DE TRAIECTORIIS RECIPROCIS TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hoc de Traiectoriis reciprocis problema, quod olim summo studio inter Geometras fuit agitatum, qua occasione maxima incrementa in Analysin sunt inuecta, eiusmodi postulat lineas curuas E C F, circa axem A C B describendas, vt, ductis vtrinque ad aequalia intervalla rectis M P et N Q axi parallelis, summa angulorum $\zeta + \eta$, quos curva cum binis hisce rectis constituit, vbique sit eadem. Hoc enim modo fiet, vt, si eadem curua circa axem inuertatur in situm E′ M′ N′ F′ et secundum axem motu sibi parallelo, sicque punctum N′ vsque in M promoueatur, angulus Tab I. Fig. 1.

gulus intersectionis fiat $= \zeta + \eta$. Quoniam autem eximia artificia, quae olim hac occasione sunt exogitata, has in dispersa reperiuntur, operam equidem non perdidisse videor, si, methodo vniformi vsus, omnia succincte ante oculos posuero: praecipue cum nonnulla plane noua adiicere contigerit.

Solutio

huius quaestionis in genere concepta.

§. 2. Quod si ergo angulum intersectionis propositum ponamus $= 2\alpha$, vt sit $\zeta + \eta = 2\alpha$; tum vero statuamus angulum $\zeta = \alpha - \omega$, fiet alter angulus $\eta = \alpha + \omega$. Vnde patet, angulum ω ita esse debere comparatum, vt, facto intervallo ab axe negatiuo, ille abeat in sui negatiuum, seu in $-\omega$. Quo nunc hanc conditionem facilius ad calculum reuocemus, ducatur ad axem recta directrix GAH, quae cum axe AB faciat angulum $BAG = 2\alpha$; ac ipsa curua referatur ad hanc directionem per coordinatas obliquangulas $AP = x$ et $PM = y$; quo pacto pro puncto altero N abscissa AP abibit in sui negatiuum $-x$. Cum nunc sit $\zeta = \alpha - \omega$, manifestum est angulum ω esse debere functionem imparem ipsius x, ita vt, sumto x negatiuo, etiam angulus ω fiat negatiuus. Hoc modo iam id sumus lucrati, vt solum curuae punctum M considerasse sufficiat; quandoquidem hac ratione simul conditio alterius puncti N adimpletur.

Tab. I Fig. 2.

§. 3. Consideretur nunc curuae elementum Mm, et ducta applicata proxima pm, directrici AG agatur parallela Mrs, eritque $Mr = Pp = dx$ et $rm = dy$; angulus

gulus vero $mrs = 2\alpha$. Vnde cum sit angulus $Mmr = \zeta = \alpha - \omega$, erit angulus $mMr = \alpha + \omega$, vnde ex Trigonometria sequitur fore

$$dx : dy = \text{fin.}(\alpha - \omega) : \text{fin.}(\alpha + \omega), \text{ ideoque}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{fin.}(\alpha + \omega)}{\text{fin.}(\alpha - \omega)}.$$

§. 4. Ponamus nunc ad differentialia euitanda $dy = p\,dx$, ita vt indoles curuae etiam per aequationem inter x et p determinari possit. Hanc ob rem habebimus $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{fin.}(\alpha + \omega)}{\text{fin.}(\alpha - \omega)}$; vnde patet, quantitatem p ita comparatam esse debere, vt, sumto angulo ω negatiuo, ea abitura sit in $\frac{\text{fin.}(\alpha - \omega)}{\text{fin.}(\alpha + \omega)}$, qui valor prioris est reciprocus. At vero angulus ω fit negatiuus, quando abscissa x negatiua accipitur; vnde patet, quantitatem p talem esse debere functionem ipsius x, vt posito $-x$ loco x ea abeat in $\frac{1}{p}$.

§. 5. Tota ergo solutio nostri problematis huc redit, vt omnes functiones ipsius x in genere inuestigentur, quae, dum loco x scribatur $-x$, abeant in sui negatiuas. Et, quod hoc loco imprimis est notandum, ista proprietas ad omnes plane angulos obliquos extenditur, quippe quae conditio tantum inclinationem applicatarum ad abscissas afficit; ita vt, quaecunque aequatio inter x et y inuenta problemati satisfecerit, eadem pro omnibus angulis intersectionum aeque valeat; dummodo obliquitas coordinatarum ipsi angulo intersectionis aequalis statuatur. Ita, dummodo problema pro angulo intersectionis recto fuerit solutum, eadem solutio facillime ad omnes intersectionis angulos obliquos transferri poterit. Et quoniam tantum obliquitatem coordinatarum immutari opus est, si lineae inuen-

tae

tae fuerint algebraicae, eae hac translatione perpetuo ad eundem ordinem pertinebunt.

§. 6. Quia igitur inuentio functionum reciprocarum vniuerſam huius quaeſtionis ſolutionem in ſe complectitur, facili negotio innumerabiles huiusmodi functiones exhibere licet. Inter quas primum occurrit formula $p = e^{nx}$: ſumto enim x negatiuo, haec formula abit in hanc: $\frac{1}{p} = e^{-nx}$. Hinc cum ſit $p = \frac{dy}{dx}$, fiet $dy = e^{nx}\,dx$ ideoque $y = \frac{1}{n}e^{nx}$, ſiue $l\,ny = nx$, quae eſt aequatio pro logarithmica. Deinde etiam quaſi ſponte ſe offert haec formula: $p = \frac{a-x}{a+x}$, quippe quae, mutato ſigno ipſius x, abit in $\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{p}$. Hinc autem fiet

$$y = \int \frac{a-x}{a+x}\,dx = -x + 2a\,l(a+x), \text{ ſiue}$$

$$y + x = 2a\,l\,\frac{a+x}{a}$$

quae curua etiam per logarithmicam facile conſtrui poteſt. Praeterea etiam patet ſumi poſſe $p = \frac{aa-bx+xx}{aa+bx+xx}$; ſumto enim x negatiuo prodit $\frac{1}{p} = \frac{aa+bx+xx}{aa-bx+xx}$. Hocque modo innumerabiles alias ſimiles formulas excogitare licet praeſcriptae conditioni ſatisfacientes.

