DE DVPLICI GENESI
TAM
EPICYCLOIDVM
QVAM
HYPOCYCLOIDVM

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Non dubito quin a Geometris, qui iam olim generationem Epicycloidum et Hypocycloidum docuerunt, obseruatum sit, quamlibet harum curuarum duplici modo produci posse, dum scilicet duo circuli mobiles prorsus diuersi circa peripheriam eiusdem circuli fixi circumuoluuntur: neque tamen memini, hanc obseruationem vsquam legisse. Cum igitur nuper, dum curuas, quae suis euolutis siue primis siue secundis sint similes, denuo sum perscrutatus, in hanc proprietatem incidissem, haud ingratum fore arbitror, si hoc argumentum data opera pertractauero, atque huius insignis proprietatis geminam demonstrationem, alteram analyticam, alteram geometricam communicauero.

§. 2

§. 2. Conueniet autem ante omnia cunctos diuersos casus considerasse, quibus circuli mobiles super peripheria circuli fixi prouolui possunt. Sit igitur A centrum circuli fixi, cuius radius $AC = a$, super quo incedat alius quicunque circulus CBD, cuius centrum sit B et radius $BC = b$; initio autem motus tangat circulus mobilis circulum fixum in C, vbi stilum gerat, quo sua prouolutione describat Cycloidem CZ. Circulum fixum simpliciter littera A, mobilem vero littera B breuitatis gratia designabo. Ac primo quidem patet, dum circulus mobilis B continuo augetur, hoc modo omnes curuas, quae Epicycloides vocantur, generari. Si enim circulus B euanescat, perpetuo quidem in eodem puncto C manebit, ita vt tota curua descripta in vnicum punctum quasi coalescat. Sin autem circulus B vsque in infinitum augeatur, eius peripheria in lineam rectam abibit, circulum A in C tangentem, ex cuius motu orietur curua ex euolutione circuli nata. Inter hos igitur duos casus extremos omnes plane Epicycloides constitui oportet, quae eo ampliores euadent, quo maior radius circuli mobilis b accipiatur. Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Hic circulum mobilem B extra circulum fixum prouolui assumsimus; nunc igitur eum intra hunc circulum collocemus, ita vt iam eius radius BC tanquam negatiuus, respectu prioris positionis, spectari debeat. Si ergo primo hic circulus fuerit infinite paruus, perpetuo in eodem puncto C perseuerabit. Augendo autem successiue hunc circulum eius prouolutione generabuntur omnes Hypocycloides CZ, donec, cum diameter istius circuli CD radio circuli fixi CA factus fuerit aequalis, Hypocyclois CZ in ipsum diametrum sit abitura. Quod Fig. 2

ſi vero circulus B vlterius augeatur, vt eius diameter $CD = 2b$ maior fiat radio circuli fixi $CA = a$, ſiue $b > \frac{1}{2}a$, tum iterum praecedentes Hypocycloides reſultabunt, atque talis circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a + c)$, eandem Hypocycloidem deſcribet ac minor circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a - c)$. Quin etiam, ſi circulus B ipſi circulo fixo A fiat aequalis, nulla amplius prouolutio locum habere poteſt, ſed ſtilus perpetuo in eodem puncto C perſeuerabit prorſus vti caſu $b = 0$. Ex quo iam intelligitur, omnes Hypocycloides duplici modo generari poſſe, quandoquidem eadem curua deſcribitur, ſiue radius circuli mobilis ſit $\frac{1}{2}(a - c)$ ſiue $\frac{1}{2}(a + c)$, quemadmodum deinceps ſum demonſtraturus.

Tab. I. Fig. 3. §. 4. Augeamus nunc vlterius circulum mobilem B, vt circulum fixum A ſuperet eumque totum in ſe complectatur, ita vt ſit $b > a$; tum autem ſi punctum contactus initio ſit in C, vbi ſimul ſtilus concipiatur, prouolutione huius circuli B circa fixum A curua deſcribetur CZ, tota extra circulum fixum ſita, quae ergo iterum ad claſſem Epicycloidum erit referenda, atque adeo eadem erit, quae prodiret, ſi circulus mobilis, cuius diameter foret $= DE$, exceſſui ſcilicet diametrorum CD ſuper CE aequalis, ſiue cuius radius foret $= b - a$, extra circulum fixum, qualis in figura eſt circulus Cd, reuolueretur. Cum igitur hic circulus Cd reſpectu praecedentis poſitionis pro negatiuo haberi debeat, ſi eius radius vocetur $= d$, erit $-d = b - a$, ſiue $d = a - b$, ita vt ſit $b + d = a$, et nunc demonſtrandum eſt, a duobus circulis mobilibus, quorum radii ſint b et d, eandem Epicycloidem generari, ſi fuerit $b + d = a$, ſiue quoties in figura fuerit $Cd = DE$.

