

DE INDUCTIONE  
AD PLENAM CERTITVDINEM  
EVHENDA.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

Notum est, plerasque numerorum proprietates primum per solam inductionem esse obseruatas, quas deinceps Geometrae solidis demonstrationibus confirmare elaborauerunt; in quo negotio imprimis *Fermatius* summo studio et satis felici successu fuit occupatus. Maxime autem dolendum est, plures eius demonstrationes iniuria temporum penitus interiisse, quo imprimis sunt referendae eae demonstrationes, quas circa resolutionem numerorum vel in tres trigonales, vel quatuor quadrata, vel quinque pentagonales, vel sex hexagonales &c. se inuenisse asserauerat. Deinceps quidem resolutio in quatuor quadrata a celeberrimo *La Grange* et a me per certissima principia fuit eucta, neque tamen adhuc ista demonstrandi methodus ad numeros trigonales et reliquos polygonales accommodari potuit. Interim tamen istae resolutiones per solam inductionem iam ad tantum certitudinis gradum euctae

enectae sunt, vt nullis amplius dubiis locus relinqui videatur. Quin etiam ipsa inductio fortasse per certas rationes ita corroborari posse videtur, vt instar absolutae demonstrationis spectari possit, id quod circa resolutionem numerorum in quatuor quadrata et ternos trigonales ostendere conabor.

### De Resolutione Numerorum in quatuor quadrata.

§. 2. Quanquam haec resolutio iam perfecta demonstratione est munita: tamen operae pretium erit, perscrutari, quousque soli inductioni insistentes in eius veritate stabilienda pertingere valeamus. Primum igitur in subsidium vocemus insigne Theorema Fermatianum, quod omnis numerus primus formae  $4n + 1$  semper sit summa duorum quadratorum, cuius demonstrationem equidem iam dudum perfectam protuli. Hinc igitur statim sequitur, aggregatum duorum huiusmodi numerorum certo esse summam quatuor quadratorum. Aggregata autem duorum numerorum formae  $4n + 1$  praebent numeros formae  $4n + 2$ , hoc est numeros impariter pares; unde si omnes numeri formae  $4n + 2$  in duos numeros primos formae  $4n + 1$  resolui possent, etiam forent summae quatuor quadratorum, quod si fuerit ostensum, etiam semisses horum numerorum, hoc est omnes numeri impares, hincque adeo omnes plane numeri erunt summae quatuor quadratorum; quandoquidem facile demonstrari potest, si numerus quispiam  $N$  fuerit summa quatuor quadratorum, tum etiam eius duplum, quadruplum, et in genere formam  $2^m N$ , semper fore summam quatuor quadrato-

dratorum. Quin etiam, si  $N$  fuerit numerus par, veluti nostro casu, scilicet  $4n + 2$ , tunc etiam eius semissis certe est summa quatuor quadratorum.

§. 3. Tota ergo quaestio huc reducitur: Vtrum omnes numeri impariter pares, siue formae  $4n + 2$ , semper in duas huiusmodi partes, quae sint formae  $4n + 1$ , simulque numeri primi, secari possint, id quod per inductionem inuestigemus. Constitutis scilicet numeris primis forma  $4n + 1$ , qui sunt

$1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, \text{etc.}$

percurramus ordine omnes numeros formae  $4n + 2$ , et singulis adiungamus resolutionem in duos huiusmodi numeros primos:

$2 = 1 + 1$	$42 = \begin{cases} 1+41 \\ 5+37 \\ 13+29 \end{cases}$	$70 = \begin{cases} 17+53 \\ 29+41 \end{cases}$	$98 = \begin{cases} 1+97 \\ 37+97 \end{cases}$
$6 = 1 + 5$	$46 = \begin{cases} 5+41 \\ 17+29 \end{cases}$	$74 = \begin{cases} 1+73 \\ 13+61 \\ 37+37 \end{cases}$	$102 = \begin{cases} 1+101 \\ 5+97 \\ 13+89 \\ 29+73 \\ 41+61 \end{cases}$
$10 = 5 + 5$	$50 = 13+37$	$78 = \begin{cases} 5+37 \\ 17+61 \\ 37+41 \end{cases}$	$106 = \begin{cases} 5+101 \\ 17+89 \\ 53+53 \end{cases}$
$14 = 1+13$	$54 = \begin{cases} 1+53 \\ 13+41 \\ 17+37 \end{cases}$	$82 = \begin{cases} 29+53 \\ 41+41 \end{cases}$	$110 = \begin{cases} 1+109 \\ 13+97 \\ 37+73 \end{cases}$
$18 = \begin{cases} 1+17 \\ 5+13 \end{cases}$	$58 = \begin{cases} 5+53 \\ 17+41 \\ 29+29 \end{cases}$	$86 = 13+73$	
$22 = 5+17$	$62 = 1+61$	$90 = \begin{cases} 1+89 \\ 17+73 \\ 29+61 \end{cases}$	
$26 = 13+13$	$66 = \begin{cases} 5+61 \\ 13+53 \\ 29+37 \end{cases}$	$94 = \begin{cases} 1+89 \\ 17+73 \\ 29+61 \\ 37+53 \\ 5+89 \\ 41+53 \end{cases}$	
$30 = \begin{cases} 1+29 \\ 13+17 \end{cases}$	$68 = \begin{cases} 5+61 \\ 13+53 \\ 29+37 \end{cases}$		
$34 = \begin{cases} 5+29 \\ 17+17 \end{cases}$	$70 = \begin{cases} 1+67 \\ 13+57 \\ 17+53 \end{cases}$		
$38 = 1+37$	$74 = \begin{cases} 1+73 \\ 13+61 \\ 37+37 \end{cases}$		

§. 4. Talis ergo resolutio vsque ad numerum 110 feliciter successit; ac si quis hunc laborem continuare voluerit, non solum semper succedere, sed etiam continuo plures resolutiones locum habere deprehendet. Interim tamen conclusio nimis foret lubrica, si quis hinc inferre vellet, omnes plane numeros formae  $4n + 2$  semper esse resolvable in duos numeros formae  $4n + 1$ . Quamquam plerumque plures resolutiones locum inveniunt, tamen eiusmodi casus non defunt, vbi vnica tantum resolutio successit, veluti in numeris 26, 38, 50, 62, 86; vnde obici posset, non solum tales casus etiam in maioribus numeris occurrere, sed etiam fortasse euenire posse, vt talis resolutio plane falleret, etiamsi hoc eo minus verendum videtur, quo longius procefferimus. Verum tamen quoque concedere debemus, numeros primos formae  $4n + 1$  continuo fieri rariores, ita vt plures resolutiones ob hanc causam excludantur. Quin etiam, si numeri primi formae  $4n + 1$  in maximis penitus cessarent, tum talis resolutio non amplius locum habere posset. At cum iam *Euclides* demonstraverit, multitudinem numerorum primorum reuera esse infinitam, id etiam valere debet pro numeris primis formae  $4n + 1$ , qui propterea nunquam plane deficere poterunt.

§. 5. Ob istas rationes igitur huic assertioni insistere non conuenit, quod omnes plane numeri formae  $4n + 2$  resolutionem in binos primos formae  $4n + 1$  admittant, etiamsi fortasse certum sit et aliquando rigida demonstratione confirmari queat. Interim tamen manifestum est, si multitudo numerorum formae  $4n + 1$ , quibus in his resolutionibus sumus vsi, maior esset, quam hic assumimus.

simus, multo minus eiusmodi casus fore metuendos, qui talem resolutionem respuerent. Illis autem numeris omni iure adiungere poterimus omnes numeros quadratos formae  $4n + 1$ , quippe qui numeris primis formae  $4n + 1$  additi producant numeros adeo in ternos quadratos resolubiles; quamobrem ad illos numeros formae  $4n + 1$  adiciamus quoque quadrata imparia, & vsque ad centenarium nanciscemur pro nostris resolutionibus sequentes numeros:

1, 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 49, 53, 61, 73, 81, 89.

§. 6. Videamus igitur, quomodo resolutiones numerorum formae  $4n + 2$  in huiusmodi binas partes succedant.