§. 7. Quo autem rem generalius expediamus, denotent litterae P, R et T functiones quaſcunque pares ipſius x, quae ſcilicet maneant eaedem, licet loco x ſcribatur $-x$. At vero Q, S et V denotent functiones impares ipſius x, quae ſcilicet abeant in ſui negatiuas, cum pro x ſcribitur $-x$; ac manifeſtum eſt, conditioni noſtrae ſatisfieri, ſi ſtatuatur $p = \frac{P-Q}{P+Q}$, atque adeo generalius

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m}.$$

Quin

Quin etiam tales formulae coniungi possunt, vt sit

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m} \cdot \frac{(R-S)^n}{(R+S)^n} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k}.$$

Perspicuum enim est hoc modo, si loco x scribatur $-x$, litteram p abituram esse in $\frac{1}{p}$. Haec ergo Solutio cum sit generalissima, nulla plane laborat difficultate, siquidem curuis transcendentibus contenti esse velimus.

De curuis algebraicis quaestioni satisfacientibus.

§. 8. Verum si lineae algebraicae desiderentur, haud ita facile patet, cuiusmodi functiones loco P, Q, R, S, etc. accipi oporteat, vt formula $\int p\,dx = y$ fiat integrabilis. Singularis quidem casus haud difficulter se offert sumendo $p = (x + \sqrt{1+xx})^n$, quippe quae functio etiam est reciproca: Scripto enim $-x$ loco x ea abit in

$$\frac{1}{p} = (-x + \sqrt{1+xx})^n = \frac{1}{(x+\sqrt{1+xx})^n}.$$

Notum autem est formulam hinc ortam

$$y = \int dx\,(x + \sqrt{1+xx})^n$$

semper esse integrabilem, solis casibus $n = 1$ et $n = -1$ exceptis. Quod si enim ponatur

$$x + \sqrt{(1+xx)} = v, \text{ fiet}$$

$$x = \frac{vv-1}{2v} \text{ et } dx = \frac{dv(vv+1)}{2vv},$$

vnde cum sit $y = \int v^n\,dx$, erit

$$y = \frac{v^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{v^{n-1}}{2(n-1)};$$

ex qua formula innumerae curuae algebraicae elici possunt, atque adeo ex singulis curuarum ordinibus, si modo ordo

secun-

secundus et tertius excipiatur, dum scilicet loco n successiue scribantur non solum numeri integri 2, 3, 4, 5, 6 etc. sed etiam fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. Quin etiam reliquae fractiones pro n assumtae in plures ordines adhuc nouas curuas suppeditabunt, quemadmodum iam alio loco est ostensum.

§. 9. Aeque foecunda etiam est haec formula:

$$p = (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n,$$

ita vt hinc fiat

$$y = \int dx\, (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n:$$

euidens enim est, sumto valore x negatiuo etiam $x^{\frac{1}{3}}$ fieri negatiuum, at vero $x^{\frac{2}{3}}$ signum suum retinere. Ad hanc igitur formulam integrandam faciamus primo $x^{\frac{1}{3}} = z$, vt fiat $x = z^3$, hincque

$$y = \int 3zz\,dz\,(z + \sqrt{1 + zz})^n.$$

Nunc ponatur vt ante $z + \sqrt{(1 + zz)} = v$, eritque

$$z = \frac{vv - 1}{2v} \text{ es } dz = \frac{dv\,(1 + vv)}{2vv}.$$

Quare cum sit $y = 3\int zz\,dz \,.\, v^n$, erit

$$y = 3\int \frac{dv\,(vv-1)^2}{4vv} \frac{(1+vv)}{2vv} v^n = \frac{3}{8}\int \frac{dv}{v^4} (vv-1)^2 (vv+1) v^n,$$

quae aequatio euoluta et integrata praebet

$$y = \frac{3}{8}\left(\frac{v^{n+3}}{n+3} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^{n-1}}{n-1} + \frac{v^{n-3}}{n-3}\right),$$

vbi est $v = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1+x)^{\frac{2}{3}}}$. Eodem modo patet, etiam poni posse

$$p = (x^{\frac{1}{5}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{5}}})^n;$$

tum

tum vero etiam

$$p = (x^{\frac{1}{7}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{7}}})^n,$$

$$p = (x^{\frac{1}{9}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{9}}})^n,$$

quibus assumtis perpetuo integratio succedet.

Alia methodus
curvas algebraicas quaestioni satisfacientes inuestigandi.

§. 10. Alium autem fontem multo vberiorem aperiemus ad curuas algebraicas perueniendi. Introducatur scilicet noua variabilis z, cuius x sit functio impar, ita vt sumto z negatiuo etiam x abeat in $-x$; tum vero sit P functio quaecunque par ipsius z, at Q eiusdem functio impar quaecunque; ac manifestum est etiam hanc formam: $p = \frac{P - Q}{P + Q}$ satisfacere. Vbi notasse iuuabit, hanc formam aeque late patere ac potestates eius quascunque; quandoquidem quaelibet euolutae continent vel functiones pares vel impares, vbi pares seorsim sumtae, ac denique impares ad hanc ipsam formam reducuntur. Hinc ergo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}$, vnde statui poterit

$$dx = M\,dz\,(P + Q) \text{ et } dy = M\,dz\,(P - Q),$$

vbi autem quantitas M ita debet esse comparata, vt prodeat x functioni impari ipsius z aequalis. Quod quo facilius impetrari possit sumamus $M = R\,(P - Q)$, existente R functione pari ipsius z; sic enim fiet

$$dx = R\,dz\,(PP - QQ) \text{ et } dy = R\,dz\,(PP - 2PQ + QQ),$$

 vbi

vbi cum fit $PP - QQ$ functio par ipsius z, valor pro x sponte euadet functio impar. Obtinebitur igitur:

$$x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz.$$

Facillime autem nunc pro P, Q, R eiusmodi functiones assignare licebit, vt singulae hae formulae fiant integrabiles. Veluti si earum loco potestates ipsius z accipiantur, vel etiam formulae rationales integrae quaecunque.

De parabola cubicali secunda

tanquam simplicissima curua Problemati satisfaciente.

§. 11. Simplicissimus casus hinc deducetur si sumatur $P = a$ et $Q = -z$, vnde fit

$$x = \int aaR\,dz - \int zzR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int aaR\,dz + 2\int azR\,dz + \int zzR\,dz.$$

Nunc porro sumamus $R = \frac{1}{bb}$, et integrando prodibit

$$bbx = aaz - \tfrac{1}{3}z^3 \text{ et } bby = aaz + azz + \tfrac{1}{3}z^3.$$

Vbi tantum opus est quantitatem z eliminare, vt aequatio inter coordinatas x et y obtineatur, id quod per sequentes operationes commodissime expedietur.