DEMONSTRATIO ANALYTICA.

§. 5. Consideremus circulum mobilem, cuius radius $= b$, quique extus circa peripheriam circuli fixi, cuius centrum in A et radius $AC = a$ prouoluatur, horumque circulorum contactum initio ponamus fuisse in puncto C, dehinc vero circulum mobilem peruenisse in situm PZQ, vbi circulum A tangat in puncto P, centrum autem habeat in O, ita vt sit $PO = b$, ideoque $AO = a + b$. Quod si igitur in hoc circulo capiatur arcus PZ aequalis arcui CP, erit punctum Z in Epicycloide quaesita CZ. Hinc porro ad axem ACD ducatur normalis ZX, vt rectae AX et XZ referant binas coordinatas pro puncto Z, ad quas definiendas etiam ex centro circuli mobilis O ad axem agatur normalis OR, per Z vero recta SU, rectam AO secans in U, rectam vero OR in S, ita vt sit $AX = AR - ZS$ et $XZ = OR - OS$. Tab. I. Fig. 4.

§. 6. His praeparatis vocemus angulum $CAO = \omega$, et cum sit arcus $CP = a\omega$, erit etiam arcus $PZ = a\omega$, qui per radium $OP = b$ diuisus dat angulum $POZ = \frac{a\omega}{b}$. Iam ob $AO = a + b$ ex triangulo AOR statim nanciscimur $AR = (a + b)\operatorname{cos}.\omega$ et $OR = (a + b)\operatorname{sin}.\omega$. Deinde quia angulus $OUZ = \omega$ et angulus $POZ = \frac{a}{b}\omega$, erit angulus $OZS = (\frac{a+b}{b})\omega$, pro quo breuitatis gratia scribamus $\lambda\omega$, ita vt sit $\lambda = \frac{a+b}{b}$, ideoque $b = \frac{a}{\lambda - 1}$. Hinc iam in triangulo OZS, ob $OZ = b$ habebimus

$$ZS = b\operatorname{cos}.\lambda\omega \text{ et } OS = b\operatorname{sin}.\lambda\omega,$$

ex quibus ambae coordinatae ita prodibunt expressae:

AX

$$AX = x = AR - SZ = (a+b)\,\text{cof.}\,\omega - b\,\text{cof.}\,\lambda\omega \quad \text{et}$$
$$XZ = y = OR - OS = (a+b)\,\text{fin.}\,\omega - b\,\text{fin.}\,\lambda\omega,$$

vbi fi loco b fcribamus valorem $\frac{a}{\lambda - 1}$, fiet

$$x = \frac{a}{\lambda - 1}(\lambda\,\text{cof.}\,\omega - \text{cof.}\,\lambda\omega) \quad \text{et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda - 1}(\lambda\,\text{fin.}\,\omega - \text{fin.}\,\lambda\omega).$$

§. 7. Videamus nunc, num alius circulus mobilis affignari queat, qui eosdem valores pro coordinatis x et y praebeat, quod fi enim contigerit, euictum erit, eandem Epicycloidem duplici modo produci poffe. Ponatur igitur huius alterius circuli radius $= b'$, vnde oriatur $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$; tum vero ifti circulo refpondeat angulus ω', et quia coordinatae eaedem effe debent, erit:

$$x = \frac{a}{\lambda' - 1}(\lambda'\,\text{cof.}\,\omega' - \text{cof.}\,\lambda'\omega') \quad \text{et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda' - 1}(\lambda'\,\text{fin.}\,\omega' - \text{fin.}\,\lambda'\omega')$$

quae expreffiones vt illis aequales reddantur, partes priores fuperiorum aequales ftatuantur partibus pofterioribus iftarum expreffionum, viciffimque partes pofteriores illarum partibus priorum, vnde nafcuntur quatuor fequentes aequalitates:

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1}\,\text{cof.}\,\omega = -\frac{1}{\lambda' - 1}\,\text{cof.}\,\lambda'\omega', \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,\text{fin.}\,\omega = -\frac{1}{\lambda' - 1}\,\text{fin.}\,\lambda'\omega',$$
$$-\frac{1}{\lambda - 1}\,\text{cof.}\,\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda' - 1}\,\text{cof.}\,\omega', \quad -\frac{1}{\lambda - 1}\,\text{fin.}\,\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda' - 1}\,\text{fin.}\,\omega'.$$

Hic igitur primo angulos vtrinque faciamus aequales, et ex prima et fecunda fiet $\omega = \lambda'\omega'$: ob tertiam vero et quartam effe debet $\lambda\omega = \omega'$, ex quibus coniunctim fequitur $1 = \lambda\lambda'$, ideoque $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. Nunc igitur finibus et cofinibus omiffis coefficientes in omnibus quatuor aequationibus

nibus sponte fient aequales; ex prima enim erit

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} = -\frac{1}{\lambda'-1} = -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1} = -\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

similique modo idem euenit in reliquis formulis. Consequenter circulus mobilis, cuius radius $= b'$, eandem generabit curuam ac circulus cuius radius $= b$.

§. 8. Cum igitur posuerimus

$\lambda = \frac{a+b}{b}$ et $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$, ob

$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ fiet $\frac{b'}{a+b'} = \frac{a+b}{b}$;

ex qua aequatione colligitur

$$b' = -a-b, \text{ ita vt fit } b+b' = -a,$$

ex quo patet, binos circulos mobiles, quorum radiorum summa negatiue aequatur radio circuli fixi, eandem generare Epicycloidem, si modo notetur, valores positiuos a puncto C sursum, negatiuos autem deorsum esse capiendos.

§. 9. Quod si ergo statuamus

$b = -\frac{1}{2}a(1+n)$, erit $b' = -\frac{1}{2}a(1-n)$.

Ponamus igitur in prioribus formulis pro x et y inuentis loco b istum valorem: $-\frac{1}{2}a(1+n)$, vnde fit $\lambda = \frac{n-1}{n+1}$, et consequemur sequentes valores:

$$x = \frac{1}{2}a\left((1-n)\operatorname{cos.}\omega + (1+n)\operatorname{cos.}\frac{n-1}{n+1}\omega\right)$$

$$y = \frac{1}{2}a\left((1-n)\operatorname{sin.}\omega + (1+n)\operatorname{sin.}\frac{n-1}{n+1}\omega\right).$$

Ponamus hic, ad fractiones tollendas, $\omega = (n+1)\Phi$ et impetrabimus has formulas:

$$x = \frac{1}{2}a\left((1-n)\operatorname{cos.}(n+1)\Phi + (1+n)\operatorname{cos.}(n-1)\Phi\right)$$

$$y = \frac{1}{2}a\left((1-n)\operatorname{sin.}(n+1)\Phi + (1+n)\operatorname{sin.}(n-1)\Phi\right)$$

 qua-

quarum prior manifesto eadem manet, etiamsi loco n scribatur $-n$, posterior vero, facta hac mutatione, abit in sui negatiuum, quo autem natura curuae non mutatur, ita vt iam demonstratum sit, eandem curuam oriri, siue pro circulo mobili capiatur

$$b = -\tfrac{1}{2}a(1+n), \text{ siue } b = -\tfrac{1}{2}a(1-n).$$

DEMONSTRATIO GEOMETRICA.

Tab. I. Fig. 5. §. 10. Constituto circulo fixo, cuius centrum in A et radius $AC = a$, consideremus duos circulos hunc in C tangentes, vbi vterque gerat stilum, quo deinceps, dum vterque circa circulum fixum conuoluitur, curua describatur CZ. Ac prior quidem circulus conuexitate sua circulum fixum in C tangens habeat suum centrum in B, sitque eius radius $BC = b$, ideoque diameter $CD = 2b$; alter vero circulus fixum concauitate sua in C amplectens centrum suum habeat in B′, sitque eius radius $B'C = B'D'$ $= a + b$, qui ergo aequibitur summae radiorum circuli fixi et superioris B, vnde erit interuallum

$$AB' = b = CB, \text{ ideoque } CB' = AB.$$

Praeterea vero erit interuallum $ED = CD = 2b$.

