tamen totum negotium multo minori opera confici poterit.

§. 20. Quodsi ergo pro initio cuiuspiam epochae habeantur primo anguli θ et Φ, vnde prodit $\eta = \Phi - \theta$, vna cum quantitatibus v, p et q, inde statim colligantur valores:

$$\frac{dp}{dv} = qqv - \frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v(1 + 3\cos. 2\eta) \text{ et}$$
$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \tfrac{3}{2}\sin. 2\eta,$$

quibus inuentis erit pro sequente epocha, vbi $\theta' = \theta + \omega$.

1°. $\Phi' = \Phi + \omega(q + \tfrac{1}{2}\omega\frac{dq}{d\theta})$;

2°. $v' = v + \omega p + \tfrac{1}{2}\omega^2.\frac{dp}{d\theta}$;

3°. $p' = p + \omega\frac{dp}{d\theta}$ et

4°. $q' = q + \omega\frac{dq}{d\theta}$;

vnde si statim statuamus $\omega = 3°$, erit pro euolutione harum formularum:

$$l\,\omega = 8,718966 \text{ et } l\,\omega^2 = 7,437932,$$

vnde calculum vt supra pro epocha sequente $\theta = 10°$ expediamus.

Epocha tertia.

qua $\theta = 10^\circ$.

§. 21. Hic ergo ex iam inuentis erit

$\Phi = 19^\circ, 48'$	$v = 0,008013$	$lv = 7,903795$
$\theta = 10^\circ, 0'$	$p = 0,000086$	$lp = 5,934498$
$\eta = 9^\circ, 48'$	$q = 1,947691$	$lq = 0,289520$
$2\eta = 19^\circ, 36'$		

Hinc iam calculos in extenso hic apponamus:

Pro $\frac{dp}{d\theta}$.	Pro $\frac{dq}{d\theta}$.
$lqq = 0,579040$	$lp = 5,934498$
$lv = 7,903795$	$lq = 0,289520$
$lqqv = 8,482835$	$lpq = 6,224018$
I. $qqv = 0,030397$	$lv = 7,903795$
$lm = 4,477121$	
$lvv = 5,807590$	$l\frac{pq}{v} = 8,320223$
$l\frac{m}{vv} = 8,669531$	$\frac{pq}{v} = 0,020903$
II. $\frac{m}{vv} = 0,046723$	I. $\frac{2pq}{v} = 0,041806$
III. $\frac{1}{2}v = 0,004006$	II. $\frac{3}{2}$ fin. $2\eta = 0,503177$
$l\frac{3}{2} = 0,176091$	hinc $\frac{dq}{d\theta} = -\ 0,544983$
$lv = 7,903795$	$l\frac{dq}{d\theta} = (-)\ 9,736383$
$l\frac{3}{2}v = 8,079886$	$l\omega = 8,718966$
$l\,\mathrm{cof.}\,2\eta = 9,974077$	
$l\frac{3}{2}v\,\mathrm{cof.}\,2\eta = 8,053963$	$l\frac{\omega\,dq}{d\theta} = (-)\ 8,455349$
IV. $\frac{3}{2}v\,\mathrm{cof.}\,2\eta = 0,011323$	ergo $\frac{\omega\,dq}{d\theta} = -\ 0,028533$
Hinc sequitur	Cum nunc ob $\omega = 3$ fit

dp

$$\begin{array}{rl|l}
\frac{dp}{d\theta} = & -0,000997 & \Phi' = 19^\circ, 48' + 3\,(q + \tfrac{1}{2}\omega.\tfrac{dq}{d\theta}) \\
l\frac{dp}{d\theta} = & (-)\,6,998695 & \text{erit} \\
 & & \Phi' = 25^\circ, 36'. \\
l\omega = & 8,718966 & \text{Deinde reperitur} \\
l\omega^2 = & 7,437932 & q' = 1,919158. \\
 & & \text{Praeterea erit} \\
l\frac{\omega\,dp}{d\theta} = & (-)\,5,717661 & v' = 0,008016 \text{ et} \\
l\frac{\omega^2\,dp}{d\theta} = & (-)\,4,436627 & p' = 0,000034 \\
\text{ergo } \frac{\omega\,dp}{d\theta} = & -0,0000522 & \\
\frac{\omega^2\,dp}{d\theta} = & -0,0000027 &
\end{array}$$

Quocirca in fine huius epochae, pro quo est $\theta = 13^\circ$ reliqua elementa ita se habent:

$$\begin{array}{l|l}
\Phi' = 25^\circ, 36' & p' = 0,000034 \\
v' = 0,008016 & q' = 1,919158.
\end{array}$$

Quarta epocha.

vbi $\theta = 13^\circ$.