§. 12. Addantur duae aequationes inuentae, vt prodeat haec:

$$bb(x + y) = 2aaz + azz, \text{ vnde fit}$$

$$zz + 2az = \frac{bb}{a}(x + y),$$

ideoque

ideoque (addendo vtrinque aa) prodibit

$$(z+a)^2 = aa + \frac{bb}{a}(x+y).$$

Ponatur breuitatis gratia

$$aa + \frac{bb}{a}(x+y) = \frac{bbv}{a},$$

ita vt fit $v = x + y + \frac{a^3}{bb}$, eritque $z = b\frac{\sqrt{v}}{a} - a$. Cum igitur fit

$$bbx = \frac{z}{3}(3aa - zz), \text{ fiue}$$

$$3bbx = z(3aa - zz) = -2a^3 - \frac{b^3 v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} + 3bvv$$

erit

$$b^3 \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = -2a^3 + 3bb(v-x) = a^3 + 3bby.$$

§. 13. Ponatur breuitatis gratia $\frac{a^3}{bb} = 3c$, fiue $a^3 = 3bbc$, et noftra aequatio tranfibit in hanc:

$$b\frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = 3(c+y)$$

et quia $bb = \frac{a^3}{3c}$, erit $b = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3c}}$; quo valore fubftituto aequatio noftra erit

$$v\sqrt{\frac{v}{3c}} = 3(c+y).$$

Vnde patet, hanc curvam ad parabolam cubicalem fecundam quodammodo referri poffe.

§. 14. Ad hoc clarius oftendendum fit AB nofter axis et M punctum quodcunque in curua, vnde ad axem AB ducatur recta MU, ita vt fit angulus $MUB = 2\alpha$, eritque $AU = PM = y$ et $UM = AP = x$. Iam cum fit $v = x + y + 3c$, prolongetur recta BAD ita, vt fit $AD = 3c$ ideoque $DU = y + 3c$. Nunc ex D ducatur recta DT, ita vt, MU producta in T, fiat $UT = UD$, ideoque Tab. I Fig. 3.

ideoque $TM = x + y + 3c = v$. Quia igitur triangulum DUT est isosceles, erunt anguli UTD et UDT aequales $= 90° - \alpha$. Hinc ergo erit

$$DU : DT = \text{cof.}\,\alpha : \text{fin.}\,2\alpha = 1 : 2\,\text{fin.}\,\alpha,$$

vnde cum fit $AU = y$, capiatur $AE = \frac{1}{3} AD$, eritque

$$DE = EF = 2c \text{ et } EU = y + c.$$

Nunc ex E ipfi UT agatur parallela EF, eritque

$$EU : FT = 1 : 2\,\text{fin.}\,\alpha;$$

quare fi vocemus rectam $FT = t$; erit $y + c : t = 1 : 2\,\text{fin.}\,\alpha$, vnde colligitur $y + c = \frac{t}{2\,\text{fin.}\,\alpha}$.

§. 15. His praemiffis punctum curuae M referamus ad has duas coordinatas: $FT = t$ et $TM = v$, eritque aequatio noftra $\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{3c}} = \frac{3t}{2\,\text{fin.}\,\alpha}$, fiue aequatio inter t et v nunc erit $\frac{v^3}{3c} = \frac{9tt}{4\,\text{fin.}\,\alpha^2}$, fiue $v^3 = \frac{27ctt}{4\,\text{fin.}\,\alpha^2}$. Vnde patet, hanc curuam recte vocari parabolam cubicalem fecundam, fi modo applicatae MT ad abfciffas FT inclinentur angulo $FTM = 90° - \alpha$, cui etiam aequalis eft angulus DFE. Atque ex hac aequatione facile erit curuam quaefitam defcribere.

Tab. I. Fig. 4. §. 16. Producamus rectam FE in infinitum, quam inftar axis fpectemus, ad eamque ex quouis puncto curvae M ducamus rectam MV ipfi FT parallelam, vt angulus FVM fit $90° - \alpha$, eritque nunc abfciffa $FV = v$ et applicata $VM = t$, quae per abfciffam ita definitur, vt fit $t = 2v\,\text{fin.}\,\alpha.\sqrt{\frac{v}{27c}}$. Vnde patet fingulis abfciffis FV geminam refpondere applicatam $VM = t$ et $VM = -t$; curua

curua igitur duobus constabit ramis in puncto T cuspidem constituentibus, vbi recta F V vtrumque ramum tangit. Ambo autem rami in infinitum excurrent, dum scilicet abscissae FV in infinitum augentur.

§. 17. Descripta igitur tali curua ex aequatione $v^3 = \frac{27 c t t}{4 \sin. \alpha^2}$, eius parametrum vocemus more solito $= f$, vt sit $v^3 = f t t$, eritque $\frac{27 c}{4 \sin. \alpha^2} = f$, ideoque $c = \frac{4 f \sin. \alpha^2}{27}$, ita vt ex cognita parametro f vna cum angulo $90^\circ - \alpha$, sub quo applicata V M ad abscissam F V inclinatur, innotescat valor ipsius c. Quo notato capiatur a puncto F interuallum F E $= 2 c = \frac{8 f \sin. \alpha^2}{27}$, et ex hoc puncto E agatur recta E B, ita vt fiat angulus V E B $= 2 \alpha$, eritque haec recta E B axis conuersionis pro traiectoria, atque curua circa hunc axem conuersa et secundum directionem axis promota se inuicem secabit vbique sub angulo $= 2 \alpha$, id quod non parum mirum videbitur, cum ad dextram exigua existat portio curuae, quae inuersa non toti arcui ad sinistram sito occurrere posse videtur.

§. 18. Vt huic dubio occurramus, ex M ducatur recta axi parallela M S, ita vt sit angulus V S M $= 90^\circ - \alpha$, erit angulus S M V $= 90^\circ - \alpha$, ideoque M S $=$ S V; vnde cum sit V M $= t$, erit S V $=$ S M $= \frac{t}{2 \sin. \alpha}$. Hinc cum sit F V $= v$, erit interuallum F S $= v - \frac{t}{2 \sin. \alpha}$, vnde ob $t = \frac{v \sqrt{v}}{\sqrt{f}}$ erit hoc spatium F S $= v - \frac{v \sqrt{v}}{2 \sin. \alpha . \sqrt{f}}$, quod, dum quantitas v continuo augetur, neutiquam in infinitum excresci potest, sed potius tandem accipiet situm negatiuum. Vnde patet, hoc interuallum non vltra certum terminum

vsque

vsque excresci posse. Ad quem terminum inueniendum differentiale huius formulae nihilo aequetur, atque obtinebitur haec aequatio: $1 - \frac{3\sqrt{v}}{4\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f}} = 0$, vnde fit

$$\sqrt{v} = \tfrac{4}{3}\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f} \text{ et } v = \tfrac{16}{9} f\,\text{fin.}\,\alpha^2.$$

