

ENODATIO DIFFICULTATIS
 SVPER FIGVRA TERRAE
 A VI CENTRIFVGA ORIVNDA.

Auctore
 L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 Nouembr. 1775.

§. 1.

Notum est, si Terrae figura ex sola vi grauitatis cum vi centrifuga coniuncta definiatur, rationem Diametri aequatoris ad axem Terrae non maiorem reperiri quam 578 : 577, cum tamen haec ratio post mensuras diuersorum graduum institutas multo maior deprehendatur 201 : 200 propemodum. *Hugenius* quidem et *Newtonus*, qui primi hanc rationem inuestigarunt, totam Terram tanquam ex materia vniformi compositam sunt contemplati, interim tamen quaecunque diuersa structura in partibus Terrae interioribus statuatur, eadem semper ratio diametri aequatoris ad axem resultat, quamdiu scilicet grauitatis directio ad centrum Terrae tendens assumitur.

§. 2. Quod si enim intra Terram grauitatio potestati cuiusque distantiae a centro, quae sit = z , proportionalis statuatur, vt ea sit = z^{n-1} , dum semi-axis Terrae per vnitatem exprimitur, ex Theoria aequilibrii fluidorum deducitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = C + \frac{x \cdot x}{2f}$, vbi si CA pro radio aequatoris et

Tab. IV.
 Fig. 3.

Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. II.

Q

CB

$CB = 1$ pro semi-axe Terrae accipiatur, littera z denotat distantiam cuiusque particulae Z a centro terrae C , at x intervallum CX demisso ex Z ad CA perpendicularo CX , littera vero f denotat numerum 289 ex motu vertiginis Terrae ortum; tum vero littera C est quantitas constans ex ipso statu Terrae determinanda. Primo igitur punctum indefinitum Z capiatur in ipso polo B , fietque $x = 0$; at prodire debet $z = 1$, vnde colligitur constans $C = \frac{1}{n}$. Nunc punctum Z transferatur in aequatorem A , vt fiat $x = z$, atque habebitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{z z}{2f}$. Hinc autem, quia nouimus valorem ipsius z quam minime vnitatem esse superaturum, ponamus $z = 1 + \omega$, eritque satis exacte $z^n = 1 + n\omega$, et ob $2f = 578$ loco $\frac{z z}{2f}$ scribi sufficiet $\frac{1 + 2\omega}{578}$, hincque aequatio nostra praebit $\frac{1 + n\omega}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1 + 2\omega}{578}$, vnde colligitur $\omega = \frac{1}{578}$, ita vt hinc fiat radius aequatoris $C = 1 + \frac{1}{578}$, ideoque diameter aequatoris ad axem Terrae vt 577 : 576, vnde patet hanc rationem ab exponente indefinito n prorsus non pendere.

§. 3. Ex his etiam manifestum est, quaecumque alia functio ipsius z pro grauitate accipiatur, perpetuo eandem conclusionem inde sequi debere. Quamobrem cum vera proportio inter axem Terrae et diametrum aequatoris tantopere ab ista inuenta ratione dