DE
EFFECTV FRICTIONIS
IN MOTV VOLVTORIO.

Auctore

L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam olim fusius pertractaui, vbi motum globi super plano siue voluentem, siue radentem, siue mixtum ex vtroque sum contemplatus: tamen invtile non erit, hoc argumentum methodo planiori et faciliori denuo euoluere, quo clarius Phaenomena talium motuum perspici queant. Inprimis autem hic etiam eiusmodi globos introducam, quorum centrum grauitatis extra centrum sphaericitatis cadat. Antequam autem has inuestigationes suscipiam, nonnulla de indole frictionis in genere praenotari conueniet.

Definitio.

§. 1. *Frictio* est vis, qua motui corporis super alio incedentis ob attritum resistitur, cuius indoles ad sequentia capita reducitur:

I. Nullum est dubium, quin frictio potissimum pendeat a quantitate pressionis, qua ambo corpora inuicem apprimuntur; et vulgo quidem frictio certae parti totius pressionis aequalis aestimari solet.

II. Deinde etiam frictio sine vllo dubio pendet ab asperitate vel laeuitate vtriusque superficiei, qua ambo corpora se mutuo tangunt; vbi quidem vulgaria experimenta probare videntur, neque quantitatem neque figuram basis, qua corpora se mutuo contingunt, quicquam ad frictionem vel augendam vel minuendam conferre, vnde plerique auctores assumserunt frictionem vulgo tertiae parti pressionis aequalem aestimari posse, etsi non negant, si superficies corporum magis minusue fuerint politae, etiam frictionem vel maiorem vel minorem inde oriri posse. Ita si P denotet vim, qua ambo corpora se mutuo premunt, frictio statui solet $= \frac{1}{3} p$; vbi quidem intelligendum est, loco fractionis $\frac{1}{3}$ aliam vel maiorem vel minorem locum habere posse. Ista autem vis eatenus tantum effectum exerit, quatenus revera attritus adest: quamdiu enim ambo corpora quiescunt, ob frictionem nulla plane vis exeritur; simulac vero attritus contingit, vis illa $\frac{1}{3} p$ totum suum effectum exercet secundum directionem motui contrariam.

III. Quando autem statuimus in statu quietis nullam adesse vim frictionis, hoc tantum locum habere cenſendum eſt quando nullae adſunt vires ad motum ſollicitantes. Quod ſi enim adfuerit vis quaepiam Q, alterum corpus ſuper altero promouere tendens, duo caſus ſunt perpendendi: alter quo haec vis $Q > \frac{1}{3}p$, alter vero quo $Q < \frac{1}{3}p$. Priore caſu frictio totam ſuam vim $\frac{1}{3}p$ exerit ſecundum directionem motui contrariam, ita vt motus tantum ab exceſſu vis Q ſuper $\frac{1}{3}p$ producatur: caſu altero quo $Q < \frac{1}{3}p$, frictio non totam ſuam vim exerit, ſed tantum agit vi $= Q$, quo huius vis effectus coerceatur.

IV. Hinc igitur vis frictionis in ſe neutiquam eſt determinata, ſed quouis caſu vi ſollicitanti ſecundum directionem contrariam reluctatur, et quidem vel tota ſua vi $\frac{1}{3}p$, vel minore, ſiquidem minor ſufficiat ad effectum vis Q cohibendum.

V. Vtrum vero quantitas frictionis non etiam a celeritate, qua vnum corpus ſuper altero prorepit, pendeat, quaeſtio eſt nondum penitus deciſa. Sunt enim qui putant, ob auctam celeritatem frictionem adeo diminui, neque deeſſe videntur experimenta huic opinioni fauentia; dum contra alii eiusmodi experimenta allegant, quibus frictio ob auctam celeritatem etiam augeri videatur, niſi forte reſiſtentiae aëris iſte effectus ſit tribuendus.

VI. Ceterum ob infinitam corporum varietatem, qua in contactu in ſe inuicem agere poſſunt, tum vero etiam ob diuerſam aſperitatis rationem vix quicquam in genere ſtabiliri poſſe videtur, vnde hoc loco opinionem communem circa frictionem ſum ſecuturus.

Problema I.

§. 2. *Definire motum globi super plano inclinato, motu vtcunque ex radente et voluente mixto, descendentis, cuius quidem centrum grauitatis in ipso centro figurae sit situm.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 6. Sit radius globi $CA = a$, eiusque pondus $= P$, centrum grauitatis vero in ipsius centro C. Tum vero sit eius momentum inertiae respectu axis horizontalis per C transeuntis, circa quem gyratur, $= Pkk$, ita vt, si globus ex materia constet vniformi, sit $kk = \frac{2}{5}aa$. Hic autem eius materiam vtcunque difformem assumamus, dummodo centrum grauitatis in punctum C incidat. Iam descendat iste globus vtcunque super plano inclinato IO, quod ad horizontem HO inclinetur angulo $IOH = \omega$, atque elapso tempore t confecerit iam spatium $IS = s$, globo planum tangente in puncto S. Quia igitur globus ob grauitatem in directione verticali CP vrgetur vi $= P$, hinc nascitur vis globum plano apprimens secundum directionem $CS = P \operatorname{cof.} \omega$, atque insuper vis secundum rectam CB plano IO parallelam motum accelerans $= P \operatorname{fin.} \omega$. Globus igitur in planum IO pressionem exercebit $= P \operatorname{cof.} \omega$, vnde vis frictionis hinc nata erit $= \frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega$, siquidem detur attritus. At si minor vis sufficiat ad attritum impediendum, etiam minorem exercebit, quae ergo sit $\lambda P \operatorname{cof.} \omega$. Praeterea vero globus motu gyratorio per tempus t angulum iam confecerit $ACS = \Phi$, ita vt celeritas angularis nunc sit $\frac{d\Phi}{dt}$, qua punctum globi S secundum directionem SI ferretur celeritate $= \frac{a\,d\Phi}{dt}$, siquidem centrum C quiesceret, quod cum autem eodem tempore t iam

iam ſpatium $IS = s$ confeciſſe ponatur, eius celeritas ſecundum SO = $\frac{ds}{dt}$. Ob hunc vtrumque motum igitur punctum globi S planum IO radet celeritate differentiae inter illas celeritates aequali, ſcilicet vel radet in directione SI celeritate $\frac{ad\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt}$, ſiquidem fuerit $ad\Phi > ds$, vel radet in directione SO celeritate $\frac{ds}{dt} - \frac{ad\Phi}{dt}$, ſi fuerit $ds > ad\Phi$. Priore ergo caſu globus ob frictionem ſollicitabitur in directione SO vi $= \frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega$, poſteriore vero caſu ſollicitabitur in directione SI pari vi $= \frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega$. Verum ſi fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, nullus dabitur attritus, et globus in contactu S non maiorem exeret vim, quam quanta opus eſt ad attritum impediendum, quam ergo vim ſtatuamus $= \lambda P \operatorname{cof.} \omega$. Hinc igitur tres caſus occurrent evoluendi.

I. Ponamus igitur primo eſſe $\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hocque caſu frictio exeret vim $= \frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega$, ſecundum directionem SO, quare cum iam motu progreſſiuo globus ſollicitetur in directione CB plano inclinato parallela vi

$$= P \operatorname{ſin.} \omega + \tfrac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega,$$

principia motus nobis ſuppeditant hanc aequationem:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{P \operatorname{ſin.} \omega + \frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega}{P} = \operatorname{ſin.} \omega + \tfrac{1}{3} \operatorname{cof.} \omega,$$

vbi littera g ſignificat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, ſiquidem tempus t in minutis ſecundis exprimere velimus. Pro motu autem gyratorio, quem in ſenſum SA fieri concipimus, ei ſe opponit vis frictionis $\frac{1}{3} P \operatorname{cof.} \omega$, momento $\frac{1}{3} a P \operatorname{cof.} \omega$, dum iſte motus ob ipſam grauitatem plane non afficitur, vnde principia mechanica hanc praebent aequationem:

$dd\Phi$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-\frac{1}{5}a\,P\cos.\omega}{P\,k\,k} = \frac{-a\cos.\omega}{5\,k\,k}.$$

Atque ex his duabus aequationibus motum globi definiri oportet, quamdiu scilicet fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$.

Quoniam angulus ω est constans, prior aequatio ducta in $2g\,dt$ et integrata praebet

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,(\sin.\omega + \tfrac{1}{5}\cos.\omega) + f,$$

vbi cum $\frac{ds}{dt}$ exprimat celeritatem centri C secundum directionem IO progredientis, constans adiecta f exprimet istam celeritatem initialem, qua scilicet globus motum initio inchoauerit. Eodem modo altera aequatio in $2g\,dt$ ducta et integrata praebebit $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\cos.\omega}{5kk}$, vbi quia $\frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem in sensum SA, elapso tempore t constans hic adiecta ζ denotabit celeritatem angularem in eundem sensum, quae globo initio fuerit impressa. His igitur duabus aequationibus inuentis patet, istum motum tantum valere quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2ga^2t\cos.\omega}{5kk} > 2gt\,(\sin.\omega + \tfrac{1}{5}\cos.\omega) + f; \text{ siue}$$

$$a\zeta - f > 2gt\left(\frac{aa\cos.\omega}{5kk} + \sin.\omega + \tfrac{1}{5}\cos.\omega\right),$$

vnde intelligitur hunc motum locum habere non posse, nisi initio fuerit $a\zeta - f$ quantitas positiua, quae autem, quantumuis fuerit magna, tamen labente tempore t tandem indoles huius motus cessabit, quod scilicet eueniet quando formula

$$2gt\left(\frac{aa\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}+\text{fin.}\,\omega+\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega\right),$$

aequalis fiet quantitati $a\zeta-f$.