§. 11. Postquam initio ambo circuli mobiles situm Fig. 6. modo descriptum tenuerunt, peruenerit superior circulus B, facta quadam prouolutione, in situm cZd, ita vt eius centrum iam sit in b, atque in eius peripheria abscindatur arcus cZ, aequalis arcui cC super circulo fixo, eritque punctum Z locus, vbi iam stilus huius circuli reperietur, ideoque punctum in curua CZ. Tum vero punctum c erit contactus huius circuli cum fixo, ita vt sit $Ab = a + b$.

Iam

Iam ex Z per punctum c producatur chorda Zc, donec circulum secet in puncto c', ac manifestum est, segmenta cZ et cc' fore similia, propterea quod arcus amborum cum suis chordis aequales faciunt angulos: vterque enim arcus Zc et cc' ad rectam Ab est normalis. Hanc ob rem erit arcus cZ ad arcum cc' vti chorda cZ ad chordam cc', atque etiam vti radii circulorum, ad quos pertinent, hoc est vt $b:a$; vnde patet etiam fore chordas inter se vt $b:a$.

§. 12. Quod si iam super recta $c'Z$, tanquam chorda, simile exstruatur segmentum $c'rz$, ita vt angulus, quem iste arcus cum sua chorda constituit, aequalis sit angulo quem arcus cc' cum sua chorda facit, patet, arcum $c'rz$ tangere circulum fixum in puncto c', et quia eius chorda $c'Z$ est summa chordarum $c'c$ et cZ, etiam ipse arcus $c'rZ$ aequabitur summae arcuum $c'c$ et cZ; at vero fecimus arcum $cZ =$ arcui cC, vnde sequitur arcum $c'rZ$ aequalem esse arcui circuli fixi Cc'.

§. 13. Quoniam porro arcus $c'rZ$ aequalis est summae arcuum sibi similium $c'c$ et cZ, quorum radii sunt $Ac' = a$ et $cb = b$, etiam radius circuli, cuius est portio, erit summae illorum radiorum $a+b$ aequalis, ideoque erit arcus circuli alterius mobilis B'. Hinc quia iste arcus circulum fixum in c' tangit, eius centrum erit in recta cA producta in b', ita vt sit $Ab' = AB' = b$; vnde patet, postquam iste circulus, qui initio fixum tangebat in C, eo vsque fuerit prouolutus, vt eum iam in puncto c' tangat, eius cuspidem interea peruenisse in ipsum punctum Z, propterea quod arcus $c'rZ$ aequalis est arcui $c'cC$,

sic-

ſicque euictum eſt, vtriusque circuli B et B' motu eandem Epicycloidem C Z deſcribi.

§. 14. Super his ſequentia annotaſſe iuuabit, quod ſi ponatur angulus $CAc = \omega$, vt ſit arcus $Cc = a\,\omega$, quia huic aequalis eſt arcus cZ, erit angulus $cbZ = \frac{a\omega}{b}$. Tum vero quia arcus cc' ſimilis eſt arcui cZ, erit etiam angulus $cAc' = \frac{a\omega}{b}$. Quin etiam, ſi ducatur recta bZ, quia etiam arcus $c'rZ$ binis memoratis arcubus ſimilis eſt, eiusque centrum in b' verſatur, erit $b'Z$ eius radius $= a + b = b'c'$ et angulus $c'b'Z = \frac{a\omega}{b}$; vnde patet, rectam $b'Z$ parallelam fore rectae Ac. Praeterea vero, quia etiam recta Ab eſt $a + b$, ideoque aequalis rectae $b'Z$, manifeſtum eſt, quadrilaterum $Ab'Zb$ eſſe parallelogrammum, ex quo indoles huius figurae penitius perſpicitur. Praeterea hic obſeruaſſe operae pretium erit, arcum C Z a minore circulo B deſcribi, dum prouoluitur per angulum $CAc = \omega$, evndem vero arcum ab altero circulo maiori deſcribi, dum is prouoluitur per angulum

