METHODVS FACILIS OMNIA SYMPTOMATA LINEARVM CVRVARVM NON IN EODEM PLANO SITARVM INVESTIGANDI.

Dissertatio prior.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Symptomata linearum curuarum, quae non totae in eodem plano iacent, et a Geometris lineae duplicis curuaturae vocari solent, iam pridem quidem definita reperiuntur: verum analysis, qua ea sunt inuestigata, figuris tantopere perplexis innituntur, vt non solum summam attentionem, sed etiam maximam circumspectionem requirant, ne repraesentatio quantitatum differentialium, atque adeo differentialium secundi gradus, imaginationem confundat et in errores ſeducat. Quamobrem ſaepe et multum mecum cogitaui, annon eadem ſymptomata methodo faciliori ex primis elementis deriuari queant, ita vt non opus ſit figuras tantopere complicatas et propemodum inextricabiles conſiderare. His omnibus difficultatibus probe perpenſis tandem perſpexi, totum negotium ſatis commode ad Trigonometriam ſphaericam reuocari atque adeo multo plenius tractari poſſe, quam quidem methodo vulgari fieri licet.

§. 2. Ante autem indolem harum linearum curuarum, in genere ſaltem, more ſolito conſiderari conueniet, quam totam quaeſtionem ad doctrinam ſphaericam transferre queamus. Conſtitutis igitur pro lubitu ternis axibus inter ſe normalibus O A, O B, O C, in puncto fixo O concurrentibus, ſit Z punctum quodcunque talis curvae, cuius ſitus determinetur per ternas coordinatas

Tab. I. Fig. 5.

$$OX = x,\ XY = y,\ YZ = z,$$

axibus illis parallelas, inter quas duabus aequationibus opus erit ad indolem curuae propoſitae exprimendam, quoniam pro quauis abſciſſa $OX = x$, vtraque reliquarum y et z aſſignari debet, vt punctum Z determinatum locum obtineat. Omnes autem quaeſtiones, quae circa tales curuas proponi poſſunt, in genere huc redeunt, vt primo pro quovis puncto Z poſitio tangentis reſpectu ternorum axium definiatur. Deinde vero etiam bina curuae elementa contigua conſiderari debent, quae, quatenus non in directum iacent, certum planum determinabunt, cuius poſitionem reſpectu axium, vel reſpectu ternorum planorum A O B, B O C et C O A inueſtigari oportet. Denique etiam neceſſe

cesse est, vt radius curuaturae pro talibus binis elementis exploretur, eiusque non solum quantitas, sed etiam positio respectu ternorum axium assignetur. Euidens autem est, has posteriores determinationes differentialia secundi gradus inuoluere, quorum repraesentatio in figura taediosam attentionem postulare solet.

§. 3. Ante omnia autem conueniet calculum ita exsequi, vt nulli ternorum axium prae reliquis vlla praerogatiua tribuatur, atque omnia pari modo ad vnumquemque referri queant. Hunc in finem ipsum arcum curuae, quem vocemus $= s$, tanquam praecipuam variabilem in calculum introducamus, ad eamque omnes reliquas variabiles reuocemus; ita vt omnes tanquam functiones ipsius s spectari queant. Hunc in finem statuamus statim ab initio $dx = p\,ds$, $dy = q\,ds$ et $dz = r\,ds$, vnde cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, erit $pp + qq + rr = 1$, ideoque differentiando $p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$. Tum vero nihil impedit, quo minus elementum ds pro constante accipiamus, quandoquidem aequaliter ad singulos axes refertur, vnde nanciscemur differentialia secundi gradus $ddx = dp\,ds$; $ddy = dq\,ds$ et $ddz = dr\,ds$, sicque hoc modo differentialia secunda penitus euitabimus.

§. 4. Consideremus nunc seorsim elementum curuae $Zz = ds$, quod quomodo ad ternos nostros axes se habeat videamus. Hunc in finem ex puncto Z ducamus rectas Zp, Zq et Zr, axibus parallelas, et ipsum elementum Zz erit diagonalis parallelepipedi a ternis lateribus Tab. I. Fig. 6.