Quodsi has duas aequationes denuo in dt ducamus et integremus, reperiemus has aequationes:

$$s=C+ft+gtt\,(\text{fin.}\,\omega+\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)\ \text{et}$$
$$\Phi=\Gamma+\zeta t-\frac{gatt\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}.$$

II. Ponamus nunc tempore elapso $=t''$ esse $\frac{ds}{dt}>\frac{ad\Phi}{dt}$, ita vt globus in puncto S radat planum secundum directionem SO, hincque frictio aget in directione SI vi $=\frac{1}{3}\,P\,\text{cof.}\,\omega$, quae vis quia est contraria vi ex grauitate oriundae $P\,\text{fin.}\,\omega$, qua motus progressiuus globi acceleratur, pro hoc motu progressiuo habebimus

$$\frac{dds}{2g\,dt^2}=\text{fin.}\,\omega-\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega.$$

At pro motu gyratorio habebimus vim frictionis accelerantem, cuius momentum est $=\frac{1}{3}\,aP\,\text{cof.}\,\omega$, vnde colligitur $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}=\frac{a\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}$. Nunc igitur ex his duabus aequationibus integrando deducimus has aequalitates:

$$\frac{ds}{dt}=f+2gt\,(\text{fin.}\,\omega-\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)\ \text{et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt}=\zeta+\frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

quae autem eatenus tantum valere sunt censendae, quatenus fuerit $\frac{ds}{dt}>\frac{ad\Phi}{dt}$, hoc est quatenus

$$f+2gt\,(\text{fin.}\,\omega-\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)>a\zeta+\frac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},\ \text{siue}$$
$$f-a\zeta>2gt\left(\frac{aa\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}-\text{fin.}\,\omega+\tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega\right).$$

Vnde intelligitur, vt talis motus eueniat initio esse debuisse

isse $f > a\zeta$, postea vero continuatio huius motus praecipue pendebit ab hac formula:

$$\frac{aa\,\text{cof.}\,\omega}{3kk} + \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega - \text{fin.}\,\omega,$$

quae si fuerit positiua, iste motus mox cessabit; sin autem fuerit negatiua, motus perpetuo durabit, quod ergo continget si fuerit

$$\text{fin.}\,\omega > \frac{aa\,\text{cof.}\,\omega}{3kk} + \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega, \text{ siue}$$

$$\text{tang.}\,\omega > \frac{aa + kk}{3kk}.$$

Ceterum hae aequationes denuo integratae praebebunt

$$s = C + ft + gtt\,(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\Phi = \Gamma + \zeta t + \frac{gatt\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}.$$

III. Sumamus tandem elapso tempore t'' esse $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ita vt iam nullus attritus locum habeat, Frictio igitur hoc casu eatenus tantum aget, quatenus opus est ad attritum impediendum. Ponamus igitur istam frictionis vim esse $= \lambda P\,\text{cof.}\,\omega$, ita vt $\lambda < \frac{1}{3}$, eique directionem tribuamus SO, atque pro motu progressiuo habebimus has duas aequationes, vti in casu primo, dummodo loco $\frac{1}{3}$ scribatur λ.

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{fin.}\,\omega + \lambda\,\text{cof.}\,\omega,$$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\lambda a\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

quare cum per hypothesin esse debeat $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, necesse est vt etiam sit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{a\,dd\Phi}{dt^2}$, haec ergo conditio praebet istam aequationem:

$$\text{fin.}\,\omega + \lambda\,\text{cof.}\,\omega = -\frac{\lambda aa\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde colligitur

$\lambda =$

$$\lambda = \frac{-kk\sin.\omega}{(aa+kk)\cos.\omega} = \frac{-kk}{aa+kk}\text{tang.}\,\omega.$$

Dummodo ergo iſta fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω non ſuperet $\frac{1}{3}$, motus globi ſecundum hanc legem abſoluetur, & ſolo motu voluente ſuper plano deſcendet. Ad quem motum inveſtigandum ſtatuamus $\lambda = \frac{-kk}{aa+kk}$ tang. ω, et per integrationem reperiemus hos valores:

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{2gaat\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2gat\sin.\omega}{aa+kk},$$

vbi autem per ipſam hypotheſin eſſe debet $f = a\zeta$; vnde patet, dummodo initio fuerit $f = a\zeta$ et fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tg. ω non ſuperet $\frac{1}{3}$, globum ſolo motu voluente ſuper plano inclinato deſcendere. Repetita autem integratio perducet ad hanc aequationem:

$$s = C + ft + gtt.\frac{aa\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta t + gtt.\frac{a\sin.\omega}{aa+kk}.$$

Ceterum vero ſi fuerit $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. $\omega > \frac{1}{3}$, tum motus vti caſu ſecundo proſequetur. Hic quidem aſſumimus, plenam vim, quam frictio exerere valet, eſſe $= \frac{1}{3}p\cos.\omega$, etiamſi loco fractionis $\frac{1}{3}$ pro varia corporum indole modo maior modo minor fractio accipi debeat. Quod enim hic de $\frac{1}{3}$ dictum eſt, de alio quouis valore eſt intelligendum.

Scholion.

§. 3. In omni ergo motu, quo globus ſuper plano inclinato promouetur, hos tres caſus ſollicite a ſe inuicem diſtingui conuenit; vbi imprimis notetur, tertium caſum complecti prouolutionem globi perfectam, ita vt nullus attritus in contactu locum inueniat, cuius caracter in hoc conſiſtit vt ſit $ds = a\,d\Phi$. Caſum autem primum pro iis motibus conſtituimus, quibus motus gyratorius motum globi progreſſiuum ſuperat, ita vt ſit $a\,d\Phi > ds$ et attritus ſuper plano retrorſum dirigatur. Secundus vero caſus eos continet motus, vbi celeritas progreſſiua ſuperat celeritatem angularem, ita vt ſit $ds > a\,d\Phi$, et attritus antrorſum ſit directus. Quicunque ergo ſtatus globi initialis fuerit propoſitus, ante omnia diſpiciendum erit, ad quemnam horum caſuum referri debeat. Sumamus autem motus initium conſtitui in ipſo puncto I, ita vt poſito tempore $t = 0$ ſemper ſit etiam $s = 0$, vnde in ſuperioribus formulis conſtans illa C in nihilum abibit. Deinde vero, quia perinde eſt, a quonam termino angulus Φ capiatur, pro initio conſtanter aſſumere poterimus $\Gamma = 0$. Praeterea vero in ſtatu initiali duplex motus, qui globo fuerit impreſſus, perpendi debet, quorum alter eſt progreſſiuus ſecundum ipſam plani directionem, cuius celeritatem indicauimus littera f, qua ſpatium definitur, quod ea celeritate in vno minuto ſecundo percurri poſſet. Denique vero motus angularis in initio deſignatur littera ζ, qua angulus denotatur, qui iſto motu angulari tempore vnius minuti ſecundi abſolueretur. Hic autem ſemper aſſumimus iſtum motum angularem in ſenſum S A B eſſe directum; vnde ſi in ſenſum contrarium vergeret, valor litterae ζ negatiuus ſumi deberet. Quibus notatis perſpicuum eſt, motum initialem ad caſum primum referri debere, ſi fuerit $f < a\zeta$; ad ſecundum vero ſi fuerit $f > a\zeta$; ac denique ad tertium ſi fuerit $f = a\zeta$. Quo autem omnes iſtae varietates clarius perſpici queant, planum I O primum aſſumamus horizontale, deinde vero ei talem inclinationem

tri-

tribuamus, vt fit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, tum vero etiam vt fit tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, vbi casus intermedius tang. $\omega = \frac{aa+kk}{3kk}$ euolutionem peculiarem meretur. Denique vero etiam ipsi plano IO inclinationem sursus directam tribuemus, ita vt angulus ω negatiuum valorem obtineat.

I. De motu globi super plano horizontali.

§. 4. Sit IO planum horizontale, motus vero in ipso puncto I inchoauerit, vbi celeritas progressiua secundum IO fuerit $= f$, celeritas vero angularis in sensum $SAB = \zeta$, radio globi existente $CA = a$ et momento inertiae $= Pkk$, denotante P pondus globi. Hinc autem elapso tempore $= t$ sec. globus confecerit motu progressiuo spatium $IS = s$, motu vero gyratorio angulum $ACS = \Phi$, quibus positis pro nostris tribus casibus habebimus sequentes aequationes differentiales secundi gradus: Tab. II. Fig. 7.

I. Si fuerit $\frac{ds}{dt} < \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \frac{1}{3}$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a}{3kk}$;

II. Si fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = -\frac{1}{3}$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = \frac{a}{3kk}$;

III. Si fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \lambda$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a\lambda}{kk}$;

vbi esse debet $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω, ergo $\lambda = 0$. Hos igitur casus pro diuersitate status initialis percurramus.

Exemplum I.

§. 5. Ponamus igitur primo globo initio in I solum motum progressiuum esse impressum celeritate $= f$.

 Sta-

Statim igitur, ſaltem ab initio, vbi $t = 0$, ob $f > a\zeta$, ſeu $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hic caſus ſecundus locum habebit, vnde binas illas aequationes integrando habebimus $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{3}gt + f$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$. Hae igitur aequationes tamdiu locum habebunt, quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt donec fiat

$$f - \tfrac{2}{3}gt > \frac{2aagt}{3kk};$$

vnde patet hunc motum eovsque tantum eſſe duraturum, quoad fiat $f - \frac{2}{3}gt = \frac{2aagt}{3kk}$, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Poſt hoc vero tempus motus cadet in caſum tertium, et globus vtroque motu tam progreſſiuo quam angulari, quem hoc momento habuerit, conſtanter in infinitum progredietur. Poſito autem $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$ reperitur celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk}$, celeritas vero angularis $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk}$.

§. 6. Totum ergo huius globi motum in duas partes partiri oportet, quarum prior ſecundum caſum ſecundum abſoluitur, poſterior vero ſecundum caſum tertium, vbi pars prior durabit per tempus $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Quare ſi ſtatus globi pro minori tempore t quaeratur, ex formulis ſuperioribus habebimus $\frac{ds}{dt} = f - \frac{2}{3}gt$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$, pro vtraque globi celeritate. Vnde patet, celeritatem progreſſiuam, quae initio erat $= f$, continuo decreſcere, eiusque decrementa tempori eſſe proportionalia. Contra vero celeritas angularis, quae initio erat nulla, continuo creſcit, atque etiam tempori proportionaliter. Quodſi has formulas differentiales denuo integremus, reperiemus primo totum ſpatium tempore t percurſum, $IS = s = ft - \frac{1}{3}gtt$, et angulum, per quem

quem ab initio iam ſe conuertit, ſcil. $ACS = \phi = \frac{agtt}{skk}$. Hae autem formulae diutius non durant, quam donec fiat $t = \frac{sfkk}{2g(aa+kk)}$; in fine autem huius temporis ſpatium confectum erit $s = \frac{sffkk(2aa+kk)}{4g(aa+kk)^2}$, totus autem angulus conuerſionis erit $\phi = \frac{asffkk}{4g(aa+kk)^2}$. Poſterior autem motus pars nulla laborat difficultate, quia vterque motus eſt vniformis et perpetuo talis manet.

§. 7. Cum igitur in priore motus parte frictio motui aduerſetur, etiam eius vis viua diminuatur neceſſe eſt, quam diminutionem expendiſſe opere etiam erit pretium. Conſideremus igitur primo vim viuam globi in ipſo motus initio, quae erat Pff, denotante ſcilicet P maſſam globi. Deinde vero in genere conſtat, ſi eiusdem globi celeritas progreſſiua fuerit $= \frac{ds}{dt}$, angularis vero $= \frac{d\phi}{dt}$, eius vim viuam fore $= P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\phi^2}{dt^2}\right)$, quae ergo formula pro poſteriori motus parte, vbi vidimus eſſe

$$\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk},$$

praebet vim viuam

$$\frac{Paaff(aa+kk)}{(aa+kk)^2} = \frac{Paaff}{aa+kk}$$

quae ergo vtique minor eſt quam initio, eiusque portio, quae periit, eſt $\frac{Pffkk}{aa+kk}$. Quare ſi globus ex materia homogenea fuerit confectus, quoniam tum eſt $kk = \frac{2}{5}aa$, portio vis viuae in hoc motu amiſſa erit $\frac{2}{7}Pff$, ideoque vis viua ſuperſtes $= \frac{5}{7}Pff$, quod ſcilicet vis viuae decrementum frictioni eſt tribuendum.

§. 8. Ponamus exempli gratia radium globi a eſſe vnius digiti, et kk proinde $= \frac{2}{5}$ digitos quadratos, ſiquidem glo-

globus ex materia constet homogenea; tum vero globo celeritas initio impressa sit, qua singulis minutis secundis percurrere potuisset spatium 5 pedum, siue 60 digitorum, ita vt fuerit $f = 60$. Hoc posito prior motus pars durabit per tempus $t = \frac{15''}{112}$, hoc est aliquanto minus quam $\frac{1''}{7}$; vnde intelligitur partem motus priorem plerumque per quam minimum temporis spatium durare. Deinde vero hoc tempore elapso celeritas progressiua erit $42\frac{6}{7}$ dig. celeritas autem angularis erit etiam $42\frac{6}{7}$ dig. quae per peripheriam circuli 2π diuisa ostendet numerum reuolutionum singulis minutis secundis peractarum, qui ergo numerus erit 7 propemodum; hocque motu globus constanter vlterius progredietur, nisi quatenus ab illis obstaculis tandem exstinguitur. Spatium autem parte priore motus absolutum erit $s = 6\frac{8}{9}$.

Exemplum 2.

§. 9. Ponamus nunc globo initio solum motum gyratorium esse impressum in sensum S A B, cuius celeritas angularis sit $= \zeta$, ita vt fuerit $f = 0$. Hinc patet, saltem statim ab initio motum pertinere ad casum primum, quo $\frac{ds}{dt} < \frac{a\,d\Phi}{dt}$ vnde formulae semel integratae oriuntur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$$

quae formulae tamdiu valebunt quamdiu fuerit

$$\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt} \text{ h. e. quamdiu } a\zeta - \frac{2aagt}{3kk} > \frac{2}{3} g t.$$

Euidens autem est has duas formulas continuo magis ad aequalitatem adpropinquare, quam adeo attingent elapso tempore $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, tum autem fiet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

dein-

deinceps igitur globus hoc motu voluendo perpetuo vniformiter progredietur.

§. 10. Totum igitur hunc motum in duas partes partiri conuenit, in quarum priore motus gyratorius continuo decrefcit fecundum formulam $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$, contra vero motus progreffiuus fecundum formulam $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}gt$, et vterque tempori proportionaliter. Hinc igitur porro integrando obtinebimus fpatium $s = \frac{1}{3}gtt$ et angulum $\Phi = \zeta t - \frac{agtt}{3kk}$, vnde, quoniam haec motus pars durat per tempus $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, totum fpatium hoc tempore confectum erit $s = \frac{3aak^4\zeta\zeta}{4g(aa+kk)^2}$, angulus autem conuerfione abfolutus fiet

$$ACS = \Phi = \frac{3akk\zeta\zeta(aa+2kk)}{4g(aa+kk)}.$$

Elapfo autem hoc tempore motus abibit in prouolutionem perfectam, celeritate progreffiua $\frac{akk\zeta}{aa+kk}$ et angulari $= \frac{kk\zeta}{aa+kk}$; vbi imprimis notari meretur, has celeritates plane non a quantitate frictionis pendere, quoniam character frictionis $\frac{1}{3}$ ex calculo abiit, vnde effectus frictionis in hoc tantum confiftit, quod motus globi vel citius vel tardius ad vniformitatem perducatur, id quod etiam in cafu praecedentis exempli contigit.

§. 11. Confideremus nunc etiam vim viuam globi, quatenus ob frictionem diminuitur, quae cum initio fuiffet $Pkk\zeta\zeta$, in motu vniformi fiet $= P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae expreffio ob

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

ideoque $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, abit in hanc $\frac{Pk^4\zeta\zeta}{aa+kk}$. Periit ergo ob frictionem vis viua $\frac{P a a k k \zeta \zeta}{a a + k k}$, vbi iterum notasse iuuabit, eandem vim viuam perire, siue frictio fuerit maior siue minor; semper enim pars amissa se habebit ad partem superstitem vt $a a : k k$; in priore exemplo autem haec ratio fuit inuersa.

§. 12. Ponamus exempli gratia globo initio tantum motum gyratorium fuisse impressum, quo tempore vnius minuti secundi confecerit 5 reuolutiones, ita vt fuerit $\zeta = 10 \pi$. Praeterea vero sumamus fuisse $k k = \frac{2}{5} a a$, pro materiae homogeneitate; et vt ante $a = 1$, vbi eiusmodi mensuras statuimus, vt fuerit $g = 16$ pedum $= 16 . 12$ digitorum, quibus positis diminutio motus durabit per tempus $t = \frac{5}{224} \pi$ sec. $= 0, 0701$, siue proxime $t = \frac{1}{14}$ sec. quo tempore conficietur spatium $s = 8, 97$, siue fere 9 dig. Dehinc vero celeritas progressiua erit $\frac{d s}{d t} = 17. 952$ digit. siue fere 18 digitos vno minuto secundo conficiet, et tanta etiam erit celeritas angularis, quae per 2π diuisa dat numerum reuolutionem 2, 857 siue 3 proxime, tot scilicet reuolutiones globus singulis minutis secundis absoluet.

Exemplum 3.

§. 13. Ponamus iam generalius globo initio duplicem imprimi motum, alterum progressiuum celeritate $= f$, alterum gyratorium celeritate angulari $= \zeta$, ita tamen vt sit $f > a \zeta$, ideoque motus saltem ab initio ad casum secundum sit referendus. Prima igitur integratio dat

$$\frac{d s}{d t} = f - \frac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d \Phi}{d t} = \zeta + \frac{2 a g t}{3 k k},$$

haeque formulae valebunt, quamdiu fuerit

$$\frac{d s}{d t} > \frac{a d \Phi}{d t}, \text{ hoc est } f - \frac{2}{3} g t > a \zeta + \frac{2 a a g t}{3 k k}$$

vnde

vnde ifta motus pars durabit per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, quo tempore elapſo motus fiet aequabilis, ita vt ſit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af + \zeta kk)}{aa + kk},$$

quae formula non amplius pendet a quantitate frictionis ſicque effectus frictionis in hoc tantum conſiſtit, vt quo maior ea fuerit, eo citius motus globi ad hanc aequabilitatem pertingat, quam ſimulac attigerit, globus deinceps perpetuo eundem motum ſit conſeruaturus.

§. 14. Cum igitur prior motus pars duret per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, interea globus percurret ſpatium

$$s = ft - \tfrac{1}{3}gtt = t(f - \tfrac{1}{3}gt).$$

Hoc ſpatium erit

$$s = \frac{3kk(f + a\zeta)(f(2aa + kk) + \zeta akk)}{4g(aa + kk)},$$

quo ergo percurſo motus demum euadet aequabilis. Totus autem angulus motu gyratorio interea abſolutus erit

$$\Phi = \zeta t + \frac{agtt}{3kk} = t\left(\zeta + \frac{agt}{3kk}\right) = \frac{3kk(f - a\zeta)(\zeta(aa + 2kk) + af)}{4g(aa + kk)^2},$$

quae formula per peripheriam circuli ſeu 2π diuiſa praebebit numerum reuolutionum integrarum, quas globus interea peregerit.