Hinc igitur maximum istud spatium reperietur $= \frac{16}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$. Cum igitur esset $FE = \frac{8}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$; patet, spatium hoc maximum FS praecise duplum esse spatii FE, ita vt sit $ES = FE$. Quia igitur curua FM non vltra hanc rectam SM porrigitur, necesse est vt curua in puncto M rectam SM tangat; vnde patet, totum ramum curvae EM a portione EF in situm inuersum translata in omnibus punctis secari posse; et quia ramus vlterior vltra M protensus continuo magis ad sinistram vergit, ex eo intelligitur, singulis punctis vtriusque rami respondere puncta correspondentia, siue in eodem ramo siue in altero, quae in intersectione conuenire queant. Haec igitur curua talem habebit formam, vti in hac figura repraesentatur, vbi plura puncta correspondentia pluribus litteris insigniuimus; scilicet punctum a, vbi curua per axem transit, sibi ipsi respondet; tum vero punctis b, c, d, etc. respondent puncta b', c', d', etc. Vnde patet, nullam huius curuae per ambos ramos in infinitum excurrentis portionem esse otiosam, vti olim Geometris erat visum, sed cuilibet puncto vbicunque accepto respondere punctum determinatum sibi socium.

Tab. I. Fig. 5.

§. 19. Haec igitur curua tertii ordinis sine dubio est simplicissima linea traiectoria reciproca algebraica: infinitas autem alias ex iisdem generalibus, quas dedimus, scilicet $x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz$ et

$y =$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz$$

eliciuntur, si modo loco P et Q functiones pares ipsius z accipiantur, loco Q autem functio impar; ita tamen, vt singulae hae formulae integrationem admittant; cui quidem conditioni facillime satisfieri potest. Vt casus saltem simpliciores eruamus, denotent litterae m et n numeros pares, littera vero i imparem, et statuamus $P = fz^m$, $Q = gz^i$ et $R = z^n$, ex quibus valoribus orientur sequentes formulae pro x et y:

$$x = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1} \text{ et}$$

$$y = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{2fgz^{m+n+i+1}}{m+n+i+1} + \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}.$$

Hic autem imprimis est monendum, simulac pro litteris m, n et i maiusculi numeri accipiantur, tum eliminando litteram z aequationem inter x et y ad plurimas dimensiones exsurgere, atque adeo eliminationem nequidem expediri posse.

§. 20. Interim tamen, quicunque valores idonei functionibus P, Q, R tribuantur, vt curuae algebraicae resultent: tamen omnes hae solutiones tantum pro particularibus sunt habendae, cum sine dubio innumerabiles aliae dentur curuae algebraicae quaestioni satisfacientes, quae tamen in his casibus non contineantur. Quamobrem merito desideratur eiusmodi methodus generalis, quae omnes plane curuas algebraicas in se complectatur; atque talem methodum iam ante plures annos communicaui, quam hic repetere superfluum foret. Verum tamen eandem ex principiis maxime diuersis, viaque longe simpliciori,

ciori, hic adiungam, quae ita est comparata, vt ad alia insignia inuenta ducere posse videatur.

Methodus generalis
inueniendi traiectorias reciprocas algebraicas.

§. 21. Primum igitur obseruo, formulam simplicem ipso initio inuentam $p = \frac{P + Q}{P - Q}$, ita late patere, vt reliquas magis compositas, quas exhibuimus, in se complectatur, cum facta euolutione tam numerator quam denominator reducatur siue ad summam siue ad differentiam binarum formularum, quarum altera sit functio par, altera vero impar ipsius z. Nunc igitur cum $\frac{Q}{P}$ sit etiam functio impar, faciamus $Q = Pq$, fietque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + q}{1 - q}$, vbi q denotat functionem imparem ipsius z. Necesse igitur est vt etiam x fiat functio impar ipsius q, quamobrem hanc formulam ita exhibeamus: $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + q)^2}{1 - qq}$, vt denominator euadat functio par ipsius q.

§. 22. Cum igitur debeat esse

$$dx : dy = 1 - qq : (1 + q)^2,$$

statuamus:

$$dx = dS(1 - qq) \text{ et } dy = dS(1 + q)^2,$$

eritque per notam formularum integralium reductionem:

$$x = S(1 - qq) + 2\int Sq\,dq \text{ et}$$
$$y = S(1 + q)^2 - 2\int S\,dq(1 + q),$$

vbi patet, functionem S esse debere imparem ipsius q, vt etiam x talis prodeat functio. Hoc igitur modo rem perduximus

duximus ad formulas integrales $\int S q\, dq$ et $\int S\, dq (1+q)$, quas integrabiles reddi oportet. Hunc in finem statuamus $S = \frac{dT}{dq}$, et nunc T esse oportet functionem parem; vnde eadem adhibita reductione fit

$$\int S q\, dq = \int q\, dT = qT - \int T\, dq \text{ et}$$
$$\int S\, dq (1+q) = T(1+q) - \int T\, dq;$$

sicque totum negotium huc est perductum, vt $\int T\, dq$ integrabilis reddatur. Ponatur igitur $T = \frac{dV}{dq}$, vbi patet, V esse debere functionem imparem ipsius q, sicque erit $\int T\, dq = V$. Hoc igitur modo omnia ad integrabilitatem sunt perducta.

§. 23. Tota ergo Solutio huc redit, vt pro V functionem quamcunque imparem ipsius q accipere liceat. Et cum posuerimus $T = \frac{dV}{dq}$, sumto elemento dq constante erit $dT = \frac{ddV}{dq}$, hincque $S = \frac{ddV}{dq^2}$; quibus valoribus substitutis ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2q\, dV}{dq} - 2V \text{ et}$$
$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2\, dV}{dq} + 2V.$$

Quin igitur in his formulis omnes plane curuae algebraicae contineantur dubitari nullo modo potest, quando quidem littera V omnes plane functiones impares ipsius q, siue rationales, siue vtcunque irrationales complectitur.