 Zp

$$Zp = dx = p\,ds,\quad Zq = dy = q\,ds \text{ et } Zr = dz = r\,ds,$$

formati; vnde patet ipſum elementum Zz ad directionem Zp ita inclinari, vt anguli zZp coſinus ſit $= p$, anguli vero zZq coſinus $= q$ et anguli zZr coſinus $= r$, vnde etiam horum angulorum ſinus definire licebit, ita vt hinc nacturi ſimus

$$\text{coſ.}\, zZp = p;\ \text{ſin.}\, zZp = \surd(1 - pp) = \surd(qq + rr);$$
$$\text{coſ.}\, zZq = q;\ \text{ſin.}\, zZq = \surd(1 - qq) = \surd(pp + rr);$$
$$\text{coſ.}\, zZr = r;\ \text{ſin.}\, zZr = \surd(1 - rr) = \surd(pp + qq).$$

Hae ergo formulae ſimul monſtrabunt poſitionem tangentis curuae in Z reſpectu ternorum axium. Scilicet iſta tangens in puncto Z inclinabitur ad axem O A angulo cuius coſ. $= p$ et ſin. $= \surd(qq + rr)$; ad axem O B angulo cuius coſinus $= q$ et ſinus $= \surd(pp + rr)$; ad axem O C angulo cuius coſinus $= r$ et ſinus $= \surd(pp + qq)$. Sicque iam primo requiſito circa poſitionem tangentium curuae reſpectu axium principalium ſatisfecimus, neque adhuc opus fuerat ad doctrinam ſphaericam confugere.

Tab. I. Fig. 7. §. 5. Concipiatur nunc ſphaera circa punctum Z deſcripta, quod quidem in figura non apparet, ad cuius ſuperficiem ducti intelligantur terni radii axibus principalibus O A, O B, O C paralleli, qui ſuperficiem ſecent in punctis a, b, c. Hoc modo, ductis circulis maximis ab, ac, bc orietur triangulum ſphaericum abc, cuius ſingula latera erunt quadrantes et anguli a, b, c recti. Tum vero ex centro Z ſecundum tangentem noſtrae cur-

uae

uae in puncto Z educatur radius Zz in superficie designans punctum z, vnde si ad angulos ducantur arcus za, zb, zc, ii metientur inclinationem tangentis Zz, ad ternos axes Za, Zb, Zc, ideoque erit

$$\operatorname{cof.} az = p;\ \operatorname{fin.} az = \sqrt{(1-pp)} = \sqrt{(qq+rr)};$$
$$\operatorname{cof.} bz = q;\ \operatorname{fin.} bz = \sqrt{(1-qq)} = \sqrt{(pp+rr)} \text{ et}$$
$$\operatorname{cof.} cz = r;\ \operatorname{fin.} cz = \sqrt{(1-rr)} = \sqrt{(pp+qq)}.$$

Praeterea vero si arcus az, bz, cz concipiantur producti vsque ad latera opposita, singuli erunt quadrantes, vnde patet, tangentem Zz ad planum aZb siue ad planum AOB (*Fig.* 5.) inclinari sub angulo cuius sinus $= r$; ad planum autem BOC sub angulo cuius sinus $= p$, et ad planum AOC sub angulo cuius sinus $= q$. Hic quidem radium sphaerae tanquam vnitate expressum spectamus, quod tamen non impedit, quo minus deinceps radius ipsi elemento curuae $Zz = ds$ aequalis statuatur.

§. 6. Hoc modo totum nostrum triangulum sphaericum abc diuidetur in tria triangula sphaerica abz, acz et bcz, in quibus dantur terna latera, vnde ex triangulo baz colligetur

$$\operatorname{cof.} baz = \frac{\operatorname{cof.} bz + \operatorname{cof.} ab \operatorname{cof.} az}{\operatorname{fin.} ab \operatorname{fin.} az} = \frac{q}{\sqrt{(qq+rr)}}.$$

