

DE

PLVRIMIS QVANTITATIBVS
TRANSCENDENTIBVS,

QVAS NVLLO MODO PER FORMVLAS INTEGRA-
LES EXPRIMERE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

Formulae integrales, quarum integrationem per quantitates algebraicas expedire non licet, vulgo tanquam vnicus fons omnium quantitatū transcendentium spectari solent. Ita enim ex formula integrali $\int \frac{dx}{x}$ nati sunt logarithmi, et ex formula $\int \frac{dx}{1+x^2}$ arcus circulares; quae quantitates, etiam si transcendentes, nunc quidem in Analysis ita sunt receptae, vt aequae facile tractari queant ac ipsae quantitates algebraicae. Praeterea vero etiam quantitates, quae rectificationem sectionum conicarum innoluunt, a Geometris iam ita sunt exploratae, vt problemata, quae ad eas fuerint perducta, pro perfecte solutis haberi soleant. Continentur autem istae quantitates transcendentes in huiusmodi formulis integralibus: $\int dx \sqrt{\frac{a+gxx}{b+kxx}}$, et quotiescunque

que aliae quantitates transcendentes occurrunt, eae semper per quadraturas certarum linearum curvarum repraesentari posse censentur; quo pacto etiam ad formulas integrales reducuntur, quae, vtcunque fuerint complicatae, tamen veros valores talium quantitatum transcendentium exprimere aestimantur.

§. 2. Interim tamen obseruavi, innumerabilia exhiberi posse quantitatum transcendentium genera, quae nullo modo per formulas integrales exprimi queant, etiam si earum valores proxime veros plerumque satis facile definire liceat. Oriuntur autem huiusmodi quantitates potissimum ex talibus seriebus infinitis, quarum summae nullo adhuc modo ad formulas integrales reuocari potuerunt, inter quas imprimis notatu digna occurrit ista series infinita a geometrica parum discrepans:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \text{etc.}$$

quarum fractionum denominatores unitate deficiunt a potestatibus binarii, cuius summa vero proxime haud difficulter assignatur. Facile autem intelligitur, eam neque esse rationalem, neque ad numeros irracionales referri posse; tum vero etiam satis certum videtur, eam neque per logarithmos, neque per arcus circulares exprimi posse. Interim tamen nulla adhuc via patet, eiusmodi formulam integram inuestigandi, cuius valor summam istius seriei exacte exhiberet. Quod si huius seriei singuli termini more solito in series geometricas conuertantur, notatu dignum est, quod eius summa per sequentes formulas repraesentari possit:

$$\frac{1}{2^{xx}} + 2 \int \frac{1}{2^{xx+x}} + 2 \int \frac{1}{2^{xx+2x}} + 2 \int \frac{1}{2^{xx+3x}} + \text{etc.}$$

vbi

vbi $\int \frac{1}{2^x x}$ denotat summam seriei infinitae, cuius terminus

indici x respondens est $\frac{1}{2^x x}$, quae ergo erit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{25}} + \text{etc.}$$

huius autem seriei summa pariter nullo modo exhiberi potest, quod idem de reliquis partibus est intelligendum. Ipsius autem seriei propositae summa proxime vera est 1,606695150, qui numerus si cuiquam quantitati cognitae, veluti logarithmo seu arcui circulari deprehenderetur aequalis, id sine dubio eximium esset inuentum.

§. 3. Quemadmodum hic a potestatibus binarii unitatem subtraximus, ita ad eas numerum indefinitum x addamus, statuamusque

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{8+x} + \text{etc.}$$

qua aequatione, si x sumatur pro abscissa, y autem pro applicata, certa linea curua exprimitur, in qua vnicam applicatam, abscissae $x=0$ respondentem, reuera assignare licet, quippe quae erit $y=2$. Pro omnibus autem reliquis abscissis applicatae erunt quantitates maxime transcendentes, quae nullis adeo formulis integralibus exprimi possidentur; ita vt natura huius curuae nulla aequatione siue differentiali siue integrali repraesentari queat. Interim tamen euidentis est, abscissis $x=-1$, $x=-2$, $x=-4$, $x=-8$, $x=-16$, etc., applicatas conuenire infinite magnas; sumto autem $x=\infty$ applicatas esse euanturas.