2 = 1 + 1	34 = { 5 + 29	54 = { 1 + 53	70 = { 9 + 61
6 = 1 + 5	17 + 17	5 + 49	17 + 53
10 = { 1 + 9	38 = { 1 + 37	13 + 41	29 + 41
5 + 5	9 + 29	17 + 37	1 + 73
14 = { 1 + 13	13 + 25	25 + 29	13 + 61
5 + 9	1 + 41	5 + 53	25 + 49
18 = { 1 + 17	42 = { 5 + 37	9 + 49	37 + 37
5 + 13	13 + 29	17 + 41	5 + 73
9 + 9	17 + 25	29 + 29	17 + 61
22 = { 5 + 17	46 = { 5 + 41	1 + 61	25 + 53
9 + 13	9 + 37	9 + 53	29 + 49
26 = { 1 + 25	17 + 29	13 + 49	37 + 41
9 + 17	1 + 49	25 + 37	1 + 81
13 + 13	9 + 41	5 + 61	29 + 53
30 = { 1 + 29	50 = { 13 + 37	13 + 53	41 + 41
5 + 25	25 + 25	17 + 49	9 + 73
13 + 17		25 + 41	
		29 + 37	

$$86 = \begin{cases} 5+81 \\ 13+73 \\ 25+61 \\ 37+49 \end{cases} \quad 90 = \begin{cases} 1+89 \\ 9+81 \\ 17+73 \\ 29+61 \\ 37+53 \\ 41+49 \end{cases} \quad 94 = \begin{cases} 5+89 \\ 13+81 \\ 41+53 \\ 1+97 \end{cases} \quad 98 = \begin{cases} 9+89 \\ 17+81 \\ 25+73 \\ 37+61 \\ 49+49 \end{cases}$$

§. 7. Adiectis igitur quadratis ad nostros numeros primos formae  $4n + 1$ , omnes resolutiones tam notabiliter increuerunt, et manifesto in maioribus numeris multo magis increfcunt, vt nullo modo metuendum videatur, vt vnquam vnica tantum resolutio, multo minus plane nulla sit successura; hocque modo inductio supra facta iam tantopere est corroborata, vt solidae demonstrationi aequiparare posse videatur. Sin autem nihilominus aliquis adhuc obicere vellet, rem nondum satis esse comprobata; is tamen concedere erit coactus, si multitudinem numerorum illorum formae  $4n + 1$  insuper augere liceret, tum plane nulli amplius obiectioni locum relinqui.

§. 8. Quoniam enim numeri illi formae  $4n + 1$  ad nostrum scopum eatenus sunt accommodati, quatenus sunt vel ipsi quadrati, vel in duos quadratos resolubiles: iis insuper adiungi poterunt producta ex binis pluribusue numeris eiusdem generis; siquidem demonstratum est, productum ex duobus pluribusue numeris, qui singuli sint summae duorum quadratorum, semper etiam in duo quadrata resolui posse. Quocirca ad superiorem classem istorum numerorum adhuc adiungere poterimus sequentes:

45, 65, 85, 117, 125, 145, 153, 185, 205, 221.

F 2

His

His autem numeris adiectis manifestum est, numerum omnium resolutionum tantopere, et continuo magis augeri, vt plane impossibile sit, vt talis resolutio unquam fallere posset. Ita cum in praecedentibus resolutionibus numerus 82 tantum quatuor resolutiones habuerit, nunc sequentes locum habebunt:

82 = 1 + 81, 9 + 73, 17 + 65, 29 + 53, 37 + 45, 41 + 41. sicque duae nouae resolutiones accesserunt. Quamobrem his rationibus veritas theorematis: quod omnis numerus sit summa quatuor quadratorum, prorsus extra omne dubium posita est certenda. Interim tamen facile concedimus, hanc demonstrationem non tanta euidencia esse praeditam, quanta in rigidis demonstrationibus desiderari solet.

