CONSIDERATIONES SVPER TRAIECTORIIS TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 3. *Iul.* 1775.

§. 1.

Propoſita aequatione pro circulo $yy = aa - xx$, ſi radio a ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, naſcentur infiniti circuli circa idem centrum C deſcripti, cuiusmodi ſunt circuli AY et ay, ita vt haec aequatio $yy = aa - xx$ infinitos circulos in ſe complectatur; atque in toto plano, in quo hi circuli deſcribuntur, nullum dabitur punctum Y, per quod non aliquis horum circulorum tranſeat. Simili modo ſi in hac aequatione pro circulo: $yy = 2ax - xx$, radio a ſucceſſiue omnes valores, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, tribuantur, abſciſſae autem x perpetuo in eodem axe atque ab eodem termino capiantur, etiam infiniti circuli deſcribentur, qui omnes ſe mutuo in initio abſciſſarum A tangent, et quorum centra in axe continuo longius a puncto A recedent. Quin etiam, ſi radio a negatiui valores tribuantur, circuli ad alteram partem ſuper eodem axe cadent, pro quibus etiam abſciſſae fient negatiuae; atque hoc etiam caſu in toto ſpatio nullum dabitur punctum, per quod non quiſpiam horum circulorum tranſeat. Quod ſi vero talis ſtatuatur aequatio: $yy = cc - (x - a)^2$, et quantitati a continuo omnes valores poſſibiles tribuantur, ma-

Tab. I. Fig. 1.

Fig. 2.

nente quantitate c conſtante, infiniti circuli inter ſe aequales, quorum omnium radii $= c$, ſuper eodem axe deſcribentur, quorum primus, ſi $a = 0$, ſit D C B, exiſtente A initio abſciſſarum; alius vero quicunque erit $d c b$, alius D′ C′ B′, eodem radio $= c$ deſcripti, pro quibus interualla A a, A A′ $= a$, ita vt omnes hi circuli oriantur, ſi circulus B C D continuo iuxta axem promoueatur. Hoc autem caſu, quodcunque accipiatur punctum y, cuius diſtantia ab axe $x y$ non excedat radium c, ſemper dabitur circulus per iſtud punctum tranſiens. Quod ſi vero haec ſtatuatur aequatio: $y = \frac{a}{c} \surd (c c - x x)$, vbi iterum quantitas a continuo augeatur, manente c eadem, caſu $a = c$ deſcribetur circulus D C B. Si $a < c$, prodibit ellipſis B c D, ſuper eodem axe B D $= 2 c$ deſcribenda; at ſi ſumatur $a > c$, orientur huiusmodi ellipſes B C′ D, quarum recta B D erat axis minor, maior vero continuo increſcit; ita vt haec aequatio infinitas complectatur ellipſes, ſuper eodem axe B D deſcribendas, dum alter axis, qui eſt $= 2 a$, continuo a 0 vsque in infinitum augetur. Dummodo ergo punctum y ita capiatur, vt eius diſtantia a recta A C′ non maior ſit quam c, ſemper dabitur talis ellipſis, quae per id tranſeat.

Tab. I. Fig. 3. Fig. 4.

§. 2. Ex his iam exemplis abvnde patet, quemadmodum infinitae lineae curuae ſub vna eademque aequatione comprehendi queant, quod ſcilicet eueniet, ſi aequatio inter coordinatas x et y eiusmodi quantitatem conſtantem a inuoluat, cui ſucceſſiue omnes valores poſſibiles tribui concipiantur, ita tamen, vt pro eadem curua haec quantitas a evndem retineat valorem; dum autem ad alias curuas tranſimus, eius valores continuo mutentur. Perpetuo vero abſciſſas et applicatas litteris x et y more ſolito deſignemus, illam autem quantitatem conſtantem, quae continuo mutari concipitur, littera a, quam *parametrum variabilem* iſtarum curuarum appellabimus.

§. 3.

§. 3. His poſitis, quaecunque aequatio pro talibus curuis infinitis fuerit conſtituta, parametrum variabilem a vtcunque inuoluens, applicatam y ſemper ſpectare licebit tanquam functionem binarum variabilium x et a; vel etiam abſciſſa x aequabitur certae functioni ipſarum y et a; tum vero etiam iſte parameter variabilis a ſpectari poterit tanquam functio binarum x et y. Quemadmodum in poſtremo exemplo allato primo eſt $y = \frac{a}{c} \sqrt{(cc - xx)}$, hoc eſt functio ipſarum x et a; dein vero erit $x = \frac{c}{a} \sqrt{(aa - yy)}$, hoc eſt functio ipſarum y et a; denique ex eadem aequatione fit $a = \frac{cy}{\sqrt{(cc - xx)}}$, hoc eſt functio ipſarum x et y.

§. 4. His praemiſſis problema Traiectoriarum ita dilucide proponi poterit: *Deſcriptis infinitis lineis curuis ſub eadem aequatione generali contentis, in quam ſcilicet parameter variabilis* a *vtcunque ingrediatur, definire eiusmodi lineam curuam, quae omnes illas lineas vbique ſub eodem angulo, ſiue recto ſiue obliquo, traiiciat.* Hocque eſt famoſiſſimum illud problema, in quo olim ſummi Geometrae incredibili ſtudio fuerunt occupati et ex quorum meditationibus maxima incrementa in Analyſin ſunt inuecta, inter quae imprimis ſunt referenda, quae de differentialibus functionum duarum variabilium poſtmodum ſunt vberius explorata.

§. 5. Quoniam igitur haec quaeſtio circa tangentes illarum infinitarum curuarum in ſingulis punctis verſatur, quippe quae a curua quaeſita vbique ſub dato angulo traiici debent, aequationem differentialem pro illis infinitis curuis conſiderari oportet; et quia curua quaeſita continuo alias atque alias ex illis infinitis curuis interſecabit, in hac differentiatione etiam variabilitatis parametri a ratio eſt habenda, vnde tres caſus imprimis ſunt euoluendi: 1.) Si y aequetur functioni ipſarum x

et a, aequatio differentialis huiusmodi habebit formam: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$, vbi p et q ita a se inuicem pendent, vt sit $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$. 2.) Si x aequetur functioni ipsarum y et a, aequatio differentialis erit $\partial x = r\,\partial y + s\,\partial a$, vbi r et s ita a se inuicem pendebunt, vt sit $\left(\frac{\partial r}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)$, quem autem casum seorsim euolui superfluum foret, quoniam binae coordinatae x et y natura sua sunt permutabiles. 3.) Sin autem parameter a aequetur functioni ipsarum x et y, aequatio differentialis huiusmodi prodibit: $\partial a = t\,\partial x + u\,\partial y$; in qua semper erit $\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

§. 6. At si aequatio proposita inter x, y et a ita fuerit comparata, vt neque y per x et a, neque x per y et a, neque a per x et y commode definire liceat, tum aequatio more solito differentiata perducet ad talem formam:

$$P\,\partial y + Q\,\partial x + R\,\partial a = 0,$$

vbi iam satis notum est, talem aequationem inter tres variabiles subsistere plane non posse, nisi inter quantitates P, Q et R certa quaedam relatio intercedat. Ad quam relationem inuestigandam ante omnia perpendendum est, istam aequationem possibilem esse non posse, nisi detur quispiam multiplicator M, qui eam reuera integrabilem reddat, ita vt ista formula:

$$M P\,\partial y + M Q\,\partial x + M R\,\partial a,$$

integrationem reuera admittat. Hinc ergo sequitur, si quantitas a constans accipiatur, hanc formulam $M P\,\partial y + M Q\,\partial x$ integrabilem esse debere, ad quod requiritur vt sit

$$\partial.\left(\frac{MP}{\partial x}\right) = \partial.\left(\frac{MQ}{\partial y}\right),$$

quae aequatio euoluta praebet

$$\text{I. } M.\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - M.\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = Q.\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - P.\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right).$$

Deinde

Deinde integrabilis quoque erit illa aequatio, ſi quantitas x conſtans accipiatur, vnde neceſſe eſt fiat $\partial. (\frac{MP}{\partial a}) = \partial. (\frac{MR}{\partial y})$ quae euoluta dat

$$\text{II. } M(\frac{\partial P}{\partial a}) - M(\frac{\partial R}{\partial y}) = R(\frac{\partial M}{\partial y}) - P(\frac{\partial M}{\partial a}).$$

Denique integrabilis etiam eſſe debet aequatio illa ſumto y conſtante, vnde fit $\partial. (\frac{MQ}{\partial a}) = \partial. (\frac{MR}{\partial x})$, quae euoluta praebet.

$$\text{III. } M(\frac{\partial Q}{\partial a}) - M(\frac{\partial R}{\partial x}) = R(\frac{\partial M}{\partial x}) - Q(\frac{\partial M}{\partial a}).$$

Vt nunc hinc multiplicatorem M penitus ex calculo expellamus, harum aequationum primam ducamus in R, ſecundam in $-Q$ ac tertiam in P, earumque aggregatum a dextra parte praebebit o: ſiniſtrae vero partes per M diuiſae ſuppeditant hanc aequationem:

$$R[(\frac{\partial P}{\partial x}) - (\frac{\partial Q}{\partial y})] + Q[(\frac{\partial R}{\partial y}) - (\frac{\partial P}{\partial a})] + P[(\frac{\partial Q}{\partial a}) - (\frac{\partial R}{\partial x})] = 0.$$

Perpetuo igitur, niſi haec conditio locum habeat, eiusmodi aequationes inter ternas variabiles prorſus ſunt impoſſibiles.

§. 7. Cum igitur quadruplici modo aequatio differentialis pro infinitis curuis propoſitis, quas ſimpliciter *curuas ſecandas* appellabimus, conſtitui poſſit, vnamquamque ſpeciem ſeorſim euolui conueniet, quandoquidem pro ſingulis peculiaria praecepta reperientur, ad curuam quaeſitam, quam *Traiectoriam* vocabimus, inueniendam, vbi quidem caſum ſecundum cum primo coniunctim tractare licebit.

Caſus I.

Quo pro curuis ſecandis applicata y aequatur functioni ipſarum x et a.

§. 8. Pro curuis igitur ſecandis ponamus dari hanc aequationem differentialem: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$, ita vt ſit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$ et

et ex curuis ſecandis conſideremus vnam quamcunque E Y F, quam Traiectoria ſecet in puncto Y, ſitque angulus ſub quo
Tab. I. Fig. 5. haec interſectio fieri debet $= \alpha$. Iam quia idem punctum Y tam in curua ſecanda quam in Traiectoria exſiſtit, eius locus per easdem coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ determinatur. Quatenus id in curua ſecunda exſiſtit, erit $\partial y = p \partial x + q \partial a$; quatenus autem in traiectoria exſiſtit, relatio inter x et y nunc demum explorari debet. Ducatur nunc recta YT, quae curuam ſecandam tangat in Y, atque ad poſitionem huius rectae inueniendam, quoniam ad eandem curuam ſecandam refertur, parameter a pro inuariabili accipi debebit, vnde habebitur $\partial y = p \partial x$, hincque $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; vbi manifeſtum eſt, quantitatem p exprimere tangentem anguli XTY, ita vt, ſi ponamus hunc angulum $XTY = \tau$, futurum ſit $p = \text{tang.}\,\tau$. At vero pro Traiectoria, ſit eius tangens pro eodem puncto Y recta $Y\Theta$, exiſtente angulo $X\Theta Y = \theta$, erit vtique $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang.}\,\theta$, vbi relatio inter y et x reſpicit Traiectoriam.