§. 4. Hac aequatio generalior reddi potest, si loco 2 assumatur alius quicumque numerus a , ita vt sit

$$y = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{a+x} + \frac{x}{a^2+x} + \frac{x}{a^3+x} + \frac{x}{a^4+x} + \text{etc.}$$

vbi absciffae $x = 0$ respondet applicata $y = \frac{a}{a-1}$, reliquae vero omnes iterum erunt maxime transcendentis. Evidens autem est, si sumeretur $a = 1$, omnes applicatas futuras esse infinitas, nisi forte absciffa x capiatur infinita. Quemadmodum hic omnibus fractionibus dedimus signum $+$, ita quoque alternari poterunt, vt fit

$$y = \frac{x}{1+x} - \frac{x}{a+x} + \frac{x}{a^2+x} - \frac{x}{a^3+x} + \frac{x}{a^4+x} - \text{etc.}$$

tum autem absciffae $x = 0$ respondebit applicata $y = \frac{a}{a+1}$

Quin etiam loco x in sequentibus terminis eius potestates scribi poterunt, vt habeatur huiusmodi aequatio:

$$y = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{a+x} + \frac{x}{a^2+x^2} + \frac{x}{a^3+x^3} + \frac{x}{a^4+x^4} + \text{etc.}$$

quae vtique ita est comparata, vt natura huius curvae nulla aequatione finita siue differentiali siue integrali exprimi posse videatur.

§. 5. Praeter istas formas vero infinitae aliae, per solas potestates cuiuspiam quantitatis x procedentes, exhiberi possunt, quas pariter nullo modo ad formulas integrales reducere licet. Cum enim nullae adhuc huiusmodi series summari potuerint, nisi quarum exponentes in progressionem geometricam progrediuntur, simul atque exponentibus ipsius x aliam quamcunque progressionis legem tribuimus, earum summatio semper vires analyseos superare videtur, etiamsi formulas integrales quantumvis complicatas in subsidium vocare voluerimus. Ita si proponatur ista aequatio infinita:

$$y = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

vbi

vbi exponentes ipsius x sunt numeri trigonales, pro tali curua nulla prorsus aequatio finita per vllas formulas integrales exhiberi potest. Hic quidem statim manifestum est, si fuerit $x = 1$ vel > 1 , applicatas in infinitum auctum iri; verum si pro x sumamus valores vnitae minores, satis expedite valores applicatae y vero proxime assignari possunt: veluti si sumatur $x = \frac{1}{10}$, per fractiones decimales statim habetur:

$$y = 1, 10100100010000100000100000010000001$$

quae fractio facillime quousque libuerit continuari potest, dum numerus cifrarum inter vnitates collocandarum continuo vnitae crescit. Quanquam autem huius fractionis verus valor per nullas formulas integrales exhiberi potest: tamen eius satis exactam nobis formare possumus ideam; ita vt, si forte quadratura circuli ad talem formam reduci posset, ea pro penitus inuenta quasi esset habenda; atque hoc idem tenendum erit de omnibus aliis fractionibus decimalibus, cuius omnes figurae secundum certam legem progrediuntur, ita tamen vt nullas repolutiones periodicas contineat, quibus quippe casibus valor adeo rationaliter exhiberi posset.

§. 6. Maximi autem sine dubio momenti foret, si summa huius seriei:

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + \text{etc.}$$

finita expressione, quantumuis transcendente, exhiberi posset. Inde enim solidissima demonstratio theorematis Fermatiani peti posset, quod omnes numeri integri sint summae trium trigonalium; tantum enim opus foret cubum

illius summae in seriem resolvere, atque ostendere, tum omnes plane potestates ipsius x occurrere debere.

§. 7. Quoniam hic sumimus $x = \frac{1}{10}$, vt evolutio in fractionem decimalem facillima euaderet, haud multo difficilior erit summatio illius seriei vero proxima, si pro x fractio quaecunque vnitatem minor accipiatur. Veluti si sumatur $x = \frac{1}{2}$, vt fiat

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \text{etc.}$$

proxime per fractionem decimalem erit

$$y = 1,64163256066.$$

§. 8. Omnes autem istiusmodi series sub hac forma generali complecti licet:

$$y = A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma + D x^\delta + \text{etc.},$$

dummodo exponentes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non in arithmetica ratione progrediantur. Quaecunque enim lex inter coefficientes A, B, C , etc. statuatur, nunquam valorem ipsius y finito modo exprimi posse certum est, quaecunque etiam quadraturae in subsidium vocentur. Quod si porro huiusmodi formae per alias similis naturae vel multiplicentur vel diuidantur, vel utcunque combinentur, semper orientur eiusmodi genera quantitatum transcendentium, quae omnes formulas integrales eludere videntur. Neque vero etiam ista noua genera transcendentium comparationem inter se admittunt, vnde immensam multitudinem omnium diuerforum generum quantitatum satis admirari non possumus.

§. 9. Cum enim inter duos numeros quantumvis propinquos non solum innumerae fractiones rationales assignari queant, sed etiam infinites plures irrationales, quae omnes non solum ab illis, sed etiam inter se sunt diversae, vix credibile videtur, praeterea dari adhuc infinita quantitatum genera, quae tam inter se quam ab illis prorsus dissideant. Et cum iam infinita talia genera exhiberi queant, quae formulis integralibus exhiberi possunt, nunc adeo agnoscere sumus coacti, etiam praeter illa genera dari adhuc innumera genera quantitatum transcendentium, quae nullo modo ad illas se reduci patiantur.