§. 15. Denotante P globi pondus ſeu maſſam, eius vis viua ipſo motus initio erit $P(ff + \zeta\zeta kk)$. Pro motu autem aequabili deinceps ſequente vis viua globi erit

$$P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2}\right)^2 = P\frac{d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk),$$

cuius ergo magnitudo erit $\frac{P(af + \zeta kk)^2}{aa + kk}$, quae ergo erit vis viua adhuc ſuperſtes, ſicque vis viua, quae in priore motus

tus parte interiit, erit $\frac{\mathfrak{P}kk(f-a\zeta)^2}{aa+kk}$, quae ergo ſemper erit poſitiua, niſi fuerit $f=a\zeta$, hoc eſt niſi motus globi ſtatim ab initio fuerit aequabilis, globusque ſtatim acceperit prouolutionem perfectam.

§. 16. Omnino autem Phaenomena prorſus ſingularia ſe prodent, quando motus gyratorius globo initio impreſſus in ſenſum contrarium verget, ita vt angulus ζ negatiuum obtinuerit valorem, ad quae Phaenomena inveſtiganda ponamus $\zeta=-\eta$, ita vt η fuerit celeritas angularis in ſenſum contrarium BAS globo impreſſa. Tum igitur, cum motus euaſerit aequabilis, fiet

$$\frac{ds}{dt}=\frac{a\,d\Phi}{dt}=\frac{a(af-\eta kk)}{aa+kk},$$

vnde patet, ſi fuerit $\eta=\frac{af}{kk}$, tum motum globi ad quietem redigi, id quod eueniet poſt tempus $t=\frac{\mathfrak{s}kk(f+\eta a)}{2g(aa+kk)}$, quo tempore globus conficiet ſpatium

$$s=\frac{\mathfrak{s}kk(f+\eta a)(f(2aa+kk)-\eta akk)}{4g(aa+kk)^2}.$$

Quia autem modo ſumſimus $\eta=\frac{af}{kk}$, illud tempus erit $\frac{\mathfrak{s}f}{2g}$, ſpatium autem percurſum $s=\frac{\mathfrak{s}ff}{4g}$, vbi notari meretur, quantitatem k ex calculo eſſe egreſſam; interim tamen in ipſo valore η, quem aſſumſimus, haec quantitas ineſt, quandoquidem ſumſimus $\eta=\frac{af}{kk}$; vnde ſi globus ex materia vniformi conſtet, ob $kk=\frac{2}{5}aa$ hoc Phaenomenon locum habebit ſi fuerit $\eta=\frac{5f}{2a}$, ideoque $\eta a=\frac{5}{2}f$, vbi ηa exprimit celeritatem motus gyratorii in ipſo contactu ſuper plano retro directam, quae ergo ſe ad celeritatem progreſſiuam habere debet vt 5 : 2.

§. 17.

§. 17. At ſi motus gyratorius initio impreſſus fuerit minor, ſiue $\eta < \frac{af}{kk}$, tum globus retinebit celeritatem quandam in motu aequabili, et phaenomena ſimilia erunt iis quae ante euoluimus. Verum ſi fuerit $\eta > \frac{af}{kk}$, motus globi ante ad quietem redigetur quam ſeſe ad aequabilitatem compoſuerit, id quod inde patet, quod pro motu aequabili prodeat

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af - \eta kk)}{aa + kk},$$

ideoque quantitas negatiua, ſcilicet motus aequabilis retro erit directus. Videamus igitur vbi globus incipiat fieri retrogradus, ſiue vbi celeritas globi progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ nihilo fiat aequalis, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3f}{2g}$, quod tempus minus eſt eo, quo motus euadit aequabilis, quippe quod erat $\frac{3kk(f + \eta a)}{2g(aa + kk)}$, propterea quod ηkk ſupponitur maius quam af. Spatium autem vsque ad punctum quietis percurſum erit $s = \frac{3ff}{4g}$, quod ergo non a quantitate celeritatis pendet. At vero ſpatium s, ubi motus aequabilis incipit, erit

$$s = \frac{3kk(f + \eta a)(f(2aa + kk) - \eta akk)}{4g(aa + kk)^2},$$

quod igitur ſpatium eſſe poterit vel poſitiuum vel negatiuum; poſitiuum ſcilicet erit quamdiu fuerit $\eta < \frac{f(2aa + kk)}{akk}$, hoc eſt quamdiu η continebitur intra limites $\frac{f(2aa + kk)}{akk}$ et $\frac{af}{kk}$. Sed motus poſt reuerſionem in ipſo puncto I incipiet retrouergere, quando fuerit $\eta = \frac{f(2aa + kk)}{akk}$; verum ſi η hunc valorem ſuperet, globus terminum initialem I transgredietur, antequam motus aequabilis incipiet.

Exemplum 4.

§. 18. Tribuamus primo globo duplicem motum initialem litteris f et ζ contentum; verum iam sit $a\zeta > f$, ita vt motus immediate subsequens referatur ad nostrum casum primum, vnde oritur

$$\frac{ds}{dt} = f + \tfrac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk},$$

qui motus ergo durabit, donec fiat

$$f + \tfrac{2}{3} g t = a\zeta - \frac{2aagt}{3kk},$$

ideoque $t = \frac{3kk(a\zeta - f)}{2g(aa + kk)}$, quo tempore elapso motus fiet vniformis, eritque

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af + \zeta kk)}{aa + kk},$$

qui ergo semper in consequentia tendet. Ante autem quam globus hunc terminum attingit, spatium tempore t percursum erit $s = ft + \tfrac{1}{3} g t t$, ergo totum spatium vsque ad aequabilitatem confectum erit

$$s = \frac{3kk(a\zeta - f)(f(2aa + kk) + a\zeta kk)}{4g(aa + kk)}.$$

Hinc autem singularia Phaenomena nulla se offerunt, nisi forte velimus celeritatem f negatiuam accipere. Verum talis hypothesis omnino foret superflua, quia tantum opus esset plagas dextrorsum et sinistrorsum inter se permutare, vnde motus ad casum ante tractatum reduceretur.

§. 19. Tandem cum hoc casu vis viua globo initio impressa sit $= P(ff + \zeta\zeta kk)$, vbi motus aequabilis fieri incipit, vis viua vt supra vidimus erit

$$\frac{P\,d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk) = \frac{P(af + \zeta kk)^2}{aa + kk},$$

quae cum sit vis viua post frictionis effectum residua, erit vis

vis viua per frictionem amissa $= \frac{Pkk(a\zeta - f)^2}{aa + kk}$. Hoc igitur pacto omnia phaenomena, quae in motu globi super plano locum inuenire possunt, satis dilucide exposuimus. Verum tamen perpetuo ista restrictio subintelligenda est, quod globo alius motus gyratorius non imprimatur, nisi circa axem horizontalem, eumque adeo ad directionem motus progressiui normalem. Quod si enim alios motus gyratorios admittere voluerimus, tota inuestigatio ad longe aliam Mechanicae partem reuolueretur, cuius principia in tractatu meo *De Motu Corporum Rigidorum* fusius pertractaui.

II. De motu globi super plano inclinato descendentis.

§. 20. Sit vt supra inclinatio plani ad horizontem $HIO = \omega$, globi pondus seu massa $= P$, radius $AC = a$ et momentum inertiae $= Pkk$; primo autem ponamus globum initio in I fuisse in perfecta quiete et elapso tempore t peruenisse in S, percurso spatio $IS = s$. Iam si nulla adesset frictio, globus rependo esset descensurus sine vllo motu gyratorio, eiusque motum expressum iri constat hac formula: $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega$, vnde primo deducitur eius celeritas progressiua $\frac{ds}{dt} = 2gt\sin.\omega$ et ipsum spatium percursum $s = gtt\sin.\omega$, ita vt futurum sit tempus $t = \sqrt{\frac{s}{g\sin.\omega}}$, hincque celeritas $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gs\sin.\omega}$, vbi $s\sin.\omega$ exprimit altitudinem lapsu confectam. Tum vero vis viua in S acquisita cum sit $= P\frac{ds^2}{dt^2}$, manifestum est vim viuam tempore t acquisitam fore $P.4ggtt.\sin.\omega^2$, quae per spatium ita exprimitur, vt sit $= P.4gs\sin.\omega$. Tab. II. Fig. 8.

Exem-

Exemplum I.

§. 21. Nunc admissa frictione consideremus conditiones, sub quibus globus sine vllo attritu voluendo descendet, ita vt sit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, et quia huiusmodi motus non totam vim frictionis exigit, quae est $\frac{1}{3}$ P cos. ω, sit eius portio ad hoc requisita $= \lambda$ P cos. ω, vnde motus his duabus formulis exprimetur:

$$\text{I. } \frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega - \lambda \cos.\omega.$$

$$\text{II. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a \cos.\omega}{kk}.$$

Sicque ob $dds = a\,dd\Phi$, per hypothesin, necesse est vt sit $\sin.\omega - \lambda \cos.\omega = \frac{\lambda a a \cos.\omega}{kk}$, ideoque

$$\lambda = \frac{kk \sin.\omega}{(aa+kk)\cos.\omega} = \frac{kk}{aa+kk} \text{ tang. } \omega,$$

quare cum λ non debeat excedere $\frac{1}{3}$, talis prouolutio perfecta locum habebit, quando fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, vnde duo casus perpendendi occurrunt, prout angulus ω fuerit vel minor vel maior isto valore assignato.