§. 9. Cum igitur angulus interſectionis debeat eſſe $= \alpha$, ei aequalis eſſe debet angulus $TY\Theta$, quem binae tangentes inuicem formant, vnde ſequitur fore $\alpha = \theta - \tau$, ideoque $\theta = \tau + \alpha$; vnde concluditur $\text{tang.}\,\theta = \frac{\text{tang.}\,\tau + \text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\tau \,.\, \text{tang.}\,\alpha}$. Quia vero eſt $\text{tang.}\,\tau = p$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p + \text{tang.}\,\alpha}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha}$, hincque $\partial y = \frac{p + \text{tang.}\,\alpha}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha} \,.\, \partial x$. Ex qua ergo aequatione relatio inter x et y debet inueſtigari, eaque praebebit aequationem pro Traiectoria quaeſita.

§. 10. Conſideretur nunc Traiectoriae punctum proximum y, quod cadet in curuam ſecandam proximam eyf, cuius ergo parameter erit $a + \partial a$, vnde eius ſitus exprimetur

tur hac aequatione: $\partial y = p \partial x + q \partial a$. Quod ſi ergo hic praecedens valor ipſius ∂y ſubſtituatur, habebitur iſta aequatio: $\frac{tang.\,\alpha + p}{1 - p\, tang.\,\alpha} \partial x = p \partial x + q \partial a$, quae reducitur ad hanc formam: $q \partial a = \frac{tang.\,\alpha (1 + pp)}{1 - p\, tang.\,\alpha} \partial x$, quae tantum duas variabiles continet, quandoquidem per hypotheſin p et q ſunt datae functiones ipſarum x et a. Hinc igitur definiri poterit relatio inter x et a; vnde, ſi valor ipſius a per x exprimatur et in aequatione generali pro curuis ſecandis ſubſtituatur, orietur aequatio inter binas variabiles x et y, qua natura Traiectoriae exprimetur.

§. 11. Quoniam autem aequatio inuenta inter x et a eſt differentialis, in eius integralem introduci poterit noua conſtans arbitraria, cui provti ſucceſſiue alii atque alii valores tribuentur, innumerabiles orientur Traiectoriae, quarum ſingulae curuas ſecandas pariter ſub eodem angulo α traiicient; quae omnes ſub aequatione generali per integrationem inuenta continebuntur et quarum parameter variabilis erit ipſa illa conſtans per integrationem inducta. Vnde patet, curuas ſecandas et Traiectorias ita inter ſe reciprocari, vt, ſi Traiectoriae tanquam curuae ſecandae conſiderentur; tum illae, quae erant curuae ſecandae, nunc fiant illarum Traiectoriae, et quidem ſub eodem interſectionis angulo α.

§. 12. Quod ſi ergo deſiderentur Traiectoriae orthogonales, ita vt angulus interſectionis α ſit rectus, ideoque tang. $\alpha = \infty$, pro iis habebitur iſta aequatio: $(1 + pp) \partial x + pq \partial a = 0$, quae ergo eſt formula principalis pro Traiectoriis rectangulis. Sin autem velimus, vt angulus interſectionis α euaneſcat, aequatio euadet $q \partial a = 0$, ſiue $q = 0$, quae aequatio non amplius eſt differentialis, vnde vnica tantum dabitur talis Traiectoria, quae tranſibit per omnia puncta, in in quibus binae curuae fecandae proximae fibi mutuo occurrunt, feu, quod eodem redit, ifta Traiectoria omnes curuas fecandas tanget. Sin autem angulus interfectionis α debeat effe obliquus, id duplici modo obtineri poterit, provti angulus acutus vel ad dextram vel ad finiftram fuerit conftitutus. Ita fi angulus interfectionis debeat effe obliquus, tang. α tam negatiue quam pofitiue fumi poterit; ficque etiam fatisfaciet haec aequatio: $q\partial a = -\frac{\text{tang.}\,\alpha(1+pp)\partial x}{1+p\,\text{tang.}\,\alpha}$; vnde patet, has curuas a praecedentibus penitus fore diuerfas. Tantum igitur fupereft vt haec aliquot exemplis illuftremus.

Exemplum I.

§. 13. Sint curuae fecandae omnes rectae ex eodem puncto A eductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{ax}{c}$, vbi c eft quantitas conftans, a vero parameter ille variabilis; vnde cum fit $\partial y = \frac{a\partial x}{c} + \frac{x\partial a}{c}$, erit $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{x}{c}$. Hinc igitur fi loco tang. α breuitatis gratia fcribamus δ, pro Traiectoria habebimus hanc aequationem: $x\partial a = \frac{\delta(cc+aa)}{(c-\delta a)}\partial x$, quam ergo aequationem differentialem inter x et a integrari oportet. Statim autem feparatio variabilium praebet:

$$\delta.\frac{\partial x}{x} = -\frac{\delta a\partial a + c\partial a}{cc+aa},$$

cuius aequationis integrale eft

$$\delta\, l\, x = \text{A tang.}\,\frac{a}{c} - \delta\, l\,\sqrt{(cc+aa)} + \delta\, l\, \text{C}, \text{ fiue}$$

$$\delta\, l\,\frac{x\sqrt{(cc+aa)}}{c} = \text{A tang.}\,\frac{a}{c}.$$

Hic loco C fcribamus bc, ita vt b fit parameter variabilis Traiectoriarum, pro quibus ergo habebitur ifta aequatio:

$$l\,\frac{x\sqrt{(cc+aa)}}{bc} = \frac{1}{\delta}\,\text{A tang.}\,\frac{a}{c},$$

vbi δ eft tangens anguli, fub quo Traiectoria omnes rectas ex

puncto

puncto A eductas traiicit, quae ergo manifesto est Spiralis logarithmica. Vnde patet, si angulus intersectionis debeat esse rectus, ideoque $\delta = \infty$, tum statim fore $x \sqrt{(cc + aa)} = bc$, vnde colligimus $a = \frac{c\sqrt{(bb - xx)}}{x}$, qui valor in aequatione generali $y = \frac{ax}{c}$ substitutus praebet aequationem pro Traiectoriis $y = \sqrt{(bb - xx)}$; vnde patet, quod quidem per se est perspicuum, Traiectorias esse circulos centro A, radio b, descriptos.

Exemplum 2.

§. 14. Sint curuae secandae omnes circuli ex eodem centro C, radio variabili a descripti, pro quibus ergo est $y = \sqrt{(aa - xx)}$, vnde fit $\partial y = \frac{a \partial a - x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, quae aequatio cum formula generali $\partial y = p \partial x + q \partial a$ comparata, praebet Tab. I. Fig. 1.

$$p = \frac{-x}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ et } q = \frac{a}{\sqrt{(aa - xx)}},$$

ideoque $1 + pp = \frac{aa}{aa - xx}$. Quamobrem aequatio pro Traiectoriis, ponendo tang. $\alpha = \delta$, erit

$$\frac{a \partial a}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{\delta aa \partial x}{(\delta x + \sqrt{(aa - xx)})\sqrt{(aa - xx)}}, \text{ siue}$$

$$\partial a = \frac{\delta a \partial x}{\delta x + \sqrt{(aa - xx)}};$$

Hinc igitur, si angulus intersectionis debeat esse rectus, seu $\delta = \infty$, erit $\partial a = \frac{a \partial x}{x}$, ideoque $a = bx$, qui valor in aequatione generali $y = \sqrt{(aa - xx)}$ substitutus dat $y = x\sqrt{(bb - 1)}$, siue $y = cx$, quae aequatio in se complectitur omnes rectas e centro C eductas.

§. 15. Pro angulis autem obliquis aequatio inuenta hac forma repraesentetur: $\partial a \sqrt{(aa - xx)} = \delta (a \partial x - x \partial a)$; vbi notetur, formulam $a \partial x - x \partial a$ integrabilem reddi, si diuidatur per functionem homogeneam duarum dimensionum ipsarum a et x. Diuidatur igitur haec aequatio per $a\sqrt{(aa - xx)}$, vt prodeat $\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta (a \partial x - x \partial a)}{a \sqrt{(aa - xx)}}$. Fiat enim $x = av$, et aequatio

tio nostra induet hanc formam: $\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta . \partial v}{\sqrt{1 - vv}}$, quae integrata dat $l\, a = \delta$ A fin. $v = \delta$ A fin. $\frac{x}{a}$, fiue $l \frac{a}{b} = \delta$. A fin. $\frac{x}{a}$, vbi b fit parameter variabilis Traiectoriarum. Quia autem hinc fit $xx + yy = aa$, erit $a = \sqrt{(xx+yy)}$, qui valor in altervtra aequatione fubftitutus dat $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = $ fin. $\frac{1}{\delta}\, l \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{b}$, fiue fin. $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{1}{\delta}\, l \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{b}$, quae ergo eft aequatio inter x et y pro Traiectoriis. Ex ipfa autem aequatione propofita $y = \sqrt{(aa - xx)}$ eius valorem $a = \sqrt{(xx+yy)}$ fubftituamus, quem breuitatis gratia ftatuamus $= z$, eritque pro Traiectoriis $l \frac{z}{b} = \delta$ A fin. $\frac{x}{z}$, vbi, fi porro Φ fit ille angulus, cuius finus eft $\frac{x}{z}$, fiet $l \frac{z}{b} = \delta\, \Phi$. Cum igitur z denotet diftantiam puncti y a centro C, Φ autem complementum anguli, quem haec recta cum axe conftituit; euidens eft logarithmum diftantiae z proportionalem effe ifti angulo, in quo confiftit indoles Spiralium logarithmicarum.

Exemplum 3.

Fig. 2. §. 16. Sint nunc curuae fecandae omnes circuli, fefe in ipfo puncto A tangentes, quae hac aequatione exprimantur: $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, et cum fit $\partial y = \frac{a\partial x - x\partial x + x\partial a}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, erit

$$p = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - xx)}} \text{ et } q = \frac{x}{\sqrt{(2ax - xx)}},$$

hincque $1 + pp = \frac{aa}{2ax - xx}$, vnde pro Traiectoriis habebitur haec aequatio: $\frac{x\partial a}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{\delta . aa\partial x}{2ax - xx - \delta(a - x)\sqrt{(2ax - xx)}}$, fiue

$$x\partial a\sqrt{(2ax - xx)} - \delta(a - x)x\partial a = \delta\, aa\partial x,$$

quae aequatio cum fit homogenea, ponatur $x = at$, vnde haec prodibit aequatio:

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta\partial t}{t\sqrt{(2t - tt)} + \delta tt - 2\delta t} = \frac{\delta\partial t}{t\sqrt{(2t - tt)} - \delta(2t - tt)}$$

quae

quae aequatio quidem eſt ſeparata, eius autem integratio non ſtatim in oculos incurrit, cum tamen ex rei natura facile intelligatur, omnes has Traiectorias ſemper eſſe circulos.