### De resolutione numerorum in ternos trigonales.

§. 5. Si numerus N fuerit summa trium trigonalium, hoc est  $N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$ , erit

$$8N + 3 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2.$$

Quodsi igitur demonstrari queat, omnes numeros formae  $8N + 3$  esse summas trium quadratorum, tum etiam demonstratum erit, omnes plane numeros N esse summas trium trigonalium; forma enim  $8N + 3$  nonnisi tribus quadratis imparibus aequalis esse potest. Vnde si fuerit

$$8N + 3 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2,$$

erit vicissim

$$N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2},$$

ideoque summa trium trigonalium.

§. 6. Nunc in subsidium vocemus theorema supra memoratum: quod omnis numerus primus formae  $4n+1$  fit summa duorum quadratorum, ideoque  $4n+1=aa+bb$ ; atque evidens est etiam eius duplum  $8n+2$  fore summam duorum quadratorum; est enim

$$8n+2 = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

Quod si ergo singulis his numeris  $8n+2$  addamus quadrata imparia, quae sunt formae  $8m+1$ , aggregata erunt utique summae trium quadratorum; horum autem aggregatorum forma erit  $8n+3$ ; quocirca quaestio huc redit: num omnes numeri formae  $8N+3$  ita in duas partes diuidi queant, ut vna sit quadratum impar, altera duplum numeri primi formae  $4n+1$ , quod ut in minoribus numeris saltem exploremus, ista dupla vsque ad 200 ordine exponamus:

2, 10, 26, 34, 58, 74, 82, 106, 122, 146, 178, 194, 202.

§. 7. Nunc igitur omnes numeros formae  $8N+3$  percurramus, et videamus, an omnes componi queant ex quopiam numero huius ordinis et quadrato impari, quae ad eundem terminum vsque sunt

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225,

quod tentamen ita repraesentetur:



$3 = 1 + 2$ $11 = \begin{cases} 1 + 10 \\ 9 + 2 \end{cases}$ $19 = 9 + 10$ $27 = \begin{cases} 1 + 26 \\ 25 + 2 \end{cases}$ $35 = \begin{cases} 1 + 34 \\ 9 + 26 \\ 25 + 10 \end{cases}$ $43 = 9 + 34$ $51 = \begin{cases} 25 + 26 \\ 49 + 2 \end{cases}$	$59 = \begin{cases} 1 + 58 \\ 25 + 34 \\ 49 + 10 \end{cases}$ $67 = 9 + 58$ $75 = \begin{cases} 1 + 74 \\ 49 + 26 \end{cases}$ $83 = \begin{cases} 1 + 82 \\ 9 + 74 \\ 25 + 58 \end{cases}$ $91 = \begin{cases} 9 + 82 \\ 81 + 10 \end{cases}$ $99 = 25 + 74$	$107 = \begin{cases} 1 + 106 \\ 25 + 82 \\ 49 + 58 \end{cases}$ $115 = \begin{cases} 9 + 106 \\ 81 + 34 \end{cases}$ $123 = \begin{cases} 1 + 122 \\ 49 + 74 \\ 121 + 2 \end{cases}$ $131 = \begin{cases} 9 + 122 \\ 25 + 106 \\ 49 + 82 \end{cases}$ $139 = 81 + 58$	$147 = \begin{cases} 1 + 146 \\ 25 + 122 \\ 121 + 26 \end{cases}$ $155 = \begin{cases} 9 + 146 \\ 49 + 106 \\ 81 + 74 \\ 121 + 34 \end{cases}$ $163 = 81 + 82$ $171 = \begin{cases} 25 + 146 \\ 49 + 122 \\ 169 + 2 \end{cases}$ $179 = \begin{cases} 1 + 178 \\ 121 + 58 \\ 169 + 10 \end{cases}$ $187 = \begin{cases} 9 + 178 \\ 81 + 106 \end{cases}$
--	--	---	---

§. 8. Hinc igitur iam sine nimia temeritate concludi videatur, omnes plane numeros formae  $8n + 3$  resolui posse in duas partes, quarum altera sit quadratum, altera autem duplum numeri primi  $4n + 1$ . Cum enim numerus quadratorum, quae adhiberi possunt, continuo crescat, combinationum numerus etiam continuo magis augetur; vnde si talis resolutio vsquam falleret, in minoribus numeris fallere debuisset. Interim tamen, quia hic occurrerunt eiusmodi casus, qui vnam tantum resolutionem admittunt, veluti contigit in numeris 67, 99, 139, 163, quoniam tales sine dubio in sequentibus non deerunt, non immerito vereri licet, ne talis resolutio vspiam plane deficiat. Quanquam igitur ista conclusio forsitan veritate consentanea esse queat, tamen ei non confidamus.