§. 22. Elementa pro initio huius epochae ita se habebunt:

$$\begin{array}{l|l|l}
\Phi = 25^\circ, 36' & v = 0,008016 & l\,v = 7,903957 \\
\theta = 13^\circ, 0' & p = 0,000034 & l\,p = 5,531479 \\
\eta = 12^\circ, 36' & q = 1,191958 & l\,q = 0,283110 \\
2\eta = 25^\circ, 12' & &
\end{array}$$

Hinc iam calculus, vt supra factum est, euoluatur, iterumque sumatur $\omega = 3^\circ$, et valores pro fine huius epochae $\theta = 16^\circ$, ita se habebunt:

$$\begin{array}{l|l}
\Phi' = 31^\circ, 18' & p' = -0,000085 \\
v' = 0,008015 & q' = 1,884868.
\end{array}$$

Quinta

Quinta epocha.

vbi $\theta = 16°$.

§. 23. Elementa pro initio huius epochae ſunt ſequentia:

$\Phi = 31°, 18'$	$v = 0,008015$	$lv = 7,903903$
$\theta = 16°, 0'$	$p = -0,000085$	$lp = (-) 5,929419$
$\eta = 15°, 18'$	$q = 1,88486$	$lq = 0,275281$
$2\eta = 30°, 36'$		

Hinc iam pro fine huius epochae ſequentes prodierunt valores:

$\Phi' = 36°, 53'$	$p' = -0,000287$
$v' = 0,008006$	$q' = 1,846984.$

Sexta epocha.

vbi $\theta = 19°$.

§. 24. Elementa pro initio huius epochae ita ſe habebant:

$\Phi = 36°, 53'$	$v = 0,008006$	$lv = 7,903415$
$\theta = 19°, 0'$	$p = -0,000287$	$lp = (-) 6,457882$
$\eta = 17°, 53'$	$q = 1,846984$	$lq = 0,266463$
$2\eta = 35°, 46'$		

Hinc iam pro fine huius epochae valores ita ſe habebunt:

$\Phi' = 42°, 33'$	$p' = -0,000487$
$v' = 0,007993$	$q' = 1,821005$

hocque modo, quousque lubuerit, progredi licebit.

§. 25. Quae hactenus computauimus, in ſequenti tabella coniunctim repraeſentemus, quo facilius progreſſio talis motus perſpici queat, vbi diſtantiam Solis a terra loco unitatis per 1000000 exprimemus.

θ	Φ	η	v	p	q
0°, 0′	0°, 0′	0°, 0′	8000	0	2, 000
1, 0	2, 0	1, 0	8000	19	1, 999
2, 0	3, 59	1, 59	8000	39	1, 997
3, 0	5, 59	2, 59	8001	59	1, 995
4, 0	7, 59	2, 59	8003	78	1, 991
5, 0	9, 58	4, 58	8004	98	1, 986
6, 0	11, 57	5, 57	8006	103	1, 980
7, 0	13, 55	6, 55	8007	104	1, 974
8, 0	15, 53	7, 53	8009	102	1, 966
9, 0	17, 51	8, 51	8011	96	1, 957
10, 0	19, 48	9, 49	8013	86	1, 948
11, 0	21, 44	10, 44	8014	69	1, 938
12, 0	23, 40	11, 40	8015	51	1, 928
13, 0	25, 36	12, 36	8016	34	1, 919
14, 0	27, 30	13, 27	8016	− 5	1, 907
15, 0	29, 25	14, 25	8016	− 45	1, 896
16, 0	31, 18	15, 18	8015	− 85	1, 884
17, 0	33, 10	16, 10	8014	− 152	1, 872
18, 0	35, 2	17, 2	8010	− 220	1, 859
19, 0	36, 53	17, 53	8006	− 287	1, 847
20, 0	38, 43	18, 43	8006	− 387	1, 834
21, 0	40, 33	19, 33	7993	− 487	1, 821
22, 0	42, 22	20, 22	7983	− 588	1, 808
23, 0	44, 10	21, 10	7972	− 726	1, 795
24, 0	45, 57	21, 57	7959	− 864	1, 783
25, 0	47, 44	22, 44	7942	− 1002	1, 770
26, 0	49, 30	23, 30	7924	− 1184	1, 759
27, 0	51, 15	24, 15	7901	− 1366	1, 749
28, 0	52, 59	24, 59	7876	− 1549	1, 738
29, 0	54, 43	25, 43	7847	− 1776	1, 730
30, 0	56, 26	26, 26	7815	− 2003	1, 722