§. 17. Euoluamus primo caſum quo angulus interſectionis eſt rectus, ſeu $\delta = \infty$, fietque

$$\frac{\partial a}{a} = -\frac{\partial t}{2t - tt} = -\frac{\partial t}{2t} - \frac{\partial t}{2(2-t)},$$

cuius integrale eſt

$$la = -\tfrac{1}{2}lt + \tfrac{1}{2}l(2-t) = \tfrac{1}{2}l\frac{2-t}{t} + lb,$$

hincque ad numeros regrediendo fit $a = b\sqrt{\frac{2-t}{t}}$, ita vt ſit $a = b\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, vnde, ob $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, fiet

$$ax = b\sqrt{(2ax - xx)} = by.$$

Sicque tantum opus eſt, vt loco a eius valor ex aequatione propoſita ſubſtituatur, qui eſt $a = \frac{yy+xx}{2x}$, hincque prodit $yy + xx = 2by$, quae aequatio manifeſto eſt pro infinitis circulis, ſiquidem parameter b, qui eſt radius horum circulorum, tanquam variabilis ſpectetur. Atque hi circuli omnes axem in ipſo puncto A tangent.

§. 18. Pro angulis autem obliquis negotium facillime expedietur, ſtatuendo $\frac{2-t}{t} = vv$, ita vt ſit $t = \frac{2}{1+vv}$, ideoque $\partial t = -\frac{4v\,dv}{(1+vv)^2}$ atque $\sqrt{(2t - tt)} = \frac{2v}{1+vv}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio induet hanc formam: $\frac{\partial a}{a} = -\frac{\delta \partial v}{1 - \delta v}$, cuius integrale manifeſto eſt

$$la = l(1 - \delta v) + lb, \text{ ſiue } a = b(1 - \delta v).$$

Cum igitur ſit $v = \sqrt{\frac{2-t}{t}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, erit

$$a = b\left(1 - \delta\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\right);$$

 quae

quae aequatio, cum sit $\sqrt{(2ax - xx)} = y$, fiet $a = b\left(1 - \frac{\delta y}{x}\right)$; et cum ex aequatione proposita sit $a = \frac{xx + yy}{2x}$, pro Traiectoriis prodibit ista aequatio inter x et y: $xx + yy = 2b(x - \delta y)$, quae aequatio manifesto est pro infinitis circulis, siquidem quantitas b variabilis accipiatur. Quanquam igitur huiusmodi exempla triuia videntur, tamen attentione imprimis sunt digna, atque ad vires in Analysi exercendas accommodata.

Exemplum 4.

Tab. I. Fig. 6. §. 19. Proposita sit pro curuis secandis haec aequatio: $y = a + \sqrt{(cc - xx)}$, existente c quantitate constante, et a parametro variabili, quae aequatio ergo continet infinitos circulos inter se aequales et super recta dispositos, quae ad axem in A est normalis. Quaeruntur igitur eiusmodi curuae, quae omnes hos circulos sub angulo α traiiciant. Cum ergo hic sit $\partial y = \partial a - \frac{x \partial x}{\sqrt{cc - xx}}$, erit $p = -\frac{x}{\sqrt{(cc - xx)}}$ et $q = 1$, vnde aequatio pro Traiectoriis fit $\partial a = \frac{\delta cc \partial x}{\sqrt{cc - xx}(\delta x + \sqrt{(cc - xx)})}$, in qua statim loco ∂a eius valor ex aequatione proposita substitui potest, qui est $\partial y + \frac{x \partial x}{\sqrt{(cc - xx)}}$, vnde fit

$$\partial y = \frac{\delta \partial x \sqrt{(cc - xx)} - x \partial x}{\delta x + \sqrt{(cc - xx)}};$$

haec ergo aequatio inter binas coordinatas x et y subsistit, quae adeo a se inuicem sponte sunt separatae.

§. 20. Consideremus hic primo Traiectorias rectangulas, siue sit $\delta = \infty$, eritque $\partial y = \frac{\partial x}{x} \sqrt{(cc - xx)}$, ad quam aequationem integrandam fiat $\sqrt{(cc - xx)} = t$, eritque $xx = cc - tt$, et sumtis differentialibus logarithmicis: $\frac{\partial x}{x} = -\frac{t \partial t}{cc - tt}$; sicque prodibit haec aequatio:

$$\partial y = -\frac{tt \partial t}{cc - tt} = \partial t - \frac{cc \partial t}{cc - tt},$$

cuius

cuius integrale est

$$y = t - \tfrac{1}{2} c\, l \tfrac{c+t}{c-t} + b.$$

Cum igitur $t = \surd(cc - xx)$, erit

$$y = b + \surd(cc - xx) - \tfrac{1}{2} c\, l \tfrac{c+\surd(cc-xx)}{c-\surd(cc-xx)}$$

quae ergo curua est transcendens per logarithmos construenda; vnde quidem statim patet, sumto $x = 0$ fieri $y = -\infty$: at sumto $x = c$ fieri $y = b$. Vt formam curuae in hoc loco scrutemur, ponamus $x = c - \omega$, existente ω quasi infinite paruo, eritque $\surd(cc - xx) = c\surd(2\omega - \omega\omega) = c\surd 2\omega(1 - \tfrac{\omega}{4} - \tfrac{\omega\omega}{32})$, hincque

$$\frac{a+\surd(cc-xx)}{a-\surd(cc-xx)} = \frac{1+\surd(2\omega-\omega\omega)}{1-\surd(2\omega-\omega\omega)} = \frac{1+\surd 2\omega(1-\frac{\omega}{4}-\frac{\omega\omega}{32})}{1-\surd 2\omega(1-\frac{\omega}{4}-\frac{\omega\omega}{32})}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\surd 2\omega(1 - \tfrac{\omega}{4} - \tfrac{\omega\omega}{32}) = \Omega$, vt sit

$$y = b + c\Omega - \tfrac{1}{2} c\, l \tfrac{1+\Omega}{1-\Omega},$$

vbi Ω est quantitas quasi infinite parua. Tum autem constat esse

$$\partial. \tfrac{1}{2} l \tfrac{1+\Omega}{1-\Omega} = \tfrac{d\Omega}{1-\Omega\Omega} = \partial\Omega(\tfrac{1}{1-\Omega\Omega}) = \partial\Omega(1 + \Omega^2 + \Omega^4)$$

ideoque

$$\tfrac{1}{2} l \tfrac{1+\Omega}{1-\Omega} = \Omega + \tfrac{1}{3}\Omega^3 + \tfrac{1}{5}\Omega^5 \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis fiet $y = b - \tfrac{1}{3} c\Omega^3$. Est vero $\Omega^3 = 2\omega\surd 2\omega$, sicque prodit $y = b - \tfrac{2}{3} c\omega\surd 2\omega$; vnde patet Traiectoriam in his punctis habere cuspidem parabolae cubicali secundae similem.

§. 21. Pro angulis autem obliquis, quia inuenimus

$$\partial y = \frac{\delta\partial x\surd(cc-xx) - x\partial x}{\delta x + \surd(cc-xx)},$$

pro

pro huius aequationis integratione, quae vtique non exiguam dexteritatem poſtulat, ponamus $\frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{(cc-xx)}}=t$, eritque $\sqrt{(cc-xx)}=\frac{x(1+\delta t)}{\delta-t}$, vnde colligitur

$$x=\frac{c(\delta-t)}{\sqrt{(1+\delta\delta)(1+tt)}}=\frac{c}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}\cdot\frac{\delta-t}{\sqrt{(1+tt)}},\text{ hincque}$$

$$\partial x=\frac{-c}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}\left(\frac{\partial t+\delta t\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Cum igitur ſit $\partial y=t\,\partial x$, erit

$$-\frac{\partial y\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}=\frac{t\partial t+\delta ttdt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t\partial t-\delta\partial t+\delta\partial t(1+tt)}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque

$$-\frac{\partial y\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}=\frac{t\,\partial t-\delta\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\delta\,\partial t}{\sqrt{(1+tt)}}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{t\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

$$\int\frac{\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}\text{ et}$$

$$\int\frac{\partial t}{\sqrt{(1+tt)}}=l\,(t+\sqrt{1+tt}),$$

quamobrem integrando habebimus

$$\frac{\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}(b-y)=-\frac{(1+\delta t)}{\sqrt{(1+tt)}}+\delta\,l\,(t+\sqrt{1+tt}),$$

vbi notetur eſſe $t=\frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{(cc-xx)}}$, ita vt haec curua etiam a logarithmis pendeat.

§. 22. Hic autem ſe offert alius modus multo concinnior eandem hanc integrationem per angulos expediendi. Statua-

Statuatur enim $x = c$ ſin. Φ, erit $\sqrt{(cc - xx)} = c$ coſ. Φ et $\partial x = c\,\partial\Phi$ coſ. Φ, vnde prodibit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\delta \text{ coſ. } \Phi - \text{ſin. } \Phi}{\delta \text{ ſin. } \Phi + \text{coſ. } \Phi}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\delta - \text{tang. } \Phi}{\delta \text{ tang. } \Phi + 1}\right).$$

Quare cum ſit $\delta =$ tang. α, erit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \Phi}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \Phi}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \text{ tang. } (\alpha - \Phi).$$

Hic porro loco Φ ſcribatur $\alpha - (\alpha - \Phi)$, vt fiat

$$\text{coſ. } \Phi = \text{coſ. } \alpha \text{ coſ. } (\alpha - \Phi) + \text{ſin. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi),$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left[\text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi) + \frac{\text{ſin. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi)^2}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)}\right], \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left[\text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi) + \frac{\text{ſin. } \alpha}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} - \text{ſin. } \alpha \text{ coſ. } (\alpha - \Phi)\right],$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left(\frac{\text{ſin } \alpha}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} - \text{ſin. } \Phi\right),$$

hincque integrando eruitur

$$y = c \text{ ſin. } \alpha \int \frac{\partial\Phi}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} + c \text{ coſ. } \Phi + b.$$

Pro priore membro ſit $\alpha - \Phi = 90° - \omega$, ideoque $\partial\Phi = \partial\omega$, eritque

$$\int \frac{\partial\Phi}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} = \int \frac{\partial\omega}{\text{ſin. } \omega} = l \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\omega = l \text{ tang. } (45° - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\Phi),$$

quocirca aequatio integralis erit

$$y = b + c \text{ coſ. } \Phi + c \text{ ſin. } \alpha\, l \text{ tang. } (45° - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\Phi),$$

exiſtente $x = c$ ſin. Φ. Sicque pro quouis angulo Φ tam x quam y aſſignare licebit.

Exemplum 5.

§. 23. Proponatur pro curuis ſecandis haec aequatio: $y = \frac{a}{c}\sqrt{(cc - xx)}$, quae complectitur infinitas ellipſes ſuper eodem axe $= 2a$ conſtructas, et cum ſit

$$\partial y = \frac{\partial a}{c}\sqrt{(cc - xx)} - \frac{a x \partial x}{c\sqrt{(cc - xx)}}, \text{ erit}$$

$$p = -\frac{ax}{c\sqrt{(cc - xx)}} \text{ et } q = \frac{1}{c}\sqrt{(cc - xx)},$$

vnde pro Traiectoria habebitur

$$\partial a (cc - xx) = \frac{\delta \partial x (c^4 + (aa - cc) xx)}{(c\sqrt{(cc - xx)} + \delta a x)},$$

quam aequationem quomodo tractari conueniat, haud facile perſpicitur.