§. 22. Sit igitur tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, vt globus prouolutione perfecta descendat, et cum frictio sit vt vidimus $\lambda = \frac{kk \text{ tang. } \omega}{aa+kk}$, erit

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{aa \sin.\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a \sin.\omega}{aa+kk},$$

vnde integrando nanciscimur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2gaat \sin.\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat \sin.\omega}{aa+kk},$$

hincque porro $s = \frac{gaatt \sin.\omega}{aa+kk}$ et angulum $\Phi = \frac{gatt \sin.\omega}{aa+kk}$. Illa expressio dat $tt = \frac{(aa+kk)s}{gaa \sin.\omega}$, quare cum vis viua

sit

fit $\frac{P d \Phi^2}{d t^2}(aa + kk)$, per tempus t acquiritur haec vis viua: $\frac{P.4 g g aa tt \sin.\omega^2}{aa + kk}$, quae ergo minor eſt quam ſi frictio abeſſet idque in ratione $aa:(aa+kk)$. At vero dum globus percurrit ſpatium $= s$, vis viua quam acquiret erit $P.4 g s \sin.\omega$, quae ergo eadem eſt ac ſi nulla adeſſet frictio. In genere autem perpetuo tenendum eſt, quoties motus ſine attritu abſoluitur, tum ſemper eandem vim viuam generari, ac ſi plane nulla adeſſet frictio, id quod generaliter ita oſtendi poteſt.

Sint aequationes differentio-differentiales

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = Q - \lambda R \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a R}{kk},$$

ita vt ſit $ds = a\,d\Phi$. Iam cum ex poſteriore ſit

$$\frac{kk\,dd\Phi}{2g\,a\,dt^2} = \lambda R, \text{ erit addendo}$$

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,a\,dt^2} = Q;$$

haec aequatio ducatur in $2ds = 2a\,d\Phi$, vt fiat

$$\frac{2ds\,dds + 2kk\,d\Phi\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 2Q\,ds,$$

vnde integrando obtinemus

$$\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2} = 4g\int Q\,ds,$$

quae aequatio ſi per maſſam P multiplicetur, prior pars erit vis viua, quae ergo ſemper aequalis eſt $4gP\int Q\,ds$, prorſus vt regula principii virium viuarum poſtulat.

§. 23. *Caſus II.* Perpendamus nunc etiam alterum caſum, quo tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et quia tota vis frictionis impenditur, erit $\lambda = \frac{1}{3}$, ideoque

$$1^\circ.\ \frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\omega \text{ et}$$

$$2^\circ.\ \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\cos.\Phi}{3kk},$$

vnde

vnde colliguntur celeritates

$$\frac{ds}{dt} = 2gt \sin.\omega - \frac{2}{3} gt \cos.\omega \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt\cos.\omega}{3kk},$$

quarum illa maior erit quam ista. Tum vero porro erit

$$s = gtt\sin.\omega - \frac{1}{3} gtt\cos.\omega \text{ et } \Phi = \frac{agtt\cos.\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore fit $gtt = \frac{3s}{3\sin.\omega - \cos.\omega}$.

§. 24. Contemplemur nunc vim viuam tempore t acquisitam, scilicet $P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae euadet

$$P.4ggtt\left(\sin.\omega^2 - \frac{2}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{(aa+kk)\cos.\omega^2}{kk}\right),$$

quae expressio ad spatium s traducta praebet hanc expressionem:

$$P.\frac{12gs}{3\sin.\omega - \cos.\omega}\left(\sin.\omega^2 - \frac{2}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{aa+kk}{kk}\cos.\omega^2\right),$$

quae, vti perpendenti facile patebit, minor est quam si nulla esset frictio, hoc est minor quam $P.4gs\sin.\omega$.

§. 25. Quo hoc clarius appareat, constet globus ex materia vniformi, vt sit $kk = \frac{2}{5}aa$, et conditio inclinationis postulat vt sit $\tang.\omega > \frac{7}{6}$, hinc vis viua per spatium s acquisita erit

$$\frac{12gPs}{3\sin.\omega - \cos.\omega}\left(\sin.\omega^2 - \frac{2}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{7}{18}\cos.\omega^2\right),$$

sicque ostendi oportet esse

$$\frac{3}{3\sin.\omega - \cos.\omega}\left(\sin.\omega^2 - \frac{2}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{7}{18}\cos.\omega^2\right) < \sin.\omega,$$

hoc est

$$\sin.\omega^2 - \frac{2}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{7}{18}\cos.\omega^2 < \sin.\omega^2 - \frac{1}{3}\sin.\omega\cos.\omega, \text{ h. e.}$$

$$-\frac{1}{3}\sin.\omega\cos.\omega + \frac{7}{18}\cos.\omega^2 < 0, \text{ siue}$$

$$\frac{7}{18}\cos.\omega^2 < \frac{1}{3}\sin.\omega\cos.\omega, \text{ siue}$$

$\frac{7}{6}\cos.\omega$

$\frac{7}{8}$ cos. $\omega <$ sin. ω, ideoque tang. $\omega > \frac{7}{8}$, quae est ipsa conditio praescripta.

§. 26. *Casus III.* Consideremus etiam ipsum limitem, et sumamus

$$\text{tang. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk}, \text{ siue}$$

$$\text{sin. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk} \text{ cos. } \omega,$$

et in descensu ambae celeritates erunt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2gaat \text{ cos. } \omega}{3kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

sicque etiamnunc erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, quandoquidem haec inclinatio est maxima, sub qua globus sine attritu descendit, ideoque etiam per spatium s eadem vis viua acquiritur ac si frictio abesset.

§. 27. Quod si denique planum adeo verticaliter erigatur, vt sit $\omega = 90$, motus vtique ad casum nostrum posteriorem erit referendus; tum igitur erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Hoc scilicet casu nullus plane motus gyratorius orietur, quia, ob pressionem euanescentem, etiam nulla frictio locum habet, sed globus libere verticaliter descendit, vnde etiam vis viua nullam diminutionem patietur, quippe quae pro spatio percurso $= s$ erit P. $4gs$.

Exemplum 2.

§. 27. Ponamus nunc globo initio in I solum motum progressiuum fuisse impressum cum celeritate $= f$, et quia globus rependo descendere incipiet, statim se exeret

 tota

tota vis frictionis, vnde habebitur

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega \quad \text{et} \quad \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{fin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cof.}\,\omega \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}.$$

Hic autem motus diutius non durabit quam donec fiat $ds = a\,d\Phi$, vbi prouolutio perfecta incipiet; hoc igitur continget, quando fiet

$$f + 2gt\,\text{fin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cof.}\,\omega = \frac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

hoc eft elapfo tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

qui igitur cafus locum habere nequit, nifi fuerit

$$(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega > 3kk\,\text{fin.}\,\omega \quad \text{fiue}$$

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}.$$

Nam fi fuerit $\text{tang.}\,\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, motus nunquam plane ad prouolutionem perfectam redibit; vnde duos cafus euolui conueniet.

§. 29. *Cafus I.* Sit igitur primo $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$ et nofter globus voluendo defcendere incipiet elapfo tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

tum igitur eius celeritas progreffiua erit

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{3fkk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} = \frac{aaf\,\text{cof.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega},$$

ac celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af\,\text{cof.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega},$$

vnde

vnde patet fore $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, quare cum vis viua fit $\frac{P\,d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk)$, erit ea praesenti momento

$$= \frac{P\,aaff\,(aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega^2}{((aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)^2},$$

vnde haud difficulter iudicabitur, quantum vis viua ob frictionem fuerit diminuta.

§. 30. Quoniam igitur inuenimus, quonam temporis momento prouolutio perfecta incipiet; videamus etiam quantum spatium globus hucusque percurrerit. Hunc in finem, quia erat

$$\frac{ds}{dt} = f + 2g\,t\,\text{sin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}g\,t\,\text{cos.}\,\omega,$$

hinc nanciscimur integrando

$$s = ft + g\,tt(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega) = t\,(f + g\,t\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega)).$$

Fiat nunc

$$t = \frac{3fkk}{2g\,((aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)},$$

et alter factor euadet

$$\frac{(2aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kkf\,\text{sin.}\,\omega}{2((aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)},$$

vnde totum istud spatium percursum erit

$$s = \frac{3ffkk\,((2aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)}{4g\,((aa + kk)\,\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)^2}.$$

§. 31. Hinc si globum ex materia vniformi constare assumamus, vt sit $kk = \frac{2}{5}aa$; istud spatium ita prodit expressum: $\frac{9ff\,(2\,\text{cos.}\,\omega - \text{sin.}\,\omega)}{g\,(7\,\text{cos.}\,\omega - 6\,\text{sin.}\,\omega)^2}$, hoc autem spatio percurso prouolutio fiet perfacta et vterque motus vniformiter accelerabitur.

§. 32. *Casus II.* Sit nunc tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et iam vidimus, globum nunquam ad prouolutionem perfectam esse perventurum, vnde totus motus his formulis determinabitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{sin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cos.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

hincque denuo integrando fiet

$$s = ft + gtt\,\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}gtt\,\text{cos.}\,\omega \text{ et } \Phi = \frac{gatt\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

hoc igitur motu attritus perpetuo aderit cum celeritate

$$\frac{ds}{dt} - \frac{a\,d\Phi}{dt} = f + 2gt\left(\text{sin.}\,\omega - \left(\frac{aa+kk}{3kk}\right)\text{cos.}\,\omega\right),$$

quae ergo expressio, quia sin. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$ cos. ω, continuo crescet.

Exemplum 3.