Simili modo ex triangulo caz erit $\operatorname{cof.} caz = \frac{r}{\sqrt{(qq+rr)}}$. Quia vero angulus bac est rectus, erit

$$\operatorname{fin.} baz = \operatorname{cof.} caz = \frac{r}{\sqrt{qq+rr}},$$

vnde sequitur fore

$$\operatorname{tang.} baz = \frac{r}{q} \text{ hincque } \operatorname{tang.} caz = \frac{q}{r}.$$

Eo-

Eodem modo erit

$$\text{tang. } abz = \frac{r}{p} \text{ et tang. } cbz = \frac{p}{r};$$
$$\text{tang. } bcz = \frac{p}{q} \text{ et tang. } acz = \frac{q}{p}.$$

§. 7. Quod si iam quantitates p, q et r suis differentialibus augeamus, perueniemus ad positionem sequentis tangentis respectu axium fixorum. Hoc igitur facto transferatur in figura punctum z in punctum z', eritque radius Zz' positio sequentis elementi curuae, seu potius sequens elementum parallelum erit huic radio Zz', et arculus infinite paruus zz' dabit inclinationem binorum elementorum curuae contiguorum, vnde statim colligetur radius curuaturae horum elementorum. Si enim radius osculi curuae dicatur $= R$, quoniam hinc inclinatio horum elementorum est $\frac{ds}{R}$, erit vtique $\frac{ds}{R} = zz'$, ideoque $R = \frac{ds}{zz'}$. Praeterea vero, quia sequens elementum parallelum est radio zz', dum radius Zz refert prius elementum, ambo haec elementa sita erunt in plano zZz', siue particula zz' continuata praebebit circulum maximum cum isto plano conuenientem, cuius ergo inclinationem ad terna plana principalia per arcus ab, ac, bc determinata assignare licebit.

§. 8. Ad haec expedienda vocemus arcum $az = \alpha$, vt sit cos. $\alpha = p$, eritque arcus $az' = \alpha + d\alpha$, et ducto perpendiculo zs in arcum az', vt fiat $as = az = \alpha$, erit particula $sz' = d\alpha$; quia autem α est arcus cuius cosinus $= p$, erit $d\alpha = -\frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = -\frac{dp}{\sqrt{qq+rr}}$. Simili modo vocemus angulum $baz = \omega$, eritque angulus $baz' = \omega + d\omega$, ideoque angulus elementaris $zaz' = d\omega$; quia vero ω denotat angulum cuius tangens est $\frac{r}{q}$, erit $d\omega = \frac{qdr - rdq}{qq+rr}$, qui ductus in sinum arcus $az = \sqrt{(qq+rr)}$, praebebit elemenmentum $zs = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{(qq+rr)}}$. Hoc igitur modo in triangulo characteriſtico ad s rectangulo zsz', ob cathetos sz et sz' datos colligetur

$$(zz')^2 = \frac{qqdr - 2qrdqdr + rrdq^2 + dp^2}{qq+rr}.$$

Quia autem eſt

$$pdp + qdq + rdr = 0, \text{ erit}$$

$$qdq + rdr = -pdp \text{ ideoque}$$

$$qqdq^2 + 2qrdqdr + rrdr^2 = ppdp^2,$$

vnde fit

$$2qrdqdr = ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2,$$

qui valor ſupra ſubſtitutus dabit

$$(zz')^2 = \frac{(qq+rr)dr^2 + (qq+rr)dq^2 + dp^2(1-pp)}{qq+rr}.$$

Quia igitur eſt $1 - pp = qq + rr$, fiet

$$(zz')^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 \text{ ideoque}$$

$$zz' = \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

§. 9. Hoc igitur elemento zz' inuento reperitur radius oſculi curuae $R = \frac{ds}{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}$; quare cum poſuerimus $p = \frac{dx}{ds}$, $q = \frac{dy}{ds}$, $r = \frac{dz}{ds}$, ſumto elemento ds conſtante fiet $dp = \frac{ddx}{ds}$, $dq = \frac{ddy}{ds}$, $dr = \frac{ddz}{ds}$, ſicque habebimus:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}.$$

Verum ſi nullum elementum pro conſtante habeatur, vt fiat

$$dp = \frac{ddx}{ds} - \frac{dxdds}{ds^2},$$

$$dq = \frac{ddy}{ds} - \frac{dydds}{ds^2},$$

$$dr = \frac{ddz}{ds} - \frac{dzdds}{ds^2},$$

 erit

erit

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = \frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}{ds^2}$$
$$- \frac{2dds\,(dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz)}{ds^3} + \frac{dds^2\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds^4},$$

vbi ob $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et

$$dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = ds\,dds,$$

haec formula tranſibit in hanc:

$$\frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}{ds^2},$$

atque hinc expreſſio generalis, nullo elemento pro conſtante aſſumto, pro radio oſculi erit

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2)}},$$

quae formula per Analyſin communem demum poſt calculos maxime perplexos eſt eruta.

§. 10. Quo nunc etiam poſitionem plani, in quo bina curuae elementa proxima ſunt ſita, inueſtigemus: in triangulo characteriſtico $zz's$ quaeratur angulus $zz's$, atque ex omnibus eius lateribus cognitis concludimus ſequentes formulas:

$$\text{ſin.}\, zz's = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\, zz's = \frac{-dp}{\sqrt{(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}, \text{ hincque}$$
$$\text{tang.}\, zz's = \frac{r\,dq - q\,dr}{dp},$$

atque hae eaedem formulae valebunt pro angulo quem particula zz' retrocontinuata cum arcu az conſtituet, quandoquidem z et z' infinite parum diſcrepant.

Tab. I. Fig. 8. §. 11. Producatur nunc vtcunque elementum zz' inuentum, donec latera noſtri trianguli abc ſecet in punctis

ctis q, r et p, et modo vidimus, si angulum $a z r$ vocemus $= \Phi$, fore

$$\text{sin.}\ \Phi = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}};$$
$$\text{cos.}\ \Phi = \frac{-d\,p}{\sqrt{(q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\ \Phi = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{d\,p},$$

atque hinc definiri oportet primo ipsa puncta p, q, r, vbi iste arcus terna latera nostri trianguli secat, deinde etiam angulos, quos ille in his punctis cum lateribus constituit. Quo hoc facilius expediri possit, ex puncto a in arcum $q\,r\,p$ ducamus arcum $a\,m$, qui productus lateri $b\,c$ occurrat in n, et in triangulo rectangulo $a\,z\,m$ cum latere $a\,z$ datur angulus $a\,z\,m$, vnde inuenitur

$$\text{sin.}\ a\,m = \text{sin.}\ a\,z\ \text{sin.}\ a\,z\,m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\ z\,m = \text{tang.}\ a\,z\ \text{cos.}\ a\,z\,m = \frac{d\,p}{p\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

denique erit

$$\text{tang.}\ z\,a\,m = \frac{1}{\text{cos.}\ a\,z\ \text{tang.}\ a\,z\,m} = \frac{d\,p}{p(q\,d\,r - r\,d\,q)}.$$

Supra autem vidimus esse tang. $z\,a\,b = \frac{r}{q}$, vnde fit tangens summae horum angulorum, seu

$$\text{tang.}\ b\,a\,m = \frac{p\,r\,(q\,d\,r - r\,d\,q) + q\,d\,p}{p\,q\,(q\,d\,r - r\,d\,q) - r\,d\,p},$$

cuius numerator ob $r\,d\,r = -p\,d\,p - q\,d\,q$, reducitur ad hanc formam: $(q\,q + r\,r)(q\,d\,p - p\,d\,q)$, denominator vero ad hanc $(q\,q + r\,r)p\,d\,r - r\,d\,p)$, vnde fit

$$\text{tang.}\ b\,a\,m = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{p\,d\,r - r\,d\,p},$$

et quia angulus $b\,a\,c$ est rectus, erit

$$\text{tang.}\ m\,a\,c = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,p - p\,d\,q}.$$

 §. 12.

§. 12. Quia nunc arcus $a\,n$ eſt quadrans circuli et arcui $b\,c$ normaliter inſiſtit, erit

$$\text{coſ.}\; m\,n = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

vnde quia ambo arcus $m\,p$ et $n\,p$ eidem arcui $m\,n$ normaliter inſiſtunt, ambo erunt quadrantes et arcus $m\,n$ erit menſura anguli $m\,p\,n$, ſicque erit

$$\text{coſ.}\; m\,p\,n = \text{coſ.}\; q\,p\,c = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

atque ſub hoc angulo planum quaeſitum inclinatur ad planum $b\,c$, ſiue in quinta figura ad planum B O C. At vero arcus $a\,m$ metietur angulum, ſub quo iſtud planum ad axem O A inclinatur, cuius ergo ſinus erit

$$\text{ſin.}\; a\,m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

§. 13. Inuento autem angulo $z\,p\,b$, quo planum quaeſitum ad planum $b\,c$ inclinatur, per analogiam concludemus angulos, ſub quibus ad reliqua bina latera inclinatur, ſcilicet coſinus inclinationis ad planum $b\,c$, hoc eſt ad planum C A, erit

$$= \frac{r\,d\,p - p\,d\,r}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

et coſinus inclinationis ad planum A B

$$= \frac{p\,d\,q - q\,d\,p}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

At analogiam ſequentes, quia prima formula erat coſ. $c\,p\,z$ ſecundum ordinem litterarum a, b, c et p, q, r progrediendo, quoniam in poſtremis formulis dubium eſſe poteſt, an pertineant ad angulos $a\,q\,z$ et $a\,r\,z$, an potius ad angulos $p\,q\,z$ et $b\,r\,z$, ambiguitas tolletur hoc modo

$$\text{coſ.}\; c\,p\,z = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q + d\,r^2)}};$$

coſ.

$$\text{cos. } aqz = \frac{rdp - pdr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\text{cos. } brz = \frac{pdq - qdp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Interim tamen analogiae confidere non possumus, quia punctum p extra nostrum triangulum cadit, vnde inuestigationem sequenti modo instituamus.

§. 14. Omni ambiguitati occurremus, si resoluamus triangulum azr, in quo cognita sunt latus az, cum angulis zar et azr, vnde fiet

$$\text{cos. } arz = \frac{pqrdr - prrdq + qdp}{qq + rr\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

quae expressio ob $rdr = -pdp - qdq$ transmutatur in hanc:

$$\text{cos. } arz = \frac{qdp - pdq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Praeterea vero etiam hinc cognoscemus

$$\text{tang. } ar = \frac{qdr - rdq}{pdr - rdp} \text{ et}$$

$$\text{tang. } zr = \frac{r\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{dr}.$$

§. 15. Simili modo resolui poterit triangulum zaq, in quo praeter latus az pariter dantur ambo anguli zaq et azq: reperitur enim

$$\text{cos. } aqz = \frac{pdr - rdp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\text{tang. } aq = \frac{qdr - rdq}{qdp - pdq} \text{ et}$$

$$\text{tang. } qz = \frac{q\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{-dq}.$$

Denique iam vidimus arcum cn esse mensuram anguli cam, et quia arcus cb et np sunt quadrantes, erit arcus $bp = cn$, vnde erit

$$\text{tang. } bp = \text{tang. } mac = \frac{pdr - rdp}{qdr - rdq},$$

vnde porro fit

$$\text{tang. } cp = \frac{rdp - qdr}{pdr - rdp}.$$

§. 16.

§. 16. Quae igitur hactenus inuenimus sequenti modo aspectui exponamus; ac primo quidem pro angulis, quae ex punctis p, q, r formantur, habebimus:

$$\text{cos.}\, b\,p\,z = \text{cos.}\, c\,p\,z = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

$$\text{cos.}\, c\,q\,z = -\,\text{cos.}\, a\,q\,z = \frac{r\,d\,p - p\,d\,r}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

$$\text{cos.}\, a\,r\,z = -\,\text{cos.}\, b\,r\,z = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

Deinde pro positione ipsorum punctorum p, q, r habebimus:

$$\text{tang.}\, b\,p = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,r - r\,d\,q};\quad \text{tang.}\, c\,p = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{p\,d\,r - r\,d\,p},$$

$$\text{tang.}\, c\,q = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{q\,d\,r - r\,d\,q};\quad \text{tang.}\, a\,q = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{q\,d\,p - p\,d\,q},$$

$$\text{tang.}\, a\,r = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{p\,d\,r - a\,d\,p};\quad \text{tang.}\, b\,r = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,r - r\,d\,q}.$$

Euidens autem est, si ducerentur arcus $p\,a$, $q\,b$ et $r\,c$, eos fore quadrantes. Denique arcus $p\,z$ commode reperitur ex triangulo $a\,z\,p$, in quo latus $a\,p$ est quadrans, ac praeterea datur latus $a\,z$, vna cum angulis $a\,z\,p$ et $z\,p\,a$, quippe cuius sinus cosinui $z\,p\,b$ aequatur, vnde reperitur:

$$\text{tang.}\, p\,z = \frac{p\,\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}{d\,p},$$

iam vero erat

$$\text{tang.}\, q\,z = -\,\frac{q\,\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}{d\,q},$$

$$\text{tang.}\, r\,z = \frac{r\,\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}{d\,r}.$$

§. 17. Inuentis nunc omnibus, quae ad positionem plani, in quo bina curuae elementa contigua incurvantur, et quod circulo maximo $q\,z\,r\,p$ continetur, spectant, etiam in positionem radii osculi, cuius quantitatem iam invenimus, inquiramus, qui quoniam ad radium $Z\,z$ est normalis et in ipso plano circuli $q\,z\,r\,p$ situs, eius positio tangenti

genti huius circuli in z erit parallela et, quia ipſi centro ſphaerae Z applicatus eſt cenſendus, ductus concipiatur ex centro Z radius tangenti circuli in z parallelus atque in eius directione ſitus erit radius oculi.

§. 18. Tranſeat igitur iſte radius Sphaerae, tangenti in z parallelus, per punctum R, quod vtique ſitum erit in circulo $p\,r\,q$ continuato, ac manifeſtum eſt arcum $z\,r$ fore quadrantem. Hinc ductus arcus $a\,r$ metietur inclinationem radii oſculi ad axem $Z\,a$, ſiue ad axem OA, quem arcum ex triangulo $a\,z\,R$ definire licebit, cum ſit $z\,R = 90°$ et angulus $R\,z\,a = 180° - \Phi$, latus autem $a\,z$ detur, vnde colligitur Tab. II. Fig. 1.

$$\text{coſ.}\, a\,R = \frac{d\,p}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

tum vero erit

$$\text{tang.}\, z\,a\,R = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{p\,d\,p}.$$

Hinc auferatur angulus $z\,a\,q$, cuius tang. $= \frac{q}{r}$, ac remanebit tang. $q\,a\,R = -\frac{d\,q}{d\,r}$, vnde ſi ducatur arcus $c\,R$, in triangulo $R\,a\,c$ dantur duo latera $a\,c$ et $a\,R$ cum angulo intercepto, vnde colligitur

$$\text{coſ.}\, c\,R = \text{ſin.}\, a\,R\, \text{coſ.}\, q\,a\,R = \frac{d\,r}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

Eademque modo reperietur

$$\text{coſ.}\, b\,R = -\frac{d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,p^2 + d\,r^2)}}.$$

Cognitis autem angulis, ſub quibus radius oſculi ad ternos axes principales OA, OB, OC, inclinatur, eorum complementa ad 90° dabunt eius inclinationes ad plana oppoſita, ſcilicet BOC, AOC, AOB. Sicque poſitio radii

oſculi

osculi, cuius quantitas est $= \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$, perfecte determinatur.

§. 19. Hae autem determinationes adhuc faciliores reddi possunt, si, quemadmodum inclinationem circuli qzr ad arcum az dedimus, eiusdem quoque inclinationem ad arcus bz et cz definiamus. Hunc in finem quaeramus angulum azb, et ex triangulo azb, quatenus tria laterae sunt cognita, erit

$$\text{cos. } azb = \frac{-pq}{\sqrt{(1-pp)(1-qq)}}.$$

Deinde si fiat in eodem triangulo

$$\text{sin. } az : \text{sin. } abz = \text{sin. } ab : \text{sin. } azb,$$

inde colligitur:

$$\text{sin. } azb = \frac{r}{\sqrt{(1-pp)(1-pp)}},$$

hincque porro tang. $azb = -\frac{r}{pq}$. Eodem modo erit

$$\text{cos. } bzc = \frac{-qr}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}} \text{ et}$$

$$\text{sin. } bzc = \frac{p}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}},$$

hincque tang. $bzc = \frac{-p}{qr}$. Ac denique

$$\text{cos. } cza = \frac{-pr}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

$$\text{sin. } cza = \frac{q}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

hincque tang. $cza = \frac{-q}{pr}$.