§. 24. Euoluamus igitur caſum quo $\delta = \infty$, pro quo habebimus

$$\partial a (cc - xx) = \frac{(c^4 + (aa - cc) xx) \partial x}{a x}.$$

Ponatur hic $\sqrt{(cc - xx)} = t$, erit $xx = cc - tt$ et $\frac{\partial x}{x} = \frac{-t \partial t}{cc - tt}$, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$att \partial a = -\frac{t \partial t}{(cc - tt)}(aacc - aatt + cctt), \text{ ſiue}$$

$$att\partial a + aat\partial t = -\frac{cct^3\partial t}{cc - tt},$$

vnde integrando fit

$$\tfrac{1}{2}aatt = -cc\int\frac{t^3\partial t}{cc - tt} = \tfrac{1}{2}cctt + c^4 l\sqrt{(cc - tt)} + C.$$

Reſtituto igitur pro t valore $\sqrt{(cc - xx)}$ et per a multiplicando colligitur

$$aa(cc - xx) = C + cc(cc - xx) + c^4 l x x.$$

Verum ex aequatione propoſita eſt $aa = \frac{ccyy}{cc - xx}$, quo valore ſubſtituto habebitur haec aequatio inter x et y pro Traiectoria:

$$yy = bb - xx + cc\, l\, xx.$$

Phaenomena harum Traiectoriarum.

Tab. I. Fig. 7. §. 25. Forma harum Traiectoriarum quaedam phaenomena prorſus ſingularia offert, quae, cum non ſint obuia, vberiore explicatione digna videntur. Sit igitur CDc ſemis-

ſis

ſis vniuscuiuscunque illarum ellipſium ſuper axe communi $CAc = 2c$ conſtructarum, cuius ergo alter ſemi-axis AD erit $= a$; et quia omnes hae curuae duobus diametris Cc et Dd ſunt praeditae, iidem quoque eſſe debent diametri Traiectoriarum, quarum ergo vnius quadrans ſit curua EGF, pro qua inter abſciſſam $AX = x$ et $XY = y$, hanc nacti ſumus aequationem: $yy = bb - xx + cc\, l\, xx$, vbi quidem loco c vnitatem ſcribere licebit, vt ſit $yy = bb - xx + l\, xx$, in qua loco $l\, xx$ non ſcribimus $2\, l\, x$, quia alioquin aequatio fieret imaginaria, ſi x caperetur negatiue. Hoc enim modo aequatio manebit eadem, ſiue tam x quam y ſumantur poſitiue ſiue negatiue.

§. 26. Secundo loco obſeruo, hanc Traiectoriam realem eſſe non poſſe, niſi eius parameter b vnitatem ſuperet, quod ita oſtendo. Ponatur $l\, xx = v$, vt fiat

$$xx = e^v = 1 + v + \frac{vv}{2} + \frac{v^3}{6} + \text{etc.}$$

vnde erit

$$yy = bb - 1 - \frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6} - \text{etc.}$$

quae expreſſio, quamdiu $b < 1$, certe eſt negatiua; ſumto autem $b = 1$, fiet $yy = -\frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6}$ etc., quae aequatio ſubſiſtere nequit, niſi ſit $v = 0$; tum autem erit $x = 1$ et $y = 0$. Hoc ergo caſu tota Traiectoria EGF coaleſcit in vnico puncto C, cui quidem ſimile punctum ex altera parte c reſpondebit.

§. 27. Sit igitur $b > 1$, et ſumto $x = 1 = AC$ erit $yy = bb - 1$, ideoque applicata $CG = \sqrt{(bb-1)}$. Vtrinque autem aſſignari poterunt puncta E et F, vbi applicata y euaneſcet et curua axi normaliter inſiſtet. Cum enim poſito $lxx = v$ fiat $bb - 1 - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{6}v^3 = 0$, ideoque $bb - 1 = \frac{1}{2}vv + \frac{1}{6}v^3$, euidens eſt pro v dari duplicem valorem, alterum po-

 ſitiuum

ſitiuum, alterum negatiuum. Si enim bb minime vnitatem ſuperet, erit tam $v = + \sqrt{2(bb - 1)}$ quam $v = - \sqrt{2(bb - 1)}$. Priore caſu abſciſſa x erit vnitate maior et praebebit punctum in Traiectoria F; ſin autem v negatiuum, erit abſciſſa x vnitate minor et valebit pro Traiectoriae puncto E. Pro maioribus autem valoribus ipſius b, quia maiorum numerorum logarithmi prae ipſis ſunt valde exigui, pro maiore valore AF erit proxime $xx = bb + lbb$; vnde patet fore $x > b$. Pro negatiuo autem valore fiet proxime $lxx = -bb$, ideoque $xx = \frac{1}{e^{bb}}$, quae quantitas fit quam minima, ſtatim ac b mediocriter vnitatem ſuperauerit, quo ergo caſu punctum E ad A proxime accedit: in ipſum autem incidere nequit, niſi b fiat infinitum.

§. 28. Hinc igitur videmus, maiorem Traiectoriae portionem CGF extra curuas ſecandas cadere, id quod rei naturae aduerſari videtur, quia in hac regione nullae curuae ſecandae occurrere videntur. Verum cum pro curuis ſecandis haec aſſumta ſit aequatio generalis: $y = \frac{a}{c}\sqrt{(cc - xx)}$, vbi litterae a omnes plane valores ſucceſſiue tribui aſſumimus; hinc etiam valores imaginarii excludi non debent, dummodo curuas reales exhibeant. Manifeſtum autem eſt, ſi loco a ſcribatur $a\sqrt{-1}$, tum fore $y = \frac{a}{c}\sqrt{(xx - cc)}$, quae aequatio manifeſto infinitas hyperbolas ad eundem axem transuerſum $Cc = 2c$ relatas continet, quae a Traiectoriae portione GF in O normaliter ſecantur.

§. 29. Haec igitur obſeruanda venere pro angulo interſectionis recto; ſin autem interſectiones obliquae deſiderentur, ex hac aequatione:

∂a

A. $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)$. Pro altera parte fit $\partial P = P' \partial p$, vnde quia hic sola a pro variabili habetur, erit $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = P.\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)$, tum vero, quia A est functio solius a, erit $\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right) = \frac{\partial A}{\partial a}$. Hinc igitur pro altera parte habebimus:

$$\left(\frac{\partial . AP}{\partial a}\right) = P . \frac{\partial A}{\partial a} + AP'\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right).$$

Ex his igitur conditio integrabilitatis erit

$$A\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = P . \frac{\partial A}{\partial a} + AP'\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

in qua aequatione sola quantitas a vt variabilis consideratur, dum altera x quasi esset constans spectatur.

§. 32. Tractemus igitur in hac aequatione quantitatem x vt prorsus constantem, quo facto erit vtique $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \frac{\partial p}{\partial a}$, atque hinc per $d\,a$ multiplicando orietur ista aequatio differentialis: $A\,\partial p = P\,\partial A + AP'\,\partial p$, quae, ob $P'\partial p = \partial P$, abit in hanc formam: $A\,\partial p = P\,\partial A + A\,\partial P$, quae per AP diuisa fit $\frac{\partial p}{P} = \frac{\partial A}{A} + \frac{\partial P}{P}$, cuius omnes termini sunt integrabiles, propterea quod P est functio ipsius p. Integrale autem erit

$$\int \frac{\partial p}{P} = l\,A + l\,P - l\,X,$$

vbi loco constantis functionem quamcunque ipsius x adiicere licet, ita vt iam habeamus $\int \frac{\partial p}{P} = l\,\frac{AP}{X}$, haecque aequatio eiusmodi relationem complectitur, vnde Traiectorias quaesitas definire licebit.

§. 33. Cum igitur nostro casu sit $P = \frac{\delta(1+pp)}{\delta p - 1}$, erit $\frac{\partial p}{P} = \frac{(\delta p - 1)\,\partial p}{\delta(1+pp)}$. Hinc integrando colligitur

$$\int \frac{\partial p}{P} = l\,\sqrt{(1+pp)} - \tfrac{1}{\delta}\,A\,\mathrm{tang}.\,p,$$

vnde nostra aequatio erit

$$0 = \tfrac{1}{\delta}\,A\,\mathrm{tang}.\,p + l\,\frac{AP}{X\sqrt{(1+pp)}}, \text{ siue}$$

$$\partial a(cc - xx) = \frac{\delta(c^4 + (aa - cc)xx)\partial x}{c\gamma(cc - xx) + \delta ax}$$

determinandae, fateri cogimur, nullis artificiis adhibitis hanc aequationem etiamnunc resolui potuisse; atque haec ipsa difficultas plerumque occurrit, quando pro curuis secandis aequationes aliquanto magis complicatae accipiuntur; vnde iam olim haec nata est quaestio: quomodo aequationes pro curuis secandis comparatae esse debeant, vt aequationem pro Traiectoriis resoluere liceat? Quod cum generatim neutiquam praestari possit, casum prorsus singularem hic euoluamus, quandoquidem iam olim hinc pulcherrima incrementa in Analysi sunt patefacta.

Euolutio casus singularis.

§. 30. Consideremus igitur pro curuis secandis aequationem generalem: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$, vbi p et q eiusmodi sint functiones ipsarum x et a, vt sit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$; et quaestio iam huc redit, vt aequatio pro Traiectoriis inuenta: $q\,\partial a = \frac{\delta(1 + pp)\partial x}{\delta p}$, etiam fiat integrabilis, siue vt multiplicatorem admittat, quo ea integrabilis reddatur. Quod cum in genere etiam exsequi non liceat, in eos casus inquiramus, quibus iste multiplicator esse potest functio quaepiam ipsius a tantum. Denotet igitur A istam functionem, ita vt haec forma $A.q\,\partial a - \frac{\delta A\,\partial x(1 + pp)}{1 - \delta p}$, euadat integrabilis. Pro quo efficiendo ponatur breuitatis gratiae $\frac{\delta(1 + pp)}{\delta p - 1} = P$, ita vt P sit functio ipsius p; et iam requiritur vt haec formula: $A\,q\,\partial a + A\,P\,\partial x$, fiat integrabilis.

§. 31. Per regulam igitur generalem esse oportet $(\frac{\partial . Aq}{\partial x}) = (\frac{\partial . AP}{\partial a})$. Hic autem prior pars euoluta dat $A.(\frac{\partial q}{\partial x})$. Vidimus autem esse $(\frac{\partial q}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial a})$, sicque ex hac parte habebimus

$$o = \tfrac{1}{\delta} \, A \, \text{tang.} \, p + l \frac{\delta A \sqrt{(1+pp)}}{(\delta p - 1) X},$$

ex qua aequatione ſi liceret valorem ipſius p elicere per A et X, vnde ſimul valor ipſius q daretur, pro curuis ſecandis haberetur iſta aequatio: $\partial y = p \, \partial x + q \, \partial a$; pro Traiectoriis autem valeret haec ipſa aequatio, quam modo eruimus inter x et a, quarum A et X ſunt functiones quaecunque pro lubitu accipiendae, ita vt hinc iam adipiſcamur aequationem ſatis generalem pro curuis ſecandis, quarum Traiectorias actu exhibere licet.