$$CAc' = \frac{a+b}{b}\omega.$$

§. 15. Quod ſi iam angulum $CAc = \omega$ tantum accipiamus, vt interea minor circulus B totam reuolutionem abſoluerit, eiusque ſtilus nunc in c peruenerit, vbi curua denuo habebit cuspidem, quia iſtius circuli peripheria eſt $2\pi b$, cui arcus Cc aequalis ſtatui debet, fiet angulus $\omega = \frac{2\pi b}{a}$. Interea autem maior circulus B' prouolutus erit per angulum $\frac{(a+b)}{b} = \frac{2\pi(a+b)}{a}$; ſuper circulo igitur fixo interea percurrit arcum $= 2\pi(a+b)$, quae eſt ipſa peripheria iſtius circuli B', ita vt, dum minor circulus B inte-

integram reuolutionem abſoluit, etiam maior circulus integram reuolutionem abſoluerit.

§. 16. Etſi in hac demonſtratione aſſumſimus, circulum fixum ab altero circulo mobili extus tangi, alterum vero maiorem intus tangere, ita vt ſumma diametrorum illorum duorum aequalis ſit diametro huius maximi: tamen eadem demonſtratio facile applicari poteſt ad caſum, quo ambo circuli mobiles circulum fixum intus tangunt, quo caſu ſumma diametrorum amborum circulorum mobilium diametro circuli fixi aequalis eſſe debet. Interim tamen ſequens theorema adiungamus, quo iſte caſus facilius expedietur.

Theorema.

§. 17. Si circulus D E F intus in duobus quibuscunque punctis E et F tangatur a duobus circulis E G H et F G H, quorum diametri ſimul ſumti aequentur diametro circuli maximi D E F, ducaturque chorda E F per contactus puncta E et F, ea per alteram interſectionem G amborum circulorum minorum tranſibit, et ambo arcus E G et F G ſimul ſumti aequales erunt arcui E F. Tab. I. Fig. 7.

Demonſtratio.

Quia ambo circuli minores maiorem tangunt in punctis E et F, chorda E F ad omnes tres circulos aequaliter inclinabitur; ideoque ab omnibus tribus ſimilia ſegmenta abſcindet, et chordae duorum minorum ſimul ſum-

 tae

tae aequales erunt chordae maximi circuli E F; vnde patet intersectionem amborum circulorum minorum G in ipsam rectam E F incidere, ita vt sit E G : F G vt diameter circuli E G H ad diametrum circuli F G H, qui cum simul sumti aequales sint diametro circuli maximi, euidens est, etiam summam chordarum E G et F G toti chordae E F aequalem esse debere. Quoniam igitur arcus his chordis subtensi ad eas eandem tenent rationem, necesse est vt arcus E F aequalis sit summae arcuum E G et F G.

Corollarium 1.

§. 18. Cum arcus E F aequalis sit summae arcuum E G et F G, is ita secetur in I, vt fiat arcus E I = arcui E G et arcus F I = arcui F G; et iam manifestum est, si ambo circuli minores initio maximum tetigerint in puncto I, vbi vtrique stilus infixus concipiatur; tum stilum circuli E G H nunc fore in puncto G, vbi etiam erit stilus alterius circuli F G H; vnde patet, ambos stilos ex I egressos eandem curuam I G esse descripturos, quae ergo erit Hypocyclois vtrique circulo mobili communis.

Corollarium 2.

§. 19. Quod si ergo ambo circuli mobiles initio circulum maximum in puncto I contigerint, indeque ambo in plagas contrarias ita prouoluantur per arcus I E et I F, qui inter se habeant rationem diametrorum, tum isti circuli se perpetuo in iisdem punctis intersecabunt, iis scilicet, quae initio fuerant simul in puncto I. Ceterum hic

Phae-

Phaenomenon maxime notatu dignum se offert, quod, dum ambo circuli mobiles se in duobus punctis G et H intersecant, istae demonstratae proprietates ad alterum tantum horum duorum punctorum pertineant.

Corollarium 3.

§. 20. Quod autem ad situm puncti H attinet, si ex puncto G vtriusque circuli ducantur diametri G P et G Q, iungaturque recta P Q, facillime demonstrari potest, punctum H in ipsam hanc rectam P Q incidere, atque adeo chordam G H in eam esse perpendicularem. Quia enim anguli G H P et G H Q, vtpote in semicirculo, sunt recti, etiam chordae P H et Q H in directum iacent.