Hunc calculum tantum ſpeciminis loco hic appoſuimus. Optandum autem foret, vt quis laborem ſuſciperet, hanc ſeriem maiori cura multo longius vsque ad integram reuolutionem, atque adeo duas pluresue proſequendi, tum enim facilius iudicari poterit, vtrum certus ordo in progreſſione horum numerorum detegi queat, nec ne.

§. 23. Quanquam in hoc exemplo diſtantia v ab initio creſcere incepit, tamen mox maximum valorem aſſequitur, a quo deinceps iterum decreſcit; ſicque nullum eſt dubium, quin tale corpus totum ſuum motum intra ſphaeram lunarem ſit peracturum. Sin autem hoc corpus ab initio in I oblique fuiſſet proiectum, tum euidens eſt, id mox e ſphaera lunari egreſſurum et in regionem planetarum primariorum tranſiturum fuiſſe; hoc igitur modo tandem ad tantam diſtantiam a terra remouebitur, vt ea non amplius reſpectu diſtantiae Solis tanquam infinite parua ſpectari queat, vnde etiam eius diſtantia a Sole quam poſuimus $= u = (1 - 2\, v$ coſ. $2\, \eta)$ non amplius per formulam $1 + v$ coſ. η, exprimi poterit, ſed ad plures terminos progredi oportebit. Quin etiam fieri poterit, vt hoc corpus ad tantam diſtantiam a Terra recedat, vt iſta formula non amplius per ſeriem conuergentem exhiberi queat, ſicque neceſſe erit ipſam litteram ω in calculo retinere, id quod ſemper continget, quando corpus motum ſuum extra ſphaeram lunarem abſoluit. Quemadmodum igitur his caſibus motum proſequi conueniat, in ſequenti problemate doceamus.

Proble-

Problema.

Si daretur corpus coeleste, quod non procul extra sphaeram lunarem fuisset proiectum, eius motum continuo prosequendo inuestigare.

Solutio.

§. 24. Cum igitur tale corpus non amplius tanquam satelles Terrae considerari posset, eius motum potius ad Solem referri conueniet. Constituto igitur centro Solis in puncto fixo S, assumamus iterum Terram circa Solem motu vniformi in circulo AT reuolui, cuius radium $SA = ST$ vnitate designemus, atque hic iterum angulum $AST = \theta$, quem quouis tempore descripserit, vt ante pro mensura temporis accipiamus, maneatque pariter vt ante massa Solis $= 1$, cuius respectu vocetur massa Terrae $= m$, sicque hoc casu in formulis supra datis has duas massas 1 et m inter se permutari oportebit. Tab. XI. Fig. 2.

§. 25. Ponamus nunc, dum Terra egrediebatur ex puncto A, corpus quodpiam coeleste in I fuisse quomodocunque proiectum, ita vt distantia SI non multo fuerit minor maiorue quam distantia $SA = 1$; vbi tamen assumimus, distantiam AI maiorem fuisse radio sphaerae lunaris, quem censere possumus $= \frac{1}{100}$; tum vero, elapso tempore quo terra angulum $TSA = \theta$ confecerit, istud corpus in ipso plano eclipticae peruenerit in L, voceturque nunc eius distantia a Sole $SL = v$, eiusque longitudo seu angulus $ASL = \Phi$, sitque vt ante breuitatis gratia angulus $TSL = \Phi - \theta = \eta$; at vero distantiam a Terra vocemus nunc $LT = u$, ita vt sit $u = \sqrt{(1 - 2v \cos.\eta + vv)}$

 vbi

vbi cum distantia v non multum discrepet a distantia $= 1$, euolutio huius formulae in seriem non amplius locum habere poterit, quippe quae non amplius foret conuergens. Quod quo clarius appareat, haec formula ita repraesentetur: $u = \sqrt{(1 + vv)}\sqrt{(1 - \frac{2v \cos. \eta}{1 + vv})}$, vbi cum coefficiens $\frac{2v}{1 + vv}$ non multum discrepet ab 1, notum est talem formulam $\sqrt{(1 \pm n \cos. \eta)}$, in qua propemodum sit $n = 1$, nullo modo in eiusmodi seriem conuerti posse, quae pro omnibus angulis η conuergat.

§. 26. Quoniam igitur hic ipsam quantitatem u in calculo retinere coacti sumus, formulae §. 7. pro motu determinando ad hunc casum accommodabuntur, si modo ambae massae 1 et m inter se permutentur. Hinc igitur binae aequationes motum quaesitum definientes ita se habebunt:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - vd\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} - m \cos. \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3}$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{(1+m)(2dvd\Phi + vdd\Phi)}{d\theta^2} = m \sin. \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right)$$

vbi cum sit $m = \frac{1}{1000000}$, loco $1 + m$, tuto scribi poterit 1. Verum vt hae formulae etiam valere queant, si loco terrae substituatur alius planeta primarius, veluti Iupiter, cuius massa multo est maior, retinebimus multiplicatorem $(1 + m)$. Calculus enim perpetuo eodem modo institui debebit pro quouis alio planeta loco terrae assumto, si modo eius motum tanquam circularem et vniformem spectare velimus.

§. 27. Quodsi iam motum corporis L per interualla satis exigua, vt ante fecimus, prosequi velimus, pro eius

eius loco quocunque L quantitates v et Φ cum angulo θ pro cognitis habebimus, vnde simul erit $\eta = \Phi - \theta$. Praeterea vero, quia etiam motum corporis in L vt cognitum spectamus, statuamus vt ante $\frac{dv}{d\theta} = p$; et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, vnde erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, quibus positis ambae nostrae aequationes erunt.

$$\text{I}^\circ.\ (1+m)\left(\frac{dp}{d\theta} - vqq\right) = -\frac{1}{vv} - m\,\text{cos}.\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3} \text{ et}$$

$$\text{II}^\circ.\ (1+m)\left(2pq + \frac{vdq}{d\theta}\right) = m\,\text{sin}.\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

vnde valores binarum formularum differentialium $\frac{dp}{d\theta}$ et $\frac{dq}{d\theta}$ definiri poterunt.

§. 28. His autem valoribus inuentis, quoniam praesens tempus per angulum θ exprimimus, postquam hinc elapsum fuerit tempus $= \omega$, pro tempore $\theta + \omega$ valores eorundem elementorum, quos per v', θ', Φ', p' et q' designemus, sequenti modo determinabuntur

$$\theta' = \theta + \omega$$

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \tfrac{1}{2}\omega^2 . \frac{dq}{d\theta},$$

$\eta' = \Phi' - \theta'$. Simili modo erit

$v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dp}{d\theta}$; ac denique etiam

$$p' = p \frac{\omega dp}{d\theta} \text{ et } q' = q + \frac{\omega dq}{d\theta}$$

si modo interuallum ω non nimis magnum accipiatur, cuius limitem quouis casu facile diiudicare licebit, quem vt vidimus plerumque vsque ad 3° augere licebit. Imprimis autem hinc necesse erit valorem u' colligere, quip-

 pe

pe qui ſequente interuallo erit

$$u' = \sqrt{(1 - 2v' \operatorname{cof.} \eta' + v'v')},$$

quibus obſeruatis motum talis corporis quousque lubuerit proſequi licebit; calculus autem ob formulam irrationalem u aliquanto moleſtior euadet quam ſupra. Facile autem intelligitur, hinc motus maxime intricatos reſultare poſſe, quos nullo plane modo adhuc cognito ſaltem vero proxime ad ordinem quendam reuocare licebit.

RE-