§. 34. Quoniam autem hinc in genere valorem ipſius p per x et a elicere non licet, caſum euoluamus, quo angulus interſectionis debet eſſe rectus, ſeu $\delta = \infty$; tum igitur fieri debet $l \frac{A \sqrt{(1+pp)}}{pX} = o = l\,1$, ſicque erit $A \sqrt{(1+pp)} = pX$, vnde elicitur $p = \frac{A}{\sqrt{(XX - AA)}}$, ita vt pro curuis ſecandis habeatur haec aequatio differentialis: $\partial y = \frac{A \partial x}{\sqrt{(XX - AA)}} + q \, \partial a$, vbi quidem q eum habet valorem, quem integrabilitas huius formulae poſtulat, ſcilicet vt ſit $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)$. Cum igitur, ſumta ſola A pro variabili, ſit $\partial p = \dfrac{XX \partial A}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial a} \times \frac{XX}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare ſi nunc ſola X pro variabili habeatur, erit

$$\partial q = \frac{\partial A}{\partial a} \times \frac{XX \partial x}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}} \text{ hincque}$$

$$q = \frac{\partial A}{\partial a} \times \int \frac{XX \partial x}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}},$$

in

in qua formula integrali ſola x pro variabili eſt habenda. Tum vero ipſas Traiectorias ex hac aequatione differentiali:

$$q\,\partial a = -\frac{(1+pp)\partial x}{p} = -\frac{XX\,\partial x}{A\sqrt{(XX-AA)}},$$

definiri oportet, quae cum per hypotheſin integrabilis ſit facta per A multiplicando, pro Traiectoriis valebit iſta aequatio per ſe integrabilis: $A\,q\,\partial a + \frac{XX\,\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}} = 0$, cuius integrale quantitati conſtanti C aequale poſitum dabit certam relationem inter X et A, ex qua, ſi valor ipſius A per x definitus in aequatione pro curuis ſecandis ſubſtituatur, obtinebitur aequatio inter x et y pro Traiectoriis, iisque infinitis, ſiquidem conſtanti C ſucceſſiue omnes valores tribuantur.

§. 35. Cum igitur hi valores pro p et q inuenti reddant aequationem $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$ integrabilem, eius integrale vtique erit

$$y = \int p\,\partial x = \int \frac{A\,\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}},$$

ſiquidem hic quantitas A conſtans accipiatur, ita vt pro curvis ſecandis haec habeatur aequatio integralis: $y = \int \frac{A\,\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}}$: ſiquidem in hac integratione parameter a vt conſtans tractetur; vnde patet, quaecunque functio ipſius x pro X accipiatur, hanc aequationem: $y = \int \frac{A\,\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}}$ ſemper eiusmodi continere lineas curuas, et quidem infinitas, ſiquidem poſt integrationem ipſi A vel a omnes poſſibiles valores tribuantur. Tum vero pro omnibus iſtis curuis Traiectorias orthogonales aſſignare licebit ope huius aequationis: $\int \frac{XX\,\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}} = C$; vbi ſcilicet iterum quantitas A vt conſtans eſt tractanda. Ex hac enim, ſi valor ipſius A per X determinetur et in aequatione iam integrata pro curuis ſecandis ſubſtituatur, prodibit aequatio inter x et y pro Traiectoriis, quarum parameter variabilis in littera C continebitur. Cum autem haec in genere non

parum

parum abstrusa videantur, rem aliquot exemplis illustrari conueniet.

Exemplum 1.

§. 36. Sit $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt pro curuis secandis prodeat ista aequatio: $y = \int \frac{\partial x \sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{(ax - aa)}$, quae infinitas parabolas in se comprehendit, quarum vniuscuiusque parameter est $= 4a$ et vertex a puncto fixo A distat interuallo $= a$. His igitur parabolis descriptis Traiectoriae orthogonales ex hac aequatione erunt determinandae: $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(x-a)}} = C$, siue integrando pro hic curuis habebimus $\frac{2}{3}(2a + x)\sqrt{(x-a)} = C$. Hac ergo aequatione cum aequatione superiore $y = 2\sqrt{(ax - aa)}$ coniuncta quantitas a eliminetur, et proueniet aequatio inter x et y tantum; calculo autem subducto peruenitur ad hanc aequationem:

$$(x^3 + \frac{3}{2} x y y + C)^2 = (x x - y y)^3$$

quae est pro curua sexti ordinis.

Exemplum 2.

§. 37. Sumatur $X = \frac{1}{x}$ et $A = \frac{1}{a}$, et pro curuis secandis orietur haec aequatio: $y = \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \sqrt{(aa - xx)}$, quae infinitos complectitur circulos concentricos. Pro Traiectoriis autem aequatio erit $\int \frac{a \partial x}{x\sqrt{(aa - xx)}} = C$, quod quidem integrale est transcendens. Quoniam autem posito $x = at$ haec formula fit $\frac{\partial t}{t\sqrt{(1-tt)}} = C$, hinc patet, certam functionem ipsius t constantem esse debere; ex quo manifestum est ipsam quantitatem t esse constantem, hoc est $\frac{x}{a}$ erit quantitas constans, puta n, ita vt sit $a = \frac{x}{n}$, qui valor in aequatione generali substitutus praebet $y = \frac{x\sqrt{(1-nn)}}{n}$, quae aequatio manifesto continet infinitas lineas rectas, hicque casus eo magis est notatu dignus, quod, si more solito

Exemplum I.

§. 42. Sint primo omnes curuae secandae lineae rectae, ex eodem axis puncto A eductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{ax}{b}$, vbi a spectetur tanquam parameter variabilis, manente b constante. Ex hac igitur aequatione erit $a = \frac{by}{x}$ hincque $\partial a = \frac{bx\partial y - by\partial x}{xx}$, vnde fit $p = -\frac{by}{xx}$ et $q = \frac{b}{x}$, quare pro Traiectoriis orietur haec aequatio:

$$\partial y = \frac{(\delta x + y)\partial x}{x - \delta y}, \text{ siue } \partial y(x - \delta y) = \partial x(\delta x + y).$$

Hac scilicet methodo pro Traiectoriis statim peruenimus ad aequationem differentialem inter x et y, dum methodo praecedente demum per plures ambages talem aequationem elicere oportebat, quam ob caussam haec methodus praecedente longe anteferenda videtur.

§. 43. Pro his Traiectoriis statuamus primo angulum interfectionis α rectum, vt fit $\delta = \infty$, eritque nostra aequatio $x\partial x + y\partial y$, cuius integrale statim dat $xx + yy = cc$, quae aequatio continet infinitos circulos concentricos ex ipso puncto A descriptos, quorum scilicet radius c vt variabilis spectari potest.

§. 44. Pro angulis autem obliquis aequatio hac forma repraesentetur: $x\partial y - y\partial x = \delta(x\partial x + y\partial y)$, quae per $xx + yy$ diuisa sponte fit integrabilis: erit enim

$$\int \frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \text{A tang.} \frac{y}{x}, \text{ ac}$$

$$\int \frac{x\partial x + y\partial y}{xx + yy} = l\sqrt{(xx + yy)}$$

sicque habebitur

$$\text{A tang.} \frac{y}{x} = \delta\, l\sqrt{(xx + yy)}.$$

Quodsi iam vocetur angulus $XAY = \omega$, vt sit tang. $\omega = \frac{y}{x}$ et

AY =

$AY = z = \sqrt{(xx+yy)}$, erit $\omega = \delta l z$, ita vt iste angulus metiatur logarithmum distantiae $AY = z$, quae ergo lineae erunt spirales logarithmicae rectas singulas AY sub angulo cuius tangens $= \delta$ secantes.

Exemplum 2.

§. 45. Sint curuae secantes omnes circuli axem AX in A normaliter secantes, hac aequatione: $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, contenti, eritque $a = \frac{xx+yy}{2x}$ hincque differentiando

$$\partial a = \frac{\partial x(xx-yy)}{2xx} + \frac{y\partial y}{x},$$

vnde fit $p = \frac{xx-yy}{2xx}$ et $q = \frac{y}{x}$. Cum igitur in genere inuenta sit haec aequatio:

$$\partial y(q + \delta p) = \partial x(\delta q - p),$$

erit pro hoc casu

$$\partial y[2xy + \delta(xx-yy)] = \partial x(2\delta xy - xx + yy), \text{ siue}$$
$$\delta(xx-yy)\partial y - 2\delta xy\partial x = (yy-xx)\partial x - 2xy\partial y.$$

§. 46. Quoniam autem haec aequatio est homogenea, statim ponatur $y = tx$, vt fit $\partial y = t\partial x + x\partial t$, et aequatio nostra hanc induet formam: $x\partial t = \frac{(1+tt)(\delta t - 1)\partial x}{2t + \delta(1-tt)}$, vnde fit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t(2t + \delta(1-tt))}{(1+tt)(\delta t - 1)}$$

quae fractio in duas partes resoluta praebet

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{2t\partial t}{1+tt} + \frac{\delta\partial t}{\delta t - 1}$$

cuius integrale manifesto est

$$lx = -l(1+tt) + l(\delta t - 1) + lc$$

siue $x = \frac{c(\delta t - 1)}{1+tt}$, et restituto valore $t = \frac{y}{x}$, erit $x = \frac{cx(\delta y - x)}{xx+yy}$, quae reducitur ad hanc formam; $xx + yy = c(\delta y - x)$, quae aequatio, vt iam supra est ostensum, complectitur infinitos circulos

culos ſuper axe obliquo diſpoſitos et per idem punctum fixum A tranſeuntes.

Exemplum 3.

§. 47. Euoluamus exemplum multo latius patens, vbi A aequetur functioni cuicunque homogeneae nullius dimenſionis ipſarum x et y. Poſito igitur $y = t x$ parameter aequabitur functioni ſolius quantitatis t, quae ſit T, ita vt ſit $a = T$. Ponamus autem $\partial T = T' \partial t$, ita vt ſit $\partial a = T' \partial t$. Vt autem hinc valores litterarum p et q definire queamus, loco ∂t ſcribamus valorem $\frac{x \partial y - y \partial x}{x x}$, eritque $p = -\frac{T' y}{x x} = -\frac{T' t}{x}$ et $q = \frac{T'}{x}$. Hi autem valores in aequatione $\partial y = (\frac{\delta q - p}{q + \delta p}) \partial x$ ſubſtituti praebent $\partial y = \frac{(\delta + t)}{1 - \delta t} \partial x = t \partial x + x \partial t$, vnde colligitur fore $\frac{\partial x}{x} = \frac{(1 - \delta t) \partial t}{\delta (1 + t t)}$.

§. 48. Hic omnino notatu dignum occurrit, quod ratio ipſius functionis T ex calculo ſit egreſſa. Conſideremus autem primo caſum quo $\delta = \infty$, eritque $\frac{\partial x}{x} = \frac{-t \partial t}{1 + t t}$, vnde fit $l x = l c - l \sqrt{(1 + t t)}$, ſiue $x = \frac{c}{\sqrt{(1 + t t)}} = \frac{c x}{\sqrt{(x x + y y)}}$, quae ergo aequatio dat $\sqrt{(x x + y y)} = c$, prorſus vt in exemplo primo, id quod mirum eſt. Cum enim hic ſit $T = a$, ideoque conſtans, pro qualibet curua ſecanda erit etiam t, hoc eſt $\frac{y}{x}$, conſtans, ita vt etiam hoc caſu omnes lineae ſecandae ſint rectae. Ita etiam pro angulis obliquis Traiectoriae erunt ſpirales logarithmicae.

Exemplum 4.