§. 33. Ponamus globo initio in I impressum fuisse motum tantum gyratorium in sensum SAB, cum celeritate angulari $= \zeta$, ac manifestum est, saltem mox ab initio attritum fore retro directum, ita vt tota frictionis vis motui gyratorio sit contraria, motum vero progressivum acceleret, quandoquidem iste motus ad nostrum casum primum erit referendus, vnde habebimus

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{sin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{a\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando nanciscimur

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\left(\text{sin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega\right) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

huncque motum globus tamdiu prosequetur, quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2gaat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk} > 2gt\left(\text{sin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega\right),$$

quod eueniet quamdiu fuerit

$$t < \frac{a}{2g\left(\text{sin.}\,\omega + \left(\frac{aa+kk}{3kk}\right)\text{cos.}\,\omega\right)}, \text{ siue}$$

$t <$

$$t < \frac{3\zeta a k k}{2g(3kk\,\text{sin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cos.}\,\omega)}.$$

Semper ergo iste motus tandem ad prouolutionem perfectam pertinget, elapso scilicet tempore

$$t = \frac{3\zeta a k k}{2g(3kk\,\text{sin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cos.}\,\omega)}$$

tum enim euadet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\zeta a k k(\text{sin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega)}{3kk\,\text{sin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cos.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\zeta k k(\text{sin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega)}{3kk\,\text{sin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cos.}\,\omega}.$$

§. 34. Postquam autem globus ad hunc statum peruenerit, videamus, qua lege motum suum sit prosecuturus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia celeritatem angularem, vbi iste motus incipiet, esse $= \theta$, ita vt celeritas progressiua futura sit $= a\theta$, ac pro istius motus continuatione has habebimus formulas:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a\,\text{cos.}\,\omega}{kk},$$

vnde integrando colligimus

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt(\text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2g\lambda a t\,\text{cos.}\,\omega}{kk}$$

haecque prouolutio perfecta tamdiu durabit, quamdiu manere poterit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ita tamen, vt λ non vltra $\frac{1}{3}$ augeatur. Faciamus igitur $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ et prodibit ista aequatio:

$$2gt(\text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega) = \frac{2g\lambda a a t\,\text{cos.}\,\omega}{kk}, \text{ siue}$$

$$\text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega = \frac{\lambda a a\,\text{cos.}\,\omega}{kk},$$

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tag.}\,\omega$. Quod si ergo fuerit $\frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit, quod ergo eueniet, si fue-

fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ficque ifta conditio non amplius a quantitate θ pendet.

§. 35. Pro inclinationibus autem maioribus, vbi tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, pro motu inlequente valebunt iftae formulae:

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}$$

vbi ergo femper erit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, ideoque globus ita rependo defcendet, vt celeritas attritus deorfum vergat, cum ante hunc terminum furfum fuiffet verfa; fcilicet ante hunc terminum frictio defcenfum promouebat, in ipfo termino fubito euafit $= 0$, dehinc vero fubito motui fit contraria.

§. 36. Haec igitur exempla abunde fufficiunt, vt ex iis omnia Phaenomena, quae in motu globi fuper plano inclinato occurrere poffunt, explicare valeamus; vbi vidimus imprimis duos cafus diftingui conuenire, prout tangens inclinationis minor fuerit vel maior quam $\frac{aa+kk}{3kk}$. Interim tamen fingularia phaenomena fe manifeftare poffunt, quando inclinatio ω fupponitur negatiua et globus fuper plano inclinato furfum propellitur, quorum igitur indolem adhuc euoluemus, poftquam vnum cafum huc pertinentem adhuc fuerimus contemplati.

Exemplum 4.

§. 37. Cafus hic imprimis notatu dignus tum locum habet, quando globo in I motus gyratorius in contrarium fenfum, fcilicet B A S, fuerit impreffus, cuius celeritas angularis $= \eta$; vbi facile perfpicitur, vim frictionis retro

tro fore directam, ideoque tam motui progressiuo quam gyratorio contrariam, ex quo intelligitur, motum saltem ab initio his formulis expressum iri:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega \quad \text{et} \quad \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = + \frac{a\,\text{cos.}\,\omega}{3kk}$$

siquidem angulum Φ hic ita consideremus, quasi celeritate $\frac{d\Phi}{dt}$ in sensum S A B vergeret, quo casu vtique frictio retro vrgens motum accelararet, quia initio poni debet $\frac{d\Phi}{dt} = -\eta$. Hinc igitur integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega) \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk};$$

vnde patet, si fuerit sin. $\omega > \frac{1}{3}$ cos. ω, motum progressiuum deorsum ferri; sin autem fuerit sin. $\omega < \frac{1}{3}$ cos. ω tum globum retro esse ascensurum; si denique fuerit sin. $\omega = \frac{1}{3}$ cos. ω, motum progressiuum statim ab initio generari nullum, sed globum per aliquod tempus in puncto I esse mansurum, quem casum primo consideremus.

§. 38. *Casus I.* Ponamus igitur esse sin. $\omega = \frac{1}{3}$ cos. ω, siue tang. $\omega = \frac{1}{3}$, et cum hinc fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, hae formulae valebunt quamdiu fuerit $0 > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit $\frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk} < \eta$. Vnde patet, globum in puncto I mansurum esse per tempus $t = \frac{3\eta kk}{2ga\,\text{cos.}\,\omega}$, quoad scilicet totus motus gyratorius initio impressus fuerit extinctus, postmodum vero demum globus incipiet descendere et motus a quiete perfecta inchoabit, quem igitur globus modo in exemplo primo exposito prosequetur. Id igitur hic potissimum mirandum occurrit, quod globus ab initio per aliquod tempus quasi immotus in I persistat.

§. 39. *Casus II.* At si inclinatio plani minor fuerit scil. tang. $\omega < \frac{1}{3}$, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, globus retro ascendet, dum interea motus gyratorius impressus continuo decreuit, et istae formulae tamdiu valebunt, quamdiu fuerit

$$2gt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,\omega) > -a\eta + \tfrac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}, \text{ fiue}$$

$$a\eta > 2gt\left(\left(\tfrac{aa+kk}{3kk}\right)\text{cof.}\,\omega - \text{fin.}\,\omega\right)$$

qui ergo motus durabit per tempus

$$t = \tfrac{3\eta akk}{2g((aa+kk)\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

hocque tempore elapso erit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega}$$

quae vtraque celeritas ob $\text{fin}\,\omega < \frac{1}{3}\text{cof.}\,\omega$ erit negatiua, ficque globus etiamnunc sursum perget, neque etiamnunc motus gyratorius erit extinctus; interim tamen iam ab hoc momento prouolutio erit perfecta, eiusque motus his formulis continetur:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} + 2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega)$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} + \frac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

hacque lege motus continuabit, quamdiu manebit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, dum scilicet λ non maior euadit quam $\frac{1}{3}$. Constituta igitur hac aequalitate erit

$$2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega) = \tfrac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω. Hinc quia tang. $\omega < \frac{1}{3}$, valor ipsius λ multo magis erit minor, ideoque prouolutio perfecta perpetuo durabit. Cum autem, quando iste motus incipit, vtraque celeritas adhuc sit negatiua, ascensus durabit, donec fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, id quod eueniet elapso hinc tempore $t = \frac{\eta kk(aa+kk)(\text{cos}.\,\omega - 3\,\text{sin}.\,\omega)}{2ga\,\text{sin}.\,\omega((aa+kk)\text{cos}.\,\omega - 3kk\,\text{sin}.\,\omega)}$; tum vero post hoc momentum globus ex quiete per hoc planum descendet.

§. 40. *Casus III.* Consideremus nunc inclinationem maiorem, sitque tang. $\omega > \frac{1}{3}$, et motus ab initio his formulis continebitur:

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{sin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos}.\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{cos}.\,\omega}{3kk}.$$

Hicque motus durabit donec fiet

$$2gt(\text{sin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos}.\,\omega) = -a\eta + \frac{2gaat\,\text{cos}.\,\omega}{3kk},$$

vnde colligitur

$$a\eta = 2gt\left(\frac{(aa+kk)\text{cos}.\,\omega - 3kk\,\text{sin}.\,\omega}{3kk}\right),$$

vnde fit

$$t = \frac{3a\eta kk}{2g((aa+kk)\text{cos}.\,\omega - 3kk\,\text{sin}.\,\omega)}.$$

Scilicet per hoc tempus motus ille prior durabit, si fuerit $(aa+kk)\,\text{cos}.\,\omega > 3kk\,\text{sin}.\,\omega$, siue tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$. Cum autem per hypothesin sit tang. $\omega > \frac{1}{3}$, hoc tantum euenire poterit, si tang. ω contineatur intra hos limites: tang. $\omega > \frac{1}{3} < \frac{aa+kk}{3kk}$, alioquin motus ante determinatus perpetuo durabit.

§. 41. Quo autem videamus quid eueniat si tang. ω intra praedictos limites contineatur, breuitati consulentes considerabimus

mus casum specialem quo $kk = \frac{2}{5}aa$, vbi limites erunt tang $\omega > \frac{1}{3} < \frac{7}{6}$, quem in finem sumamus tang. $\omega = 1$ ideoque sin ω=cos. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ex his autem valoribus concludimus priorem motum durare per tempus $t = \frac{6\eta a}{g\sqrt{2}}$, quo elapso fiet $\frac{ds}{dt} = 4\,a\,\eta$ et $\frac{d\Phi}{dt}\,t = 4\,\eta$. Cum igitur elapso tempore t fiat $\frac{ds}{dt} = 4\,a\,\eta$ et $\frac{d\Phi}{dt} = 4\,\eta$, hunc statum tanquam initialem considerare licebit, in quo cum prouolutio perfecta eueniat, elapso hinc tempore t habebimus

$$\frac{ds}{dt} = 4\,a\,\eta + 2\,g\,t\,(\text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4\,\eta + \frac{2\,g\,\lambda\,a\,t\,\text{cos.}\,\omega}{kk},$$

vndo ponendo $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ fit

$$2\,g\,t\,(\text{sin.}\,\omega - \lambda\,\text{cos.}\,\omega) = \frac{2\,g\,\lambda\,a\,a\,t\,\text{cos.}\,\omega}{kk}, \text{ siue}$$

$$1 - \lambda = \frac{\lambda\,aa}{kk}, \text{ hinc } \lambda = \frac{kk}{aa+kk} = \frac{2}{7};$$

qui valor cum minor sit quam $\frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit.

III. De ascensu globi super plano inclinato.

Tab. II. Fig. 8. §. 42. Consideremus igitur planum IO, cuius inclinatio ad horizontem IH sit OIH = ω, vt ante, verum hoc discrimine, quod cum hic globus ab I versus O ascendat, in praecedentibus calculis etiam angulus ω tanquam negatiuus spectari debeat, sicque seueriores formulae etiamnunc hic locum habebunt, dummodo in iis loco sin. ω scribatur $-$ sin ω, manente cos. ω eiusdem signi. Quo obseruato peruenerit noster globus, elapso tempore $= t$, ex I vsque in S, ponaturque spatium IS $= s$, ita vt celeritas progressiua fit etiamnunc $\frac{ds}{dt}$, celeritas autem gyratoria $= \frac{d\Phi}{dt}$ in sensum SAB directa. Hic igitur ante omnia manifestum est

eſt, globum aſcendere plane non poſſe, niſi ipſi initio in I motus ſiue progreſſiuus ſiue gyratorius ſurſum tendens imprimatur, vnde hos caſus accuratius ſumus proſecuturi.

Exemplum I.

§. 43. Conſideremus primo caſum, quo globo in I ſolus motus progreſſiuus verſus O imprimitur, cuius celeritas ſit f, ita vt initio, quo $t = 0$, fuerit $\frac{ds}{dt} = f$ et $\frac{d\Phi}{dt} = 0$. Quia igitur in initio datur attritus, tota vis frictionis ſe exerit retrorſum, qua ergo motus progreſſiuus retardatur, ſimul vero gyratorius generatur in ſenſum S A B. Pro hoc igitur motu habebuntur iſtae formulae:

I. $\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\text{coſ.}\,\omega$ et

II. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = +\frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}$,

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt} = f - 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \frac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore porro colligitur

$$s = ft - gtt\,\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}gtt\,\text{coſ.}\,\omega.$$

Secundum hanc autem legem motus peragetur quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt quamdiu

$$f > 2gt\left(\text{ſin.}\,\omega + \frac{1}{3}\text{coſ.}\,\omega + \frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}\right) \text{ ideoque}$$

$$t < \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

durabit ergo iſte motus per tempus

$$t = \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

quo elapſo fiet celeritas progreſſiua

$$\frac{ds}{dt} = \frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega}$$

et

et celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af\,\cos.\omega}{3kk\,\sin.\omega + (aa + kk)\cos.\omega},$$

ſpatium vero vsque ad hoc tempus percurſum erit

$$s = \frac{3ffkk\,(3kk\,\sin.\omega + (2aa + kk)\cos.\omega)}{4g\,(3kk\,\sin.\omega + (aa + kk)\cos.\omega)^2}.$$

§. 44. Quoniam hae tres formulae valores habent poſitiuos, intelligitur, per totum hoc tempus motum manere ſurſum directum ſimulque globum etiam antrorſum volui, quaecunque fuerit plani inclinatio. Quod ſi ergo globus ex materia conſtet homogenea, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, in fine huius primi motus interualli tres valores inuenti erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{5f\cos.\omega}{6\sin.\omega + 7\cos.\omega};$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{5f\,\cos.\omega}{6a\,\sin.\omega + 7a\cos.\omega};$$

$$s = \frac{9ff(\sin.\omega + 2\cos.\omega)}{g\,(6\sin.\omega + 7\cos.\omega)^2},$$

tempus autem per quod iſte motus durabit erit

$$t = \frac{3f}{g\,(6\sin.\omega + 7\cos.\omega)}.$$

Ac ſi inſuper ſumamus inclinationem $\omega = 45°$, fiet iſtud tempus

$$t = \frac{3f\sqrt{2}}{13g}\text{ ſec. et } \frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = \frac{5}{13}f,\text{ atque } s = \frac{27ff\sqrt{2}}{169.g}.$$

§. 45. Quo nunc motum globi deinceps ſecuturum clarius exponamus, ſit K locus, quousque globus illo primo temporis interuallo pertigerit, ac vocemus breuitatis gratia $IK = p$, vt ſit

$$p = \frac{3ffkk\,(3kk\,\sin.\omega + (2aa + kk)\cos.\omega)}{4g\,(3kk\,\sin.\omega + (aa + kk)(\cos.\omega)^2},$$

quod ergo tempore

$=3f$

$$= \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega)},$$

erit percurſum. In K autem vocemus celeritatem progreſſiuam $= q$, ita vt celeritas gyratoria $= \frac{q}{a}$, eritque

$$q = \frac{aaf\,\text{cof.}\,\omega}{3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega};$$

quibus conſtitutis ſequentem motum ita inquiramus, quaſi globus in puncto K moueri incepiſſet hincque elapſo tempore t peruenerit in S, vt ſit KS $= s$ et celeritates in hoc loco $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$. Hunc igitur motum inueſtigari nobis nunc nobis eſt propoſitum, vbi tempus per ſpatium KS elapſum littera t deſignabimus, quandoquidem motus iſte longe aliam legem ſequetur ac prior, ideoque etiam diuerſam indolem habebit, ita vt in termino K principium continuitatis ſubito interrumpatur.

§. 46. Quia in k motus globi ſe ad prouolutionem perfectam compoſuit, ante omnia nobis erit inquirendum, quamdiu iſte motus ſit duraturus, atque pro iſto motu habebimus ſequentes formulas:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\,\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega \quad \text{et} \quad \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde integrando colligitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt(\text{fin.}\,\omega + \lambda\,\text{cof.}\,\omega) \quad \text{et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} + \frac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk}.$$

Quare ſi ſtatuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, erit $-\,\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega = \frac{\lambda aa\,\text{cof.}\,\omega}{kk}$, vnde ſit $\lambda = \frac{-kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega$, qui valor cum ſit negatiuus, intelligitur, frictionem vim negatiuam exerere debere, vt attritus impediatur, quam vim actu exercebit dummodo fuerit $\lambda < \frac{1}{3}$ h. e., dummodo fuerit $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ſicque

hic

hic denuo duo casus perpendendi occurrunt, prouti fuerit

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk} \text{ vel tang.}\,\omega > \frac{aa+kk}{3kk},$$

quos ergo casus seorsim euolui conueniet.

§. 47. *Casus I.* Sit igitur primo tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ac revera erit $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega$, quo valore substituto fiet

$$\frac{ds}{dt} = q - \frac{2gaat\,\text{sin.}\,\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{sin.}\,\omega}{aa+kk},$$

vnde cum perpetuo maneat $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, globus prouolutione perfecta progredi perget, neque vllus attritus sese immiscebit. Spatium autem KS$=s$, quod globus tempore quouis t percurret, erit $s = qt - \frac{gaatt\,\text{sin.}\,\omega}{aa+kk}$.

§. 48. Postquam igitur globus hoc modo ex puncto K exiit, tamdiu sursum versus O progredietur, donec eius celeritas progressiua $\frac{ds}{dt}$ penitus euanescat, id quod eveniet elapso tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{sin.}\,\omega}$, quo ergo tempore spatium percursum erit $s = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{sin.}\,\omega}$. Quare si L fuerit terminus, ad quem globus hoc motu pertingere valeat, erit spatium KL$= \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{sin.}\,\omega}$, tempus vero, quo ex K ad L perueniet erit $\frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{sin.}\,\omega}$. Quia autem in L omnem plane motum amisit, ex hoc puncto iterum per planum inclinatum LKI descendere incipiet, lege ea quam supra §. 21 et seqq. ostendimus, et quia tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, totus descensus subsequens sine vllo attritu peragetur.

§. 49. Quo igitur istum terminum L, quousque globus ascendendo pertingit, clarius cognoscamus, perinde ac ac tempus, quo ab initio ex I vsque ad L peruenit, loco litterarum p et q valores assumtos restitui oportet. Cum igitur sit Tab. II. Fig. 9.

$$q = \frac{aaf\cos.\omega}{3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega},$$

erit spatium

$$KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\sin.\omega} = \frac{aaff(aa+kk)\cos.\omega^2}{4g\sin.\omega(3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega)^2},$$

cui si addatur spatium

$$KI = p = \frac{3ffkk(3kk\sin.\omega + (2aa+kk)\cos.\omega)}{4g(3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega)^2},$$

reperietur spatium

$$IL = \frac{ff(aa\cos.\omega + 3kk\sin.\omega)}{4g\sin.\omega(3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega)};$$

vbi notasse iuuabit, si globus celeritate f sine vlla frictione super plano inclinato ascenderet, tum eum spatium confecturum esse $= \frac{ff}{4g}\sin.\omega$; vnde patet, spatium inuentum IL hoc spatio esse minus. Denique vero tempus, quo noster globus spatium totum IKL absoluet, reperietur, si ad tempus per IK, quod erat

$$= \frac{2fkk}{2g(3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega)},$$

addatur tempus per KL

$$= \frac{f(aa+kk)\cos.\omega}{2g\sin.\omega(3kk\sin.\omega + (aa+kk)\cos.\omega)},$$

quocirca colligitur tempus per $IL = \frac{f}{2g\sin.\omega}$; vnde patet, hoc tempus non discrepare ab eo, quod globus impendisset, si libere sine vlla frictione ascendisset; tum autem eodem tempore ad maiorem pertigisset altitudinem.