§. 24. Statuamus, vt exemplum facillimum afferamus, $V = q^n$, denotante n numerum quemcunque imparem, siue integrum siue fractum, puta $\frac{\mu}{\nu}$; vbi scilicet tam μ quam ν debent esse functiones impares. Erit igitur

$$\frac{dV}{dq} = n q^{n-1} \text{ et } \frac{ddV}{dq^2} = n(n-1) q^{n-2},$$

vnde coordinatae ita ſe habebunt:

$$x = n(n-1) q^{n-2} (1 - qq) + 2 n q^n - 2 q^n$$
$$= n(n-1) q^{n-2} - (n-1)(n-2) q^n,$$
$$y = n(n-1) q^{n-2} + 2n(n-2) q^{n-1} + (n-1)(n-2) q^n,$$

ac ſi ſumſiſſemus $V = a q^n$, prodiiſſet

$$x = n(n-1) a q^{n-2} - (n-1)(n-2) a q^n \text{ et}$$
$$y = n(n-1) a q^{n-2} + 2n(n-2) a q^{n-1} + (n-1)(n-2) a q^n.$$

§. 25. Hinc igitur patet, ſi poneremus

$$V = a q^m + b q^n + c q^k, \text{ etc.}$$

exponentibus m, n, k exiſtentibus numeris imparibus, tum prodituros fuiſſe hos valores:

$$x = m(m-1) a q^{m-2} - (m-1)(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} - (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} - (k-1)(k-2) c q^k.$$

$$y = m(m-1) a q^{m-2} + 2m(m-2) a q^{m-1} + (m-1(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} + 2n(n-2) b q^{n-1} + (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} + 2k(k-2) c q^{k-1} + (k-1)(k-2) c q^k.$$

§. 26. Hinc intelligitur, ſtatim ac duae pluresue traiectoriae reciprocae fuerint inuentae, ex iis facile infinitas alias deriuari poſſe. Ita ſi fuerint X et Y tales functiones ipſius q, vt traiectoriam reciprocam exhibeant; ſimilique modo etiam inuentae fuerint coordinatae X′ et Y′, tum vero etiam X″ et Y″, quae ſcilicet omnes referantur ad eandem quantitatem q, ſiue ad eandem quantitatem p, quo-

quoniam est $p = \frac{1+q}{1-q}$, id quod euenit quando applicatae ad suas curuas sub eodem angulo inclinantur; tum ex iis noua curua formari poterit, sumendo

$$x = a\,X + b\,X' + c\,X'' + \text{etc.}$$
$$y = a\,Y + b\,Y' + c\,Y'' + \text{etc.}$$

id quod infinitis modis fieri poterit. Hic autem semper assumimus, angulum intersectionis esse $= 2\alpha$, et applicatas ad abscissas sub pari angulo esse inclinatas.

Alia methodus
Formulas generales pro curuis algebraicis eruendi.

§. 27. Quanquam autem formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$, latissime patet, atque etiam formulas $\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n}$, quin etiam productum ex similibus formulis, veluti:

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n} \cdot \frac{(R+S)^m}{(R-S)^m} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k} \text{ etc.}$$

in se complectitur: tamen dubium oriri potest, num hoc etiam locum habeat, si exponentes m, n et k fuerint numeri fracti, quoniam tum euolutio fieri nequit nisi per seriem infinitam. Methodum igitur adiiciam, qua etiam negotium pro formulis irrationalibus expediri potest; quod casu simpliciori sum ostensurus. Sit igitur $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$: vbi semper tenendum est, abscissam x esse debere functionem imparem ipsius q, quod quo facilius impetrari possit, formulam hoc modo repraesentemus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{\sqrt{(1-qq)}},$$

ac ponamus vt ante $dx = dS\sqrt{(1-qq)}$ ac $dy = dS(1+q)$ vbi euidens eſt, pro S ſumi debere functionem imparem ipſius q, vt ſcilicet x prodeat functio impar, quoniam $\sqrt{(1-qq)}$ tanquam functio par ſpectari poteſt. Adhibita igitur reductione fiet

$$x = S\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{Sq\,dq}{\sqrt{(1-qq)}} \text{ et } y = S(1+q) - \int S\,dq.$$

§. 28. Poſtremae formulae facillime ſatisfit ponendo $S\,dq = dT$, vt fiat $\int S\,dq = T$; ac manifeſtum eſt T eſſe debere functionem parem ipſius q. Quia igitur eſt $S = \frac{dT}{dq}$, erit primo

$$y = \frac{dT}{dq}(1+q) - T \text{ et } x = \frac{dT}{dq}\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{q\,dT}{\sqrt{(1-qq)}};$$

ſicque iam applicata y algebraica eſt facta: pro abſciſſa autem fiet

$$\int \frac{q\,dT}{\sqrt{1-qq}} = \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - \int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

Statuatur igitur $\int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} = V$, fietque $T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$;

vbi perſpicuum eſt, pro V ſumi debere functionem imparem ipſius q. Hoc igitur modo abſciſſa x etiam redditur algebraica; erit enim

$$x = \frac{dT}{dq}(1-qq)^{\frac{1}{2}} + \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - V.$$

§. 29. Ambas igitur expreſſiones pro x et y per per ſolam functionem V exhibeamus; et cum ſit

$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$, erit

$\frac{dT}{dq} = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3q\,dV}{dq}\sqrt{(1-qq)}$,

his

his valoribus ſubſtitutis habebimus:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{3qdV}{dq}(1-qq) + \frac{qdV}{dq}(1-qq) - V,$$

ſiue

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2qdV}{dq}(1-qq) - V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(+1q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq}(1+q)\sqrt{(1-qq)}$$

ſeu

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - (1+q)(1+2q)\frac{dV}{dq}\sqrt{(1-qq)}.$$

In his ergo formulis quoque infinities infinitae curuae algebraicae continentur, quoniam pro V functiones quascunque impares accipere licet.

§. 30. Vt rem exemplo illuſtremus, ſumamus $V = q$, eritque $\frac{dV}{dq} = 1$ et $\frac{ddV}{dq^2} = 0$, vnde fit

$$x = -2q(1-qq) - q = -3q + 2q^3 \text{ et}$$

$$y = -(1+q)(1+2q)\sqrt{(1-qq)}.$$

Ex hoc autem exemplo clarum eſt, hanc ſolutionem ex praecedente nullo modo deduci potuiſſe. Si enim ibi pro V aſſumeretur functio rationalis, tum etiam y prodiret rationalis: ſin autem pro V aſſumeretur functio irrationalis, ambae litterae x et y prodirent irrationales, cum tamen hoc caſu x ſit quantitas rationalis.

§. 31. Nunc igitur certi ſumus facti, priorem ſolutionem, etſi maxime generalis videbatur, tamen non omnes plane ſolutiones in ſe complecti; neque vero haec altera ſolutio pro generaliſſima eſt habenda, quia priorem non in ſe complectitur. Quamobrem adhuc generaliorem ſolutionem hic ſubiungamus, quae quantitates irrationales quascunque in ſe comprehendat.

Methodus generalior
traiectorias reciprocas algebraicas inueniendi.