§. 49. Aequetur parameter variabilis a functioni cuicunque homogeneae ipſarum x et y, cuius dimenſionum numerus ſit n, quae igitur, poſito $y = t x$, accipiet hanc formam: $x^n . T$, ita vt T ſit certa functio ipſius t tantum, cuius

ius differentiale ergo habebit hanc formam: $\partial T = T' \partial t$. Hinc igitur cum ſit $a = x^n T$, erit

$$\partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x,$$

vbi cum ſit $t = \frac{y}{x}$, erit $\partial t = \frac{\partial y}{x} - \frac{y \partial x}{xx}$; vnde, ſi haec forma cum generali $\partial a = p \partial x + q \partial y$ comparetur, erit $q = x^{n-1} T'$ et $p = n x^{n-1} T - x^{n-2} y T' = n x^{n-1} T - x^{n-1} T' t$. Iam aequatio pro Traiectoriis hac forma expreſſa repraeſentetur:

$$p \partial x + q \partial y = \delta (q \partial x - p \partial y)$$

atque habebimus

$$p \partial x + q \partial y = \partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x, \text{ at}$$

$$q \partial x - p \partial y = x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T \partial y + x^{n-1} T' t \partial y$$
$$= x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T t \partial x + x^{n-1} T' t t \partial x$$
$$- n x^n T \partial t + x^n T' t \partial t, \text{ ſiue}$$

$$q \partial x - p \partial y = x^{n-1} \partial x (T'(1+tt) - n T t) - x^n \partial t (n T - T' t),$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio pro Traiectoria, per x^{n-1} diuiſa, erit

$$x T' \partial t + n T \partial x = \delta \partial x (T'(1+tt) - n T t) - \delta x \partial t (n T - T' t).$$

Quoniam haec aequatio duas tantum variabiles x et t inuoluit, eae ſponte a ſe inuicem ſeparantur: reperietur enim

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\delta \partial t (n T - T' t) + T' \partial t}{\delta (T'(1+tt) - n T t) - n T}.$$

Quodſi ergo haec formula per ſolos logarithmos integrari poterit, obtinebitur aequatio algebraica pro Traiectoriis. Generatim autem hoc caſu conſtructio Traiectoriarum nulla prorſus laborat difficultate.

§. 50. Pro Traiectoriis igitur rectangulis, vbi $\delta = \infty$, habebitur iſta aequatio: $\frac{\partial x}{x} = \frac{(n T - T' t) \partial t}{T'(1+tt) - n T t}$, quae, cum ſit $T' \partial t$

$= \partial T$

$= \partial T$ erit $\frac{\partial x}{x} = \frac{nT\partial t - t\partial T}{T'(1+tt) - nTt}$. At ſi angulus interſectionis debeat euaneſcere, vt ſit $\delta = 0$, fiet $\frac{\partial x}{x} = -\frac{T'\partial t}{nT} = -\frac{\partial T}{nT}$, cuius integrale eſt $l\,x = -\frac{1}{n}\,l\,T$, ſiue $x^n\,T = a$, quae eſt aequatio pro qualibet curüa ſecanda, ita vt hinc videatur nullas alias dari curuas, quae omnes ſecandas tangant, cum tamen praecedente caſu aliae quoque inuentae ſint huiusmodi curuae, contentae ſcilicet in aequatione $q = 0$ (vide §. 12). Verum quoniam hic terminos per δ affectos deleuimus, probe perpendendum eſt, id tantum fieri licere, ſi quantitates per δ multiplicatae non fiant infinitae; quamobrem, ſi eueniat, vt iſtae quantitates in infinitum excreſcere poſſint, tum ex iis eae curuae, quae omnes propoſitas tangant, deduci poſſunt.

§. 51. Hic autem imprimis notari meretur, quod iſte caſus, quo parameter a per functionem binarum coordinatarum x et y exprimitur, facilem nobis largiatur methodum, innumerabiles caſus aſſignandi, quibus tam curuae ſecandae quam Traiectoriae fiant lineae algebraicae, quam inueſtigationem in caſu praecedente ne tentare quidem licuerat. Hanc ergo quaeſtionem maximi momenti in ſequente problemate expediamus.

Problema.

Inueſtigare innumeros caſus, quibus tam curuae ſecandae quam Traiectoriae omnes euadant lineae algebraicae.

Solutio.

§. 52. Quia pro curuis ſecandis poſuimus $\partial a = p\,\partial x + q\,\partial y$, primo neceſſe eſt vt formula $p\,\partial x + q\,\partial y$ admittat integrale algebraicum, quod ponatur $= P$, ita vt ſit $a = P$ et $\partial P = p\,\partial x + q\,\partial y$. Deinde vero, quia pro Traiectoriis ſub interſectionis angulo quocunque α, cuius tangentem hic poſuimus $= \delta$, nacti ſumus hanc aequationem: $p\,\partial x + q\,\partial y$
$= \delta$

$= \delta (q \partial x - p \partial y)$, requiritur vt etiam haec aequatio reddatur integrabilis: cum autem eius pars prior $p \partial x + q \partial y$ iam per se sit integrabilis, id tantum requiritur, vt etiam alterius partis $q \partial x - p \partial y$ integrale algebraicum efficiatur. Quod si ergo hoc integrale designemus littera Q, vt sit $\partial Q = q \partial x - p \partial y$, erit pro Traiectoriis $\partial P = \delta \partial Q$, vnde aequatio integrata pro Traiectoriis colligitur $P = \delta Q + C$, vbi constans dabit parametrum variabilem pro omnibus Traiectoriis, quarum ergo aequatio hoc modo referri poterit: $b = P - \delta Q$, dum pro curuis secandis valet ista aequatio: $a = P$.

§. 53. Totum ergo negotium huc est reductum, vt sequentibus binis conditionibus satisfiat:

I. $\partial P = p \partial x + q \partial y$.

II. $\partial Q = q \partial x - p \partial y$.

Scilicet pro his litteris P et Q eiusmodi quantitates algebraicas siue functiones coordinatarum x et y scrutari oportet, vt hae duae conditiones adimpleantur. Hunc in finem multiplicemus priorem per f posteriorem vero per g, quae litterae denotent quantitates constantes quascunque, ac manifestum est, etiam hanc aequationem:

$$f \partial P + g \partial Q = p (f \partial x - g \partial y) + q (f \partial y + g \partial x),$$

effici debere integrabilem, et quoniam f et g ab arbitrio nostro pendent, eas ita definiamus, vt ambae formulae differentiales $f \partial x - g \partial y$ et $f \partial y + g \partial x$ constantem inter se teneant rationem. Statuamus igitur

$$f \partial x - g \partial y : g \partial x + f \partial y = f : g,$$

vnde nascitur ista determinatio $ff = - g g$. Hinc si statuamus $f = 1$, erit $g = \pm \sqrt{-1}$, quae determinatio, etsi imaginaria, tamen nobis egregiam solutionem suppeditabit.

§. 54. Quoniam igitur duplicem determinationem elicuimus, sit primo $f = 1$ et $g = +\sqrt{-1}$ et postrema aequalitas induet hanc formam:

$$\partial P + \partial Q\sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y\sqrt{-1}) + q(\partial y + \partial x\sqrt{-1}),$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial P + \partial Q\sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y\sqrt{-1}) - \frac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x - \partial y\sqrt{-1}),$$

hoc est

$$\partial P + \partial Q\sqrt{-1} = \left(p - \frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(\partial x - \partial y\sqrt{-1}),$$

quae formula cum debeat esse integrabilis, necesse est, vt $p - \frac{q}{\sqrt{-1}}$ sit functio ipsius $x - y\sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale erit functio formulae $x - y\sqrt{-1}$, quam more iam satis recepto ita designemus $\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$, sicque habebimus hanc aequalitatem $P + Q\sqrt{-1} = \Gamma : (x - y\sqrt{-1})$.

§. 55. Simili modo, si ponamus $f = 1$ et $g = -\sqrt{-1}$, habemus $\partial P - \partial Q\sqrt{-1})$

$$= p(\partial x + \partial y\sqrt{-1}) + q(\partial y - \partial x\sqrt{-1})$$
$$= p(\partial x + \partial y\sqrt{-1}) + \frac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x + \partial y\sqrt{-1})$$

ideoque

$$\partial P - \partial Q\sqrt{-1} = \left(p + \frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(\partial x + \partial y\sqrt{-1})$$

quae aequatio cum debeat esse integrabilis, necesse est vt $p + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ sit functio formulae $x + y\sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale functio erit eiusdem formulae, quae si designetur hoc modo: $\Delta : (x + y\sqrt{-1})$, nanciscemur integrando

$$P - Q\sqrt{-1} = \Delta : (x + y\sqrt{-1}).$$

Ex his autem duabus aequationibus inuicem additis colligitur fore

$$2P = \Gamma : (x - y\sqrt{-1}) + \Delta : (x + y\sqrt{-1}):$$

poste-

posterior vero a priore subtracta dabit

$$2Q\sqrt{-1} = \Gamma:(x-y\sqrt{-1}) - \Delta:(x+y\sqrt{-1}).$$

§. 56. Ex his igitur, per formulas quidem imaginarias, adepti sumus tam pro P quam pro Q idoneas functiones ipsarum x et y nostro problemati satisfacientes, quandoquidem erit

$$P = \tfrac{1}{2}\Gamma:(x-y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(x+y\sqrt{-1});$$

$$Q = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(x-y\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(x+y\sqrt{-1});$$

vel si $\sqrt{-1}$ negatiue accipiamus, habebimus

$$P = \tfrac{1}{2}\Gamma:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(x-y\sqrt{-1});$$

$$Q = \tfrac{-1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(x-y\sqrt{-1}).$$

His autem valoribus repertis pro curuis secandis habebitur ista aequatio: $a = P$; pro Traiectoriis autem haec: $b = P - \delta Q$.

§. 57. Solutionem igitur nostri problematis impetrauimus maxime generalem, namque pro curuis secandis obtinuimus hanc aequationem:

$$a = \tfrac{1}{2}\Gamma:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(x-y\sqrt{-1}),$$

pro Traiectoriis vero, sub angulo quocunque α, cuius tangens est δ, hanc:

$$b = \tfrac{1}{2}\Gamma:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(x-y\sqrt{-1})$$
$$+ \tfrac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(x+y\sqrt{-1}) - \tfrac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Delta:(x-y\sqrt{-1}),$$

vbi a denotat parametrum variabilem curuarum secandarum et b parametrum variabilem Traiectoriarum; manifestum autem est, vtramque aequationem fore algebraicam, si modo characteres Γ et Δ denotent functiones algebraicas.

§. 58.