§. 50. *Casus II.* Euoluamus nunc etiam alterum casum, quo $\text{tang.}\,\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, vbi loco λ in nostris formulis scribi oportet $-\frac{1}{3}$, vnde sequitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk};$$

vnde patet fore

$$\frac{ds}{dt} : \frac{a\,d\Phi}{dt} = q - 2gt\,(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) : q - \frac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

tum vero erit

$$\frac{ds}{dt} - \frac{a\,d\Phi}{dt} = 2gt\left(\frac{(aa+kk)}{3kk}\,\text{cof.}\,\omega - \text{fin.}\,\omega\right),$$

qui valor cum fit negatiuus, motus globi eandem legem fequetur, quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, id quod cum deinceps perpetuo eueniat, globus etiam, poftquam per K tranfiit, eandem legem in motu fuo obferuabit, ita vt elapfo tempore t ambae celeritates futurae fint

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

et tempore t globus conficiet fpatium

$$KS = s = qt - gtt\,(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega).$$

§. 51. Sit punctum L iterum terminus ad quem globus afcendendo pertinget, et quia hic effe debet $\frac{ds}{dt} = 0$, tempus, quo globus ex K vsque ad L perueniet, erit

$$t = \frac{q}{2g\,(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)},$$

ipfum vero fpatium erit

$$KL = s = \frac{qq}{4g\,(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}.$$

Totum ergo tempus, quo globus ex I ad L vsque pertingit, erit

$$+ \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$

$$+ \frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$

$$= \frac{f(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa-kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}.$$

§. 52. Verum vbi globus in L vsque peruenit, ibi quidem celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ fiet nulla, at celeritas gyratoria ipſi adhuc remanebit, quae erit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{aq\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},\ \text{ſiue}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a}\cdot\frac{(3kk\,\text{ſin.}\,\omega - (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{3kk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

quae ergo celeritas adhuc eſt poſitiua, quia

$$3kk\,\text{ſin.}\,\omega > (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega,$$

ideoque multo magis $\text{ſin.}\,\omega > \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega$. Mox autem cum globus ex L iterum deſcendere inceperit, is amittet hunc motum gyratorium, quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3qkk}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega}$, poſtquam ſcilicet ex K fuerit egreſſus. Quod ſi ergo hinc ſubtrahatur tempus per $KL = \frac{q}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}$, remanebit tempus poſtquam globus ex L deſcendere incepit

$$= \frac{3q(3kk\,\text{ſin.}\,\omega - (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega\,(3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega)},$$

quod tempus vtique eſt poſitiuum. Ceterum, quia hic globus ex L cum quadam celeritate gyratoria deſcenſum incipiet, eodem prorſus modo per planum inclinatum deſcen-

dit,

dit, quem supra paragrapho 21 et seqq. explicauimus. Verum quoniam totus motus globi, postquam per punctum K transiit, perpetuo secundum eandem legem peragitur, etiam totus motus in iisdem formulis, quas modo tradidimus, comprehendetur, ex quibus, cum sit

$$KS = s = qt - gtt\,(\sin.\,\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\,\omega),$$

posito $s = 0$ hinc tempus reperietur, quo globus iterum descendendo ad K perueniet, quod erit $= \frac{q}{g(\sin.\omega - \frac{1}{3}\cos.\omega)}$, quod tempus duplo maius est eo, quo ex K ad L vsque descendendo pertigit, atque hoc modo etiam tempus definiri poterit, quo globus, ex K sursum egressus, iterum vsque ad principium I pertinget; tantum enim opus erit poni $s = -p$. Ac si ad hoc tempus insuper addatur tempus, quo globus ab I vsque ad K peruenit, habebitur totum tempus, quo postquam ex I sursum processit, iterum ad I reuertitur.

Exemplum 2.

Tab. II. Fig. 9 §. 53. Ponamus nunc globo in I nullum motum progressiuum esse impressum, sed solum motum gyratorium, sursum vergentem cum celeritate data angulari $= \zeta$, ita vt initio, vbi $t = 0$, fuerit $\frac{ds}{dt} = 0$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta$. Quoniam igitur statim ab initio vis frictionis sursum tendit, formulae nostrae erunt

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\sin.\,\omega + \tfrac{1}{3}\cos.\,\omega \text{ et}$$
$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{a\cos.\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt} = -2gt\,(\sin.\,\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\cos.\,\omega}{3kk},$$

vbi

vbi ex formula priore patet, globum non ascendere posse, nisi sit $\sin.\,\omega < \frac{1}{3}\cos.\,\omega$. Quoniam igitur motum descensus iam supra determinauimus, ponamus esse $\sin.\,\omega < \frac{1}{3}\cos.\,\omega$, seu $\tang.\,\omega < \frac{1}{3}$, vt globus saltem sursum moueri incipiat; tum igitur ipso initio fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, et videamus, quamdiu ista conditio locum sit habitura: tamdiu enim etiam motus secundum has formulas peragetur. Hunc in finem statuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ hoc est

$$2gt\left(\tfrac{1}{3}\cos.\,\omega - \sin.\,\omega\right) = \zeta a - \frac{2g\,aat\cos.\,\omega}{3kk},$$

vnde colligimus

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\cos.\,\omega - 3kk\sin.\,\omega)},$$

quod ergo tempus erit positiuum, dummodo fuerit

$$\tang.\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk};$$

quare cum per hypothesin sit $\tang.\,\omega < \frac{1}{3}$, ista conditio semper adimplebitur, vnde motus ab initio eandem legem sequetur, vsque ad tempus

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\cos.\,\omega - 3kk\sin.\,\omega)};$$

elapso autem hoc tempore fiet

$$\frac{ds}{dt} = +\frac{\zeta akk(\cos.\,\omega - 3\sin.\,\omega)}{(aa+kk)\cos.\,\omega - 3kk\sin.\,\omega} = \frac{a\,d\Phi}{dt},$$

spatium vero interea ascendendo confectum erit

$$gtt\left(\tfrac{1}{3}\cos.\,\omega - \sin.\,\omega\right) = \frac{9\zeta\zeta aak^4\left(\tfrac{1}{3}\cos.\,\omega - \sin.\,\omega\right)}{4g((aa+kk)\cos.\,\omega - 3kk\sin.\,\omega)^2}.$$

§. 54. Statuamus vt supra, hoc tempore

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\cos.\,\omega - 3kk\sin.\,\omega)}$$

globum ascendendo peruenisse vsque in K, ac ponamus breuitatis

vitatis

vitatis gratia hoc ſpatium $IK = p$, celeritates vero quas globus hic habebit, ſint

$$\frac{ds}{dt} = q \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a}, \text{ ita vt ſit}$$

$$p = \frac{3\zeta\zeta aak^4 (\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{4g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)^2} \text{ et}$$

$$q = \frac{\zeta akk (\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega},$$

et quia ab hoc termino t vlterius progrediendo nullus datur attritus, motus ſequetur has formulas:

$$\frac{dds}{2gdt^2} = \lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{\lambda a\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

hincque integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = q + 2gt(\lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2g\lambda at\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}.$$

Nunc igitur fiat $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, vt videamus quamdiu prouolutio perfecta ſit duratura, eritque hinc

$$\lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega = -\frac{\lambda aa\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega,$$

qui valor ob $\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$ multo magis ſemper erit $< \frac{1}{3}$, ideoque prouolutio perfecta, poſtquam globus ad K pertigerit, perpetuo durabit, eritque propterea

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = q - \frac{2gaat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk},$$

haec autem celeritas euaneſcet, quod fiat in L, elapſo tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$, ipſum vero ſpatium percurſum erit $KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$. Omnia ſcilicet perinde ſe habebunt atque in caſu praecedente, hoc tantum diſcrimine, quod hic litterae p et q per ζ definiantur cum ante per f eſſent definitae.

§. 55.

§. 55. Hinc igitur facile obtinebimus tempus, quo globus ab I per K vsque ad L peruenit, quippe quod, si loco q valorem assumtum restituamus, reperietur

$$= \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)} + \frac{\zeta kk(aa+kk)(\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{2ga\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)}$$

hoc est $= \frac{\zeta kk}{2ag\sin.\omega}$.

Sicque globus eodem tempore omnem motum amittet, quo, si nulla fuisset frictio, motum amissurus fuisset; praeterea vero totum spatium prodit

$$\mathrm{IL} = \frac{3\zeta\zeta aak^4(\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{4g((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)^2} + \frac{\zeta\zeta k^4(aa+kk)(\cos.\omega - 3\sin.\omega)^2}{4g\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk(\sin.\omega)^2}$$

siue

$$\mathrm{IL} = \frac{\zeta\zeta k^4(\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{4g\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)}.$$

§. 56. In his igitur casibus id imprimis notatu dignum occurrit, quod totus motus non secundum eandem legem absoluatur, sed duabus quasi partibus constet, quarum indoles per diuersas formulas analyticas exprimatur, ita vt principium continuitatis, quod alias in omnibus naturae phaenomenis strictissime obseruatur, hic nullum locum inueniat; atque haec est caussa, cur ista phaenomena, quae in motu globorum ob frictionem producuntur, fusius et adcuratius euoluenda sim arbitratus, ne memorato illi principio continuitatis, quod a Philosophis tantopere propugnari solet, nimium tribuatur quam par est. Ceterum hic etiam constitueram eiusmodi globorum motum expendere, quorum centrum grauitatis non in ipsum centrum figurae cadit. Verum quia praesens tractatio iam nimium increuit, hoc argumentum in aliam occasionem reseruabo.

APPLI-