§. 20. Quoniam igitur supra inuenimus esse

$$\text{cos. } azr = \frac{-dp}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{sin. } azr = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{(qr+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{tang. } azr = \frac{rdq - qdr}{dp},$$

subtra-

subtrahamus hunc angulum azr ab angulo azb, ac reperiemus

$$\text{tang. } bzr = \frac{-rdp - pqrdq + pqqdr}{pqdp - rrdq + qrdr} = \frac{rdp - pdr}{dq}.$$

Eodem modo cum sit

$$\text{tang. } azq = \frac{qdr - rdq}{dp},$$

subtrahatur iste angulus ab angulo azc, cuius tangens est $\frac{-q}{pr}$, ac reperietur

$$\text{tang. } czq = \frac{-qdp - pqrdr + prrdq}{prdp - qqdr + qrdq} = \frac{qdp - pdq}{dr}.$$

§. 21. Quoniam igitur omnia determinauimus, quae ad positionem tam plani, in quo duo elementa proxima curuae inclinantur, quam radii osculi spectant, atque adeo multo vberius quam per methodum comunem fieri solet, coronidis loco subiungamus quaedam theoremata ad doctrinam sphaericam pertinentia, ad quae ista tractatio perduxit et quae omni attentione digna videntur.

Theorema I.

§. 22. *Proposito triangulo sphaerico* abc, *cuius omnia latera sunt quadrantes, si vel intra id vel extra capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque ad angulos trianguli educantur arcus* za, zb, zc, *semper erit* Tab II. Fig. 2

$$\cos. za^2 + \cos. zb^2 + \cos. zc^2 = 1.$$

Demonstratio.

Ex triangulo azb, si eius latera vt cognita spectentur, reperitur

$$\text{cof. } b\,a\,z = \frac{\text{cof. } b\,z}{\text{fin. } a\,z};$$

eodem modo ex triangulo $a\,z\,c$ erit

$$\text{cof. } c\,a\,z = \frac{\text{cof. } c\,z}{\text{fin. } a\,z},$$

vnde quia angulus $b\,a\,c$ eſt rectus, ſi quadrata addantur prodit

$$\text{cof. } b\,a\,z^2 + \text{cof. } c\,a\,z^2 = 1 = \frac{\text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2}{\text{fin. } a\,z^2},$$

ideoque

$$\text{fin. } a\,z^2 = \text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2 = 1 - \text{cof. } a\,z^2,$$

vnde manifeſto fit

$$\text{cof. } a\,z^2 + \text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theorema II.

Tab. II. Fig. 2. §. 23. *Propoſito triangulo ſphaerico* a b c, *cuius omnia latera ſint quadrantes, ſi intra vel extra id capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque in ſingula latera ducantur arcus perpendiculares* z p, z q, z r, *ſemper erit*

$$\text{fin. } z\,p^2 + \text{fin. } z\,q^2 + \text{fin. } z\,r^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Euidens eſt haec perpendicula oriri, ſi praecedentes arcus $a\,z$, $b\,z$, $c\,z$ continuentur, vnde quia arcus $a\,p$, $b\,q$, $c\,r$ ſunt quadrantes erit

$$\text{fin. } z\,p^2 = \text{cof. } z\,a^2,$$
$$\text{fin. } z\,q^2 = \text{cof. } z\,b^2 \text{ et}$$
$$\text{fin. } z\,r^2 = \text{cof. } z\,c^2;$$

quare cum modo inuenerimus

$$\text{cof. } z\,a^2 + \text{cof. } z\,b^2 + \text{cof. } z\,c^2 = 1,$$ erit vtique

$$\text{fin. } z\,p^2 + \text{fin. } z\,q^2 + \text{fin. } z\,r^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theo-

Theorema III.