§. 58. Vt autem has aequationes ab imaginariis liberemus, euidens eſt, id obtineri, ſi Δ eandem functionem ſuae quantitatis $x - y\sqrt{-1}$ deſignet, qualis functio Γ eſt ſuae quantitatis $x + y\sqrt{-1}$; tum enim, ſi ambae hae functiones addantur, omnes termini imaginarii ſe mutuo tollent, reales vero duplicabuntur, vnde pro P prodibit functio realis; ſin autem altera formula ab altera ſubtrahatur, termini reales deſtruentur et ſoli imaginarii duplicabuntur, qui ergo per $2\sqrt{-1}$ diuiſi euadent reales, ita vt hoc caſu etiam pro Q prodeat valor realis. Hanc ob rem loco Δ ſcribamus Γ, et ambae noſtrae aequationes erunt:

Pro curuis ſecandis:

$$a = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}).$$

Pro Traiectoriis.

$$b = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$$
$$\frac{+\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}).$$

§. 59. Quo nunc has formulas propius ad vſum noſtrum accommodemus, ponamus breuitatis gratia

$$P = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}) \text{ et}$$
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}),$$

vt pro curuis ſecandis habeatur haec aequatio: $a = P$ et pro Traiectoriis $b = P + \delta Q$; vnde ſtatim patet, hanc ſolutionem multo latius patere, quam primo intuitu eſt viſa. Si enim ſucceſſiue functioni Γ alias atque alias ſignificationes tribuamus, ex quibus oriantur bini valores P' et Q', tum vero etiam P'' et Q'', porro pariter P''' et Q''' etc.; tum, ſi pro ſecandis accipiatur iſta aequatio $a = P + P' + P'' + P''' +$ etc. pro Traiectoriis valebit iſta:

$$b = P + \delta Q, + P' + \delta Q', + P'' + \delta Q'', + P''' + \delta Q''', \text{ etc.}$$

Quin

Quin etiam ſingulos hos valores per quantitates conſtantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. multiplicare licebit, ita vt pro ſecandis habeatur

$$a = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,P' + \mathfrak{C}\,P'' + \mathfrak{D}\,P''' \text{ etc.}$$

pro Traiectoriis vero:

$$b = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,P' + \mathfrak{C}\,P'' + \text{ etc.}$$
$$+ \delta\,\mathfrak{A}\,Q + \delta\,\mathfrak{B}\,Q' + \delta\,\mathfrak{C}\,Q'' + \text{ etc.}$$

vnde patet numerum ſolutionum in infinitum facile augeri poſſe.

§. 60. Cum igitur quaelibet functio Γ certos valores pro P et Q ſuppeditet, caſus ſimpliciores euoluamus, quibus character Γ denotat ſimplices poteſtates, quos ſequenti modo exhibeamus:

I. Si $\Gamma = (\ )^1$ erit $P = x$ et $Q = y$.

II. Si $\Gamma = (\ )^2$ erit $P = xx - yy$ et $Q = 2xy$.

III. Si $\Gamma = (\ )^3$ erit $P = x^3 - 3xxy$ et $Q = 3xxy - y^3$.

IV. Si $\Gamma = (\ )^4$ erit $P = x^4 - 6xxyy + y^4$ et $Q = 4x^3y - 4xy^3$.

V. Si $\Gamma = (\ )^5$ erit $P = x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$
et $Q = 5x^4y - 10xxy^3 + y^5$.

VI. Si $\Gamma = (\ )^6$ erit $P = x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6$ et
$Q = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$.

VII. Si $\Gamma = (\ )^7$ erit $P = x^7 - 21x^5yy + 35x^3y^4 - 6xy^6$ et
$Q = x^6y - 35x^4y^3 + 21xxy^5 - y^7$.

VIII. Si $\Gamma = (\ )^8$ erit $P = x^8 - 28x^6yy + 70x^4y^4 - 28xxy^4 + y^8$
et $Q = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7$.

IX. Si $\Gamma = (\ )^9$ erit $P = x^9 - 36x^7yy + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8$
et $Q = 9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36xxy^7 + y^9$.

X. Si $\Gamma = (\ )^{10}$ erit $P = x^{10} - 45x^8yy + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 + 45xxy^8 - y^{10}$
et $Q = 10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9$.

§. 61. Quoniam hi valores pro P et Q secundum dimensiones coordinatarum x et y ordine ascendunt, ex quolibet linearum ordine tam lineas secandas quam Traiectorias exhibere licebit, et quidem eo plures, quo altior fuerit ordo, quoniam pro quolibet ordine valores inferiores implicari possunt. Quamobrem aequationes tam pro secandis quam pro Traiectoriis ad singulos ordines pertinentibus hic exhibeamus.

Pro ordine primo.

$a = \mathfrak{A}x$ et $b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y$.

Pro ordine secundo.

$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy)$ et

$b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y + \mathfrak{B}(xx - yy) + 2\delta\mathfrak{B}xy$.

Pro ordine tertio.

$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy)$ et

$b = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3yy)$

$+ \delta\mathfrak{A}y + 2\delta\mathfrak{B}xy + \delta\mathfrak{C}(3xxy - y^3)$.

Pro ordine quarto.

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4)$

$+$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(4x^3y + 4xy^3)$.

Pro ordine quinto.

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4)$

$+$ Praeced. $+ \delta\mathfrak{E}(5x^4y - 10xxy^3 + y^5)$.

Pro ordine sexto.

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6)$

$+$ Praeced. $+ \delta\mathfrak{F}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)$.

etc.

§. 62.

§. 62. Quin etiam pro functione Γ potestates negatiuas accipere licet, ad quod expediendum sit in genere

$$P = \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{-n} + \tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{-n}$$

quae ad exponentes positiuos reducatur, eritque

$$P = \frac{\tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{n} + \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{n}}{(xx + yy)^{n}}.$$

Simili modo, si ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{-n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{-n}$$

facta reductione ad exponentes positiuos fiet

$$Q = \frac{(x - y\sqrt{-1})^{n} - (x + y\sqrt{-1})^{n}}{2(xx + yy)^{n}\sqrt{-1}}.$$

Hinc igitur si exponenti n successiue tribuamus valores 1, 2, 3, 4 etc. obtinebimus sequentes valores

I. Si $n = 1$ erit $P = \frac{x}{xx + yy}$ et $Q = -\frac{y}{xx + yy}$,

II. Si $n = 2$ erit $P = \frac{xx - yy}{(xx + yy)^2}$ et $Q = -\frac{2xy}{(xx + yy)^2}$,

III. Si $n = 3$ erit $P = \frac{x^3 - 3xyy}{(xx + yy)^3}$ et

$$Q = \frac{-3xxy + y^3}{(xx + yy)^3},$$

IV. Si $n = 4$ erit $P = \frac{x^4 - 6xxyy + y^4}{(xx + yy)^4}$ et

$$Q = \frac{-4x^3y + 4xy^3}{(xx + yy)^4},$$

V. Si $n = 5$ erit $P = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{(xx + yy)^5}$ et

$$Q = \frac{-5x^4y + 10xxy^3 - y^5}{(xx + yy)^5},$$

VI. Si $n = 6$ erit $P = \frac{x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6}{(xx + yy)^6}$ et

$$Q = \frac{-6x^5y + 20x^3y^3 - 6xy^5}{(xx + yy)^6}.$$

Hinc igitur multitudo curuarum satisfacientium supra exhibita multo magis augeri poterit.

§. 63.

§. 63. Praeterea vero etiam exponentes fractos adhibere licebit, si modo fractiones in hac forma $\frac{n}{2}$ contineantur, quoniam, si aliae partes admitterentur, tum quantitates P et Q non amplius euolui possent, sed demum per resolutionem aequationum erui deberent. Sit igitur

$$P = \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} + \tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n}$$

et sumtis quadratis erit

$$PP = \tfrac{1}{4}(x+y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{4}(x-y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{2}(xx+yy)^{\frac{1}{2}n}, \text{ siue}$$

$$2PP = \tfrac{1}{2}(x+y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{2}(x-y\sqrt{-1})^n + (xx+yy)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi cum binae partes imaginariae iam supra realiter sint explicatae, hinc valor realis pro P eruitur. Simili modo si ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n},$$

erit sumtis quadratis

$$-4QQ = (x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n - 2(xx+yy)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi iterum partes imaginariae se mutuo tollunt.

§. 64. Ad hoc ostendendum sit $n = 1$ eritque

$$2PP = x + \sqrt{(xx+yy)} \text{ ideoque } P = \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}\right)};$$

deinde est $-4QQ = 2x - 2\sqrt{(xx+yy)}$, vnde fit

$$Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}}.$$

Eodem modo si sit $n = 3$, erit

$$2PP = x^3 - 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}} \text{ hincque}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{x^3 - 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)};$$

de-

deinde pro Q habebitur haec aequatio:

$$-2QQ = x^3 - 3xyy - (xx+yy)^{\frac{3}{2}} \text{ ideoque}$$

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x^3 + 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}.$$

Similique modo multitudo valorum idoneorum pro P et Q vlterius augeri poteſt. Quin etiam, ſi ſumere velimus $n = -k$, erit

$$2PP = \frac{1}{2(x+y\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(x-y\sqrt{-1})} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}, \text{ ſiue}$$

$$2PP = \frac{x}{xx+yy} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy},$$

vnde fit

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)}};$$

deinde vero erit

$$-4QQ = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-y\sqrt{-1}} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{2x}{xx+yy} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

vnde fit

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)}\right)}.$$

§. 65. Omnes autem has formulas multo concinnius per multiplicationem angulorum exhibere licebit. Si enim ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = z$, et Φ denotet angulum, cuius tangens $\frac{y}{x}$, erit $x = z \operatorname{cof.} \Phi$ et $y = z \operatorname{fin.} \Phi$; quibus valoribus ſubſtitutis, ſi functio Γ denotet poteſtatem exponentis n, erit

$$P = \tfrac{1}{2} z^n (\operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n + \tfrac{1}{2} z^n (\operatorname{cof.}\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n,$$

quae formula per notas reductiones praebet $P = z^n \operatorname{cof.} n\Phi$. Similique modo ex forma

$$Q = \frac{z^n}{2\sqrt{-1}} (\operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n$$
$$- \frac{z^n}{2\sqrt{-1}} (\operatorname{cof.}\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n$$

 pro-

prodit $Q = z^n$ fin. $n\Phi$, qui valores, fi loco z et Φ valores modo affignati fubftituantur, ftatim praebent formulas iam fupra euolutas. Nunc autem praeterea pro numero n ad arbitrium etiam fractiones quascunque accipere licebit, fiquidem multiplicatio ac diuifio angulorum tanquam conceffa fpectetur.

§. 66. Quantumuis autem magna fit multiplicitas harum folutionum, tamen ea infuper vsque ad duplum augeri poteft. Quod fi enim bini valores coniugati pro litteris P et Q fuerint $P = M$ et $Q = N$; tum etiam femper fumi poterit $P = -N$ et $Q = +M$, hoc eft, iftos valores inter fe permutare licet, dummodo alterutrius fignum inuertatur, quod ita oftendi poteft. Cum fit $M = P$; $N = Q$; $\partial M = p\,\partial x + q\,\partial y$ et $\partial N = q\,\partial x - p\,\partial y$, fcribatur nunc q' loco p et p' loco $-q$, fiet $\partial M = q'\,\partial x - p'\,\partial y$ et $\partial N = -p'\,\partial x - q'\,\partial y$; vnde patet, litteram M idoneum praebere valorem pro Q, litteram vero N pro $-$P.