§. 9.

§. 9. Cum autem classis illa numerorum  $8n + 2$  haud mediocrem amplificationem admittat, dum scilicet quadrata imparia duplicata ipsis adiungimus, quippe quae per se sunt summae duorum quadratorum, prorsus non amplius erit metuendum, ne vnquam resolutio fiat impossibilis. Praeterea vero etiam insuper dupla eorum numerorum compositorum formae  $4n + 1$ , qui scilicet sint producta ex duobus pluribusue numeris primis eiusdem formae, adicere poterimus, vnde istorum omnium numerorum formae  $8n + 2$  haec progressio resultabit:

2, 10, 18, 26, 34, 50, 58, 74, 82, 90, 98, 106,  
122, 130, 146, 162, 170, 178, 194, 202, etc.

§. 10. Hos igitur nonos numeros in subsidium vocando resoluamus eos tantum numeros, qui in superiori tabula vnicam resolutionem admiserunt, hoc modo:

$$19 = 1 + 18 = 9 + 10$$

$$43 = 9 + 34 = 25 + 18$$

$$67 = 9 + 58 = 49 + 18$$

$$99 = 1 + 98 = 9 + 90 = 25 + 74 = 49 + 50 = 81 + 18$$

$$139 = 9 + 130 = 49 + 90 = 81 + 58 = 121 + 18$$

$$163 = 1 + 162 = 81 + 82$$

Hic igitur videmus, ad minimum vnam resolutionem accessisse, in maioribus autem numeris adhuc plures accedere debent. His igitur probe perpensis Geometrae iudicent, vtrum haec inductio, tot rationibus corroborata, non solidae demonstrationi aequualere sit censenda.

§. 11.

§. II. Quanquam autem haec conclusio nulla ulteriori confirmatione indigere videtur: tamen ex alio principio prorsus diverso haud exiguum firmamentum afferri potest, scilicet: quod omnes numeri primi formae  $8n + 3$  semper sint formae  $2aa + bb$ , ideoque per se in tria quadrata resolubiles, id quod iam solide est demonstratum. Hinc autem sequitur, etiam eosdem numeros primos octenario auctos etiam esse summas trium quadratorum. Si enim fuerit  $8n + 3 = 2aa + bb$ , erit

$$8n + 11 = (a + 2)^2 + (a - 2)^2 + bb,$$

quamobrem iam certi sumus, superiorem resolutionem nunquam in numeris primis  $8n + 3$ , neque etiam in sequentibus  $8n + 11$  fallere posse; atque hoc etiam valet de numeris  $8n + 35$ ; siquidem est

$$8n + 35 = (a + 4)^2 + (a - 4)^2 + bb,$$

quod proinde etiam valebit de omnibus his numeris  $8n + 3 + 8pp$ , denotante  $p$  numerum quemcunque. Porro vero, cum etiam demonstratum sit, omnes numeros primos formae  $8n + 1$  esse quoque numeros formae  $2aa + bb$ , talia producta duorum numerorum primorum  $(8p + 1)(8q + 3)$ , qui utique sunt numeri formae  $8n + 3$ , semper esse numeros eiusdem formae  $2aa + bb$ , ideoque istos numeros siue octenario, siue numero 32, siue in genere numero  $8rr$  auctos, certe esse summas trium quadratorum. His igitur considerationibus adiunctis theorema Fermatianum de numeris trigonalibus summo rigore demonstratum censei debet. Interim tamen fateri cogimur, hoc modo necessitatem, cur ita fieri debeat, non clare perspici posse.