§. 24. *Proposito triangulo sphaerico* a b c, *cuius omnia latera sint quadrantes, si ducatur circulus maximus quicunque* $\beta\gamma\alpha$, *qui secet latera trianguli, si opus est producta, in punctis* α, β, γ, *is ad haec latera ita inclinabitur, vt sit* Tab. II. Fig. 3.

$$\text{cof.}\, b\,\alpha\,\gamma^2 + \text{cof.}\, a\,\beta\,\gamma^2 + \text{cof.}\, a\,\gamma\,\beta^2 = 1.$$

Demonstratio.

In triangulo $\beta\, a\, \gamma$, ad a rectangulo, erit

$$\text{cof.}\, a\,\beta\,\gamma = \text{fin.}\, a\,\beta\,\gamma\ \text{cof.}\, a\,\gamma;$$

similique modo in triangulo $b\,\alpha\,\gamma$, ad b rectangulo, erit

$$\text{cof.}\, b\,\alpha\,\gamma = \text{fin.}\, b\,\gamma\,\alpha\ \text{cof.}\, b\,\gamma.$$

Addantur nunc quadrata harum duarum formularum eritque

$$\text{cof.}\, b\alpha\gamma^2 + \text{cof.}\, a\beta\gamma^2 = \text{fin.}\, a\gamma\beta^2\, \text{cof.}\, a\gamma^2 + \text{fin.}\, b\gamma\alpha^2\, \text{cof.}\, b\gamma^2,$$

et quia

$$b\,\gamma\,\alpha = a\,\gamma\,\beta \text{ et } \text{cof.}\, a\,\gamma^2 + \text{cof.}\, b\,\gamma^2 = 1,$$

erit

$$\text{cof.}\, b\,\alpha\,\gamma^2 + \text{cof.}\, a\,\beta\,\gamma^2 = \text{fin.}\, a\,\gamma\,\beta^2 = 1 - \text{cof.}\, a\,\gamma\,\beta^2,$$

vnde sequitur, quod demonstrari debet, fore

$$\text{cof.}\, b\,\alpha\,\gamma^2 + \text{cof.}\, a\,\beta\,\gamma^2 + \text{cof.}\, a\,\gamma\,\beta^2 = 1.$$

Theorema IV.

§. 25. *Proposito triangulo sphaerico* a b c, *cuius singula latera sint quadrantes, si pro lubitu ducatur arcus circuli maximi quicunque* $\alpha\,\beta\,\gamma$, *in eumque ex angulis* a b c *ducantur arcus perpendiculares* a p, b q, c r *semper erit*

$$\text{fin.}\, a\,p^2 + \text{fin.}\, b\,q^2 + \text{fin.}\, c\,r^2 = 1.$$

 Demon-

Demonstratio.

Ducantur arcus αa, βb et γc, qui erunt quadrantes, quoniam omnes arcus ex a in latus $b\,c$ ducti sunt quadrantes, ac praeterea etiam normaliter insistunt. Hinc quia anguli ad p, q et r sunt etiam recti, erunt quoque arcus αp, βq et γr quadrantes, vnde sequitur fore arcum $a p =$ angulo $a\,\alpha\,p$, ideoque

$$\text{sin.}\, a\,p = \text{sin.}\, a\,\alpha\,p = \text{cos.}\, b\,\alpha\,\gamma.$$

Eodem modo erit $b\,q = b\,\beta\,q$, ideoque

$$\text{sin.}\, b\,q = \text{sin.}\, b\,\beta\,q = \text{cos.}\, a\,\beta\,\gamma;$$

denique erit $c\,r = c'\gamma\,r$ hincque

$$\text{sin.}\, c\,r = \text{sin.}\, c\,\gamma\,r = \text{cos.}\, a\,\gamma\,\beta.$$

Quare cum summa quadratorum horum cosinuum sit $= 1$, erit quoque

$$\text{sin.}\, a p^2 + \text{sin.}\, b q^2 + \text{sin.}\, c r^2 = 1. \text{ Q. E. D.}$$

ME-