§. 32. Denotet λ fractionem quamcunque, quae quidem ſit rationalis, ſiquidem poteſtates, quarum exponentes ſunt irrationales, non inter quantitates *algebraicas* referri, ſed *interſcendentes* appellari ſolent, ac propoſita ſit haec formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^\lambda}{(1-q)^\lambda}$, quam ſtatim in hanc transformemus $\frac{dy}{dx} = r^\lambda$, ſtatuendo ſcil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, eritque propterea $y = \int r^\lambda dx = r^\lambda x - \int r^{\lambda-1} x dr$, quam ergo poſtremam formulam integrabilem reddi oportet, ita tamen, vt x fiat impar ipſius q.

§. 33. Hunc in finem ſtatuamus $\int r^{\lambda-1} x dr = T r^\lambda$, ſicque fiet $y = r^\lambda (x - \lambda T)$; ac vero facta differentiatione $r^{\lambda-1} x dr = r^\lambda dT r^{\lambda-1} dr$, vnde colligitur

$$x = \frac{r\,dT}{dr} + \lambda T, \text{ ideoque } y = \frac{r^{\lambda+1} dT}{dr}.$$

Hoc modo iam ambae coordinatae x et y redditae ſunt algebraicae, ac problema foret ſolutum, ſi modo conſtaret, qualem functionem pro T accipi conueniat: eam autem ita comparatam eſſe oportet, vt inde prodeat $x =$ functioni pari ipſius q.

§. 34.

§. 34. Restituamus ergo loco r valorem assumtum $\frac{1+q}{1-q}$, ex quo erit $lr = l(1+q) - l(1-q)$, ideoque

$$\frac{dr}{r} = \frac{dq}{1+q} + \frac{dq}{1-q} = \frac{2dq}{1-qq} \text{ et } \frac{r}{dr} = \frac{1-qq}{2dq},$$

vnde fit

$$x = \left(\frac{1-qq}{2dq}\right) dT + \lambda T \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} \left(\frac{1-qq}{2dq}\right) dT.$$

Vbi cum x per duo membra exprimatur, notetur, si alterum fuerit functio par ipsius q, alterum fore functionem imparem. Unde patet loco T neque functionem parem neque imparem accipi posse, sed quantitatem ex duabus partibus constari debere; quarum altera sit functio par, altera impar.

§. 35. Statuamus $T = R + S$, vbi R denotet functionem parem, S vero imparem; et nunc habebimus

$$x = \frac{dR(1-qq)}{2dq} + \frac{dS(1-qq)}{2dq} + \lambda R + \lambda S,$$

quarum quatuor partium prima et quarta est impar, secunda vero ac tertia par; vnde partes secundam et tertiam nihilo aequari oportet, vt fiat

$$x = \frac{dR(1-qq)}{2dq} + \lambda S.$$

At vero posito

$$\frac{dS(1-qq)}{2dq} + \lambda R = 0$$

sponte fit $R = -\frac{dS(1-qq)}{2\lambda dq}$, ideoque functio par, vti requiritur; vnde cum sumto elemento dq constante fit

$$dR = -\frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{qdS}{\lambda}, \text{ erit}$$

$$x = -\frac{ddS(1-qq)^2}{4\lambda dq^2} + \frac{qdS(1-qq)}{2\lambda dq} + \lambda S,$$

et

et quia eſt $T = R + S$, erit

$$dT = dR + dS = -\frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{dS(q+\lambda)}{\lambda},$$

quam ob rem habebimus

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{(1-qq)^2}{4\lambda dq^2}\,ddS - \frac{dS(q+\lambda)(1-qq)}{2\lambda dq}\right).$$

Dummodo ergo pro S capiatur functio impar ipſius q, hae formulae ſemper praebebunt trajectoriam reciprocam algebraicam.

§. 36. Hae autem formulae pluribus modis transformari poſſunt, dum ſcilicet loco S aliae functiones impares accipiuntur. Sumatur igitur $S = \frac{cV}{1-qq}$, exiſtente V functione impari, eritque

$$dS = \frac{cdV}{1-qq} + \frac{2cVqdq}{(1-qq)^2} \text{ et}$$

$$ddS = \frac{cddV}{1-qq} + \frac{4cqdqdV}{(1-qq)^2} + \frac{2cVdq^2}{(1-qq)^2} + \frac{8cVqqdq^2}{(1-qq)^3}$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperietur

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4\lambda dq^2} - \frac{cqdV}{2\lambda dq} + \frac{cV(2\lambda\lambda-1+qq)}{2\lambda(1-qq)} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{c(1-qq)}{4\lambda dq^2}\,ddV - \frac{c(\lambda-q)}{2\lambda dq}\,dV + \frac{c(qq-2\lambda q+1)}{2\lambda(1-qq)}V\right).$$

§. 37. Operae igitur pretium erit hinc caſum deducere quo $\lambda = 1$, quandoquidem haec ſolutio conuenire debet cum ea, quam ſupra (§. 23.) dedimus. Facto autem $\lambda = 1$ fiet

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4dq^2} - \frac{cqdV}{2dq} + \frac{cV}{2} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\left(\frac{c(1-qq)ddV}{4dq^2} - \frac{c(1-q)dV}{2dq} + \frac{cV(q-1)^2}{2(1-qq)}\right) \text{ ſiue}$$

$$y = -\frac{cddV(1+q)^2}{4dq^2} + \frac{cdV(1+q)}{2dq} - \frac{cV}{2},$$

quam-

quamobrem si sumamus $c = -4$, resultant hae formulae:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2qdV}{dq} - 2V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1+q)}{dq} + 2V$$

quae cum supra datis perfecte congruunt.

§. 38. Quo has formulas commodiores reddamus, faciamus $c = -4\lambda$, et sumta pro V functione quacunque impari ipsius q, coordinatae traiectoriae ita satis succincte exprimentur:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq) + \frac{2dV}{dq}.q - \frac{2V(2\lambda\lambda - 1 - qq)}{1-qq} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddV}{dq^2}(1-qq) - \frac{2dV}{dq}(\lambda - q) + \frac{2V(qq - 2\lambda q + 1)}{1-qq}\right).$$

Quin etiam formulis primo inuentis commodius vti licebit, si per -4λ multiplicentur. Ita denotante S functione quacunque impari ipsius q, coordinatae erunt:

$$x = \frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}q(1-qq) - 4\lambda\lambda S \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right).$$

§. 39. Quaecunque igitur functio idonea pro S accipiatur, semper fieri oportet $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$. Quod quomodo eueniat, et quemadmodum littera S penitus e calculo egrediatur, perscrutari operae pretium erit. Differentiemus igitur primo valorem ipsius x, vt obtineamus

$$dx = \frac{d^3S}{dq^2}(1-qq) - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1 + 2\lambda\lambda - 3qq).$$

Deinde quia y exprimitur producto, cuius prior factor est $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = r^\lambda$, posito scil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, erit $d.r^\lambda = \lambda r^\lambda.\frac{dr}{r}$. Supra autem vidimus esse $\frac{dr}{r} = \frac{2dq}{1-qq}$, vnde pro hoc factore habebimus

$$d.\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\frac{dq}{1-qq},$$

quo notato nanciſcimur

$$dy = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\frac{dq}{1-qq}\left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right)$$
$$+\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2ddS}{dq}(3q+\lambda)(1-qq)\right.$$
$$\left.-\,2dS(1-2\lambda q-3qq)\right]$$

quae duae partes contractae praebent

$$dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddSq(1-qq)}{dq} - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq)\right]$$

vnde manifeſto fit $dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}dx$, vti conditio praeſcripta poſtulat.

§. 40. Hic igitur caſus omni attentione dignus ſe offert formulae huius differentialis tertii gradus:

$$\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq),$$

quae non ſolum ipſa per ſe eſt integrabilis, quandoquidem eius integrale dat valorem ipſius x, ſed etiam per formulam $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}$ multiplicata etiamnunc manet integrabilis, ſiquidem eius integrale praebet valorem ipſius y; vnde quaeſtio maximi momenti in analyſi naſcitur: *Quomodo formulae differentiales cuiuscunque gradus comparatae eſſe debeant, vt non ſolum ipſae ſint integrabiles, ſed etiam quando per quampiam functionem datam multiplicantur*; cuius quidem quaeſtionis ſolutio per methodum ante adhibitam eſt facillima.

§. 41. Vt has formulas exemplo ſimpliciſſimo illuſtremus, ſumamus $S = q$ et coordinatae noſtrae traiectoriae erunt

$$x = -2(1+2\lambda\lambda)q + 2q^3 \text{ et}$$

$y =$

$$y = -2\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}(q+\lambda)(1-qq);$$

siue per -2 diuidendo erit

$$x = (1+2\lambda\lambda)q - q^3 \text{ et}$$

$$y = \left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}(q+\lambda)(1-qq).$$

Facile autem apparet, quaecunque fractio pro exponente λ accipiatur, eliminationem quantitatis q ad aequationem altissimi gradus perducere. Sin autem sumatur $\lambda = 0$, manifesto prodit $x = q - q^3$ et $y = q(1-qq)$, ideoque $y = x$; quae est aequatio pro linea recta; quod autem non solum hoc casu valet, sed etiam formulae generales posito $\lambda = 0$ semper praebent $y = x$. Methodus igitur hoc articulo tradita omnes plane traiectorias algebraicas in se continere est censenda, quatenus scilicet pro λ fractionem quamcunque accipere licet.

Singularis constructio

traiectoriarum reciprocarum, ope rectificationis curuarum.

§. 42. Constituto axe conuersionis A B, circa quem traiectoria conuersa et iuxta directionem axis promota se ipsam vbique sub dato angulo $= 2\alpha$ intersecet, ipsi in puncto quocunque A iungatur recta E F ad angulum E A B $= 2\alpha$ inclinata, in qua capiantur abscissae A P $= x$, quibus respondeant applicatae axi parallelae P M $= y$; ac posito $dy = p\,dx$, vidimus, totum negotium huc redire, vt fiat p functio reciproca abscissae x. Viciſſim igitur abscissa x talis esse debet functio ipsius p, vt, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, valor ipsius x euadat sui negatiuus, seu abeat in $-x$; cuiusmodi functiones facile innumeras excogitare licet, qua- Tab. I. Fig. 6.

rum

rum ſimpliciſſima eſt talis: $x = \frac{a(pp-1)}{p}$, quippe quae formula, ſi loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, fit $\frac{a(1-pp)}{p} = -x$.

§. 43. Haec autem formula generalior reddi poteſt introducendo nouam variabilem t, quae ſit functio quaecunque impar ipſius x. Tum enim ſi ſtatuatur $t = \frac{a(pp-1)}{p}$, quoniam, ſi loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, quantitas t abit in $-t$, etiam abſciſſa x abit in $-x$. Quo notato ponamus pro noſtro inſtituto $t = \frac{pp-1}{2p}$, vnde fit $p = t + \surd(tt+1)$. Quia igitur eſt $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dy = t\,dx + dx \surd(tt+1)$ ideoque $y = \int t\,dx \int dx \surd(tt+1)$. Hic autem euidens eſt, ſi denotet $\int t\,dx$ applicatam curuae obthogonalem abſciſſae x reſpondentem, tum $\int dx \surd(tt+1)$ exprimere arcum eiusdem curuae.

§. 44. Sit igitur E T C t F talis curua ſuper recta E F per coordinatas orthogonales P T deſcripta, cuius ergo punctum C immineat initio abſciſſarum A, atque abſciſſae A P $= x$ reſpondeat applicata orthogonalis P T $= \int t\,dx$, eritque arcus C T $= \int dx \surd(tt+1)$; quocirca pro traiectoria hinc conſtruenda tantum capi debet eius applicata obliquangula P M $= y =$ P T + C T, et punctum M erit in traiectoria, ſi modo t fuerit functio impar ipſius x. Vnde patet, hanc nouam curuam E T C t F non penitus arbitrio noſtro relinquere. Quomodo autem ea debeat eſſe comparata haud difficulter definietur.

§. 45. Quoniam enim t eſt functio impar ipſius x, euidens eſt, formulam integralem $\int t\,dx$ fore functionem

parem

parem ipsius x; ita vt in eadem curua abscissae negatiuae $AP = -x$ respondeat applicata $pt = PT$ pariter in eandem plagam directa. Vnde patet, curuam hanc $ETCtF$ ita comparatam esse debere, vt recta AC eius sit diameter orthogonalis, eiusque portiones CTE et CtF inter se sint perfecte aequales et similes. Quo obseruato omnes plane curuae huius indolis ad nostrum institutum erunt accommodatae. Ex qualibet enim huiusmodi curua traiectoria pro quouis intersectionis angulo $= 2\alpha$ facillime construi poterit: dummodo obseruetur, si arcus CT pro positiuo habeatur, ita vt capiatur $PM = PT + CT$, tum arcus ad alteram partem cadentes Ct pro negatiuis esse habendos, ita vt ibi applicata traiectoriae pm sumi debeat $= pt - Ct$. Atque haec est constructio illa elegantissima, quam olim Celeberr. *Ioannes Bernoullius* primus inuenerat.

§. 46. Huius constructionis ope etiam eiusmodi traiectoriae describi possunt, quae pluribus axibus conuersionis, atque adeo pro eodem intersectionis angulo sunt praeditae. Tantum enim opus est pro curua ECF eiusmodi figuram accipi, quae plures habeat diametros AC, $A'C'$; ac; etc. ac huiusmodi curua est cyclois: eique innumerabiles aliae similes exhiberi possunt. Tum enim, si modo descripto ex tali curua traiectoria construatur, eius non solum recta AB, sed etiam omnes rectae $A'B'$, ab, quarum quidem numerus est infinitus, pariter erunt axes conuersionis. Tab. I. Fig. 7.

De aliis formulis,

ex quibus pariter innumeras traiectorias reciprocas elicere licet.

§. 47. Ex praecedente constructione manifestum est, si curua in subsidium vocata E C F non solum fuerit algebraica, sed etiam rectificationem admittat; tum traiectorias inde descriptas quoque fore algebraicas. At vero formula principalis, vnde has constructiones deduximus, quae erat $x = \frac{a(pp-1)}{p}$ ita tractari potest, vt etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibeat.

§. 48. Cum enim etiam talis formula generalior $x = \frac{a(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}}$ pariter praescripta proprietate sit praedita, vt, posito $\frac{1}{p}$ loco p, abscissa x abeat in sui negatiuum, quoniam est

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp, \text{ erit}$$

$$y = px - a\int \frac{dp(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}} = px - \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda},$$

quae expressio etiam est algebraica, dum ne sit vel $\lambda = 1$ vel $\lambda = -1$, quippe quibus casibus integratio inuolueret logarithmos.

§. 49. Sumto igitur pro λ numero quocunque, exceptis casibus $\lambda = \pm 1$, constructio traiectoriae ita se habebit, vt sumta abscissa $x = ap^{\lambda} - ap^{-\lambda}$ fiat applicata

$$y = \frac{\lambda}{\lambda+1} ap^{\lambda+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda} ap^{1-\lambda}.$$

Neque

Neque vero hinc difficile erit variabilem p eliminare, vt obtineatur aequatio algebraica inter x et y. Posito enim commodi ergo $a = \frac{b}{2}$, vt fiat $p^{2\lambda} = \frac{2\,x\,p^{\lambda}}{b} + 1$, inde fit

$$p^{\lambda} = \frac{x \pm \sqrt{(x\,x + b\,b)}}{b}, \text{ ideoque}$$

$$p = \left(\frac{x \pm \sqrt{x\,x + b\,b}}{b}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Vbi, si loco $\frac{1}{\lambda}$ scribatur n et loco p iste valor substituatur, eaedem prodeunt formulae supra (§. 8.) erutae.

§. 50. Non solum autem abscissa x vnicae tali formulae $\frac{a\,(p^{2\lambda} - 1)}{p^{\lambda}}$ aequalis poni potest, sed etiam pluribus talibus formulis simul sumtis: veluti

$$x = a\,(p^{\lambda} - p^{-\lambda}) + b\,(p^{\mu} - p^{-\mu}) + c\,(p^{\nu} - p^{-\nu}) \text{ etc.}$$

Perspicuum enim est, si in hac expressione loco p scribatur $\frac{1}{p}$, loco x proditurum esse $-x$. Hinc autem colligetur

$$\int x\,dp = \frac{a\,p^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{a\,p^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{b\,p^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{c\,p^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{c\,p^{1-\nu}}{1-\nu}.$$

Et cum sit $y = p\,x - \int x\,dp$, erit simili modo vt supra est factum

$$y = \frac{\lambda\,a}{\lambda+1} p^{\lambda+1} + \frac{\lambda\,a}{1-\lambda} p^{1-\lambda} + \frac{\mu\,a}{\mu+1} p^{\mu+1} + \frac{\mu\,a}{1-\mu} p^{1-\mu} + \frac{\nu\,a}{\nu+1} p^{\nu+1} + \frac{\nu\,a}{1-\nu} p^{1-\nu}.$$

Atque has formulas pro lubitu multiplicare licebit, ex iisque quouis casu satis commode traiectoriae describi poterunt, dum pro quouis valore litterae p tributo valores vtriusque coordinatae x et y computari possunt. At vero multo

multo difficilius erit, ipſam litteram p ex calculo elidere, vt pateat, ad quemnam ordinem linearum curua ſit referenda.

§. 51. Quin etiam has formulas adhuc generaliores reddere licet. Si enim litterae i, m, n denotent numeros impares, poni poterit

$$x = a(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} + b(p^{\mu} - p^{-\mu})^{m} + c(p^{\nu} - p^{-\nu})^{n}.$$

Manifeſtum enim eſt, ſingula haec membra, dum loco p ſcribitur $\frac{1}{p}$, in valores negatiuos conuerti, propterea quod exponentes i, m, n ſunt impares. Tum vero quia hic exponentes ſupponuntur numeri integri, ſi ſingula membra euoluantur, integrale formulae $\int x\,dp$ facile exhiberi poterit, id quod pro vnico membro oſtendiſſe ſufficiet. Cum enim ſit

$$(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} = p^{i\lambda} - \tfrac{i}{1}p^{(i-2)\lambda} + \tfrac{i(i-1)}{1.\,2}p^{(i-4)\lambda} - \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3}p^{(i-6)\lambda}\ \text{etc.}$$

erit

$$\int x\,dp = \tfrac{a}{i\lambda+1}p^{i\lambda+1} - \tfrac{i\,a}{1(i-2)\lambda+1}p^{(i-2)\lambda+1} + \tfrac{i(i-1)\,a}{1.\,2(i-4)\lambda+1}p^{(i-4)\lambda+1}.$$

Hincque cum ſit $y = p\,x - \int x\,dp$, deſcriptio curuae in promptu erit, id quod etiam perinde ſe habet, ſi plura huiusmodi membra fuerint accepta.

§. 52. Atque hoc modo fere omnia ſatis ſuccincte ſumus complexi, quae olim circa traiectorias reciprocas fuſius reperiuntur expoſita et inuenta. Methodus autem, qua hic vſus ſum, tam plana et aequabilis videtur, vt maior ſimplicitas deſiderari nequeat. Vbi imprimis notari

tari meretur, quod omnes ſolutiones, quas dedimus, ad omnes plane traiectorias tam rectangulas quam obliquangulas aequo ſucceſſu applicari poſſint. Praeterea vero formulae generales pro curuis algebraicis hic prorſus de nouo adiectae ſunt cenſendae: cum illo quidem tempore, quo hoc argumentum eſt tractatum, nemo de talibus formulis generalibus cogitauerit. Quamobrem neminem poenituiſſe confido, qui hoc argumentum, nunc fere penitus oblitum, denuo perluſtrauerit.