§. 67. Hinc ergo fi pro P et Q fumantur quicunque valores coniugati, in fuperioribus tabulis dati, pro curuis fecandis ftatui poterit talis aequatio:

$$a = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,Q + \mathfrak{A}'\,P' + \mathfrak{B}'\,Q' + \text{ etc.}$$

tumque pro Traiectoriis habebitur ifta aequatio:

$$b = \mathfrak{A}\,(P + \delta\,Q) + \mathfrak{B}\,(Q - \delta\,P) + \mathfrak{A}'\,(P' + \delta\,Q') + \mathfrak{B}'\,(Q' - \delta\,P') \text{ etc.}$$

§. 68. Quoniam curuae fecandae et Traiectoriae inter fe permutari poffunt, id quod tamen ex formulis inuentis non apparet, operae pretium erit has formulas ita transformare, vt permutabilitas ftatim in oculos incurrat. Hunc in finem confideremus has formulas:

$a =$

$a = \mathfrak{A}\,\mathrm{P} + \mathfrak{B}\,\mathrm{Q}$ et $b = \mathfrak{A}(\mathrm{P} + \delta\,\mathrm{Q}) + \mathfrak{B}(\mathrm{Q} - \delta\,\mathrm{P})$, siue
$$b = \mathrm{P}(\mathfrak{A} - \delta\,\mathfrak{B}) + \mathrm{Q}(\delta\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}),$$
et ponamus $\mathfrak{A} = f\,\mathrm{cof.}\,\lambda$ et $\mathfrak{B} = f\,\mathrm{fin.}\,\lambda$, eritque ob $\delta = \mathrm{tang.}\,\alpha$,
$$\mathfrak{A} - \delta\,\mathfrak{B} = f\,\mathrm{cof.}\,\lambda - f\,\mathrm{tang.}\,\alpha\,\mathrm{fin.}\,\lambda = \frac{f}{\mathrm{cof.}\,\alpha}\,\mathrm{cof.}(\alpha + \lambda) \text{ et}$$
$$\delta\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = f\,\mathrm{tang.}\,\alpha\,\mathrm{cof.}\,\lambda + f\,\mathrm{fin.}\,\lambda = \frac{f}{\mathrm{cof.}\,\alpha}\,\mathrm{fin.}(\alpha + \lambda),$$
vnde quia loco b fcribi poteft $\frac{b}{\mathrm{cof.}\,\alpha}$, aequationes noftrae erunt
$$a = f\,\mathrm{P}\,\mathrm{cof.}\,\lambda + f\,\mathrm{Q}\,\mathrm{fin.}\,\lambda \text{ et}$$
$$b = f\,\mathrm{P}\,\mathrm{cof.}(\alpha + \lambda) + f\,\mathrm{Q}\,\mathrm{fin.}(\alpha + \lambda),$$
in quibus iam egregia harmonia perfpicitur, quae autem magis euadet manifefta, fi loco λ fcribamus $\theta - \frac{1}{2}\alpha$: tum enim pro duplici ordine noftrarum curuarum habebimus has aequationes:
$$a = f\,\mathrm{P}\,\mathrm{cof.}(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) + f\,\mathrm{Q}\,\mathrm{fin.}(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$
$$b = f\,\mathrm{P}\,\mathrm{cof.}(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) + f\,\mathrm{Q}\,\mathrm{fin.}(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha);$$
quarum altera in alteram transmutatur, fi loco α fcribatur $-\alpha$. Supra autem iam notauimus, interfectionem eandem manere, fiue angulus α capiatur negatiue fiue pofitiue, id quod etiam natura rei poftulat; fi enim refpectu curuarum fecandarum angulus interfectionis α ad dextram cadat, tum refpectu Traiectoriarum cadet ad finiftram.

§. 69. His obferuatis videamus quotuplici modo lineae fecundi ordinis, fiue fectiones conicae, ad folutionem noftri problematis accommodari queant. Hunc in finem ex tabula §. 60. fumamus primo $\mathrm{P} = x$ et $\mathrm{Q} = y$, tum vero etiam $\mathrm{P} = xx - yy$ et $\mathrm{Q} = 2xy$, ex quibus coniunctis pro binis ordinibus linearum habebimus primo
$$a = fx\,\mathrm{cof.}(\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha) + fy\,\mathrm{fin.}(\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha) + g(xx - yy)\,\mathrm{cof.}(\eta - \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ 2gxy\,\mathrm{fin.}(\eta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$
$$b = fx\,\mathrm{cof.}(\zeta + \tfrac{1}{2}\alpha) + fy\,\mathrm{fin.}(\zeta + \tfrac{1}{2}\alpha) + g(xx - yy)\,\mathrm{cof.}(\eta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ 2gxy\,\mathrm{fin.}(\eta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

 vbi

vbi tam quantitates f et g quam anguli ζ et η pro arbitrio accipi poſſunt. Euidens autem eſt, omnes has curuas ſemper eſſe Hyperbolas aequilateras ſuper eodem axe et ex eodem centro deſcriptas.

§. 70. Supra autem vidimus, ſi curuae ſecandae fuerint infiniti circuli ſe inuicem in eodem puncto tangentes, tum etiam Traiectorias eſſe eiusmodi circulos, qui ergo caſus non in formulis modo inuentis continetur. Hic autem caſus deducetur ex formulis §. 62. vbi erat $P = \frac{x}{xx+yy}$ et $Q = \frac{-y}{xx+yy}$, ex quibus pro duplici linearum ordine naſcuntur hae aequationes:

$$a = \frac{fx}{xx+yy}\,\text{cof.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy}\,\text{fin.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha);$$

$$b = \frac{fx}{xx+yy}\,\text{cof.}\,(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy}\,\text{fin.}\,(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha);$$

at ſi loco a et b ſcribamus $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et per $xx+yy$ multiplicemus, hae aequationes erunt:

$$xx+yy = afx\,\text{cof.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) - afy\,\text{fin.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$

$$xx+yy = bfx\,\text{cof.}\,(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - bfy\,\text{fin.}\,(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

quarum vtraque manifeſto eſt pro circulo.

§. 71. Praeterea vero ex formulis ſupra §. 64. datis:

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}} \text{ et } Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}};$$

etiam lineas ſecundi ordinis elicere licet; hinc enim pro priore ordine erit

$$a = f\,\text{cof.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}} + f\,\text{fin.}\,(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}}$$

vnde ſumtis quadratis erit

$$2aa = ffx\,\text{cof.}\,(2\theta - \alpha) + ff\sqrt{(xx+yy)} + ffy\,\text{fin.}\,(2\theta - \alpha),$$

quae porro reducta praebet

$$4a^4 - 4aaffx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha) - 4aaffy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)$$
$$+ f^4xx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)^2 + 2f^4xy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)$$
$$+ f^4yy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)^2 = f^4xx + f^4yy$$

quae expreſſio porro redigitur ad hanc formam:

$$4a^4 - 4aaffx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha) - 4aaffy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) -$$
$$f^4xx\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)^2 + f^4yy\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)^2 - 2f^4xy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)$$
$$= f^4(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) - y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2,$$

vbi, ſi loco a ſcribamus $\frac{f\sqrt{a}}{2}$, erit illa aequatio

$$aa - 2ax\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha) - 2ay\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) =$$
$$(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) - y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2.$$

Pro altero autem ordine loco a ſcribatur b, et α capiatur negatiue, eritque

$$bb - 2bx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha) - 2by\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) =$$
$$(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha) - y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2;$$

vbi, cum membrum ſupremum ſit quadratum, vtraeque hae lineae erunt parabolae, et quidem omnes ſuper eodem axe et circa eundem focum deſcriptae; vnde concludere licet, nullas dari ellipſes noſtro problemati ſatisfacientes.

§. 72. Vberrimum igitur fontem deteximus, non ſolum Problema Traiectoriarum in genere ſoluendi, ſed etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibendi, huncque fontem nobis aperuit caſus ſecundus, quo parametrum variabilem x per binas coordinatas x et y exprimere licuit, dum prior caſus, quo applicata y per a et x fuerat expreſſa, ad hunc ſcopum parum vtilis eſt deprehenſus; vnde iam ſatis intelligitur, ex poſtremo caſu, quo trium variabilium a, x et y nullam per binas reliquas exprimere licet, nihil plane ad vſum noſtrum deduci poſſe, vnde eius euolutione prorſus ſuperſedemus. Ceterum, quanquam hoc Problema iam plus quam quinquaginta abhinc annis ſumfummo ftudio a Geometris fuit pertractatum; tamen equidem mihi non videor actum egiffe, quandoquidem hic plura plane noua occurrunt, et multa, quae tum temporis adhuc obfcura videri poterant, hic dilucide expofita reperiuntur. Neque etiam vllum eft dubium, quin ex eodem argumento plurima egregia inuenta adhuc deriuari queant.

NOVAE

Fig. 1.

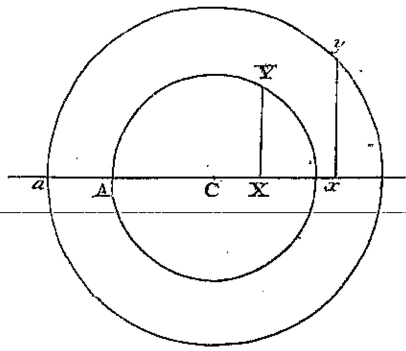

Fig. 2.

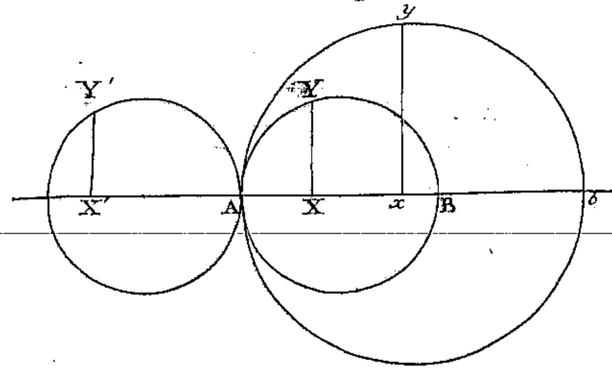

Fig. 3.

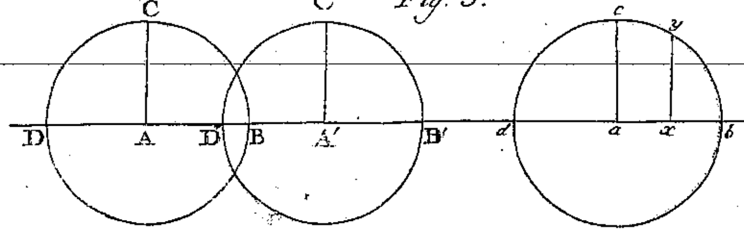

Fig. 4.

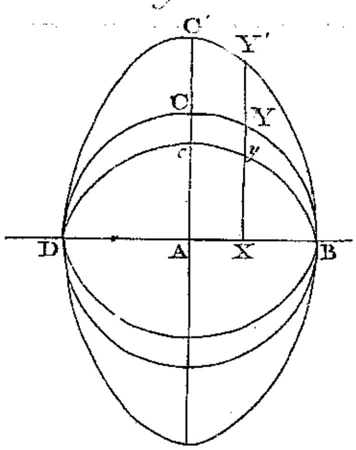

Fig. 5.

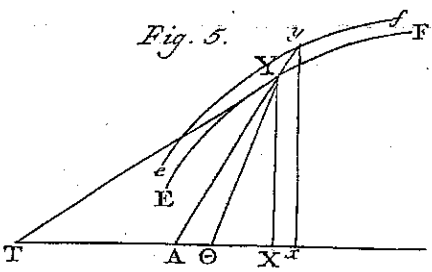

Fig. 6.

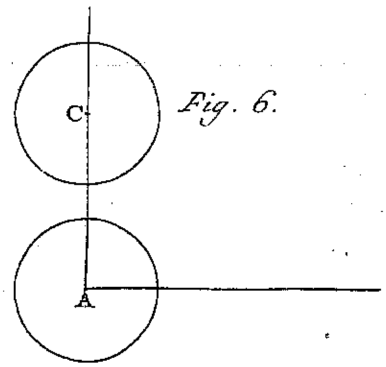

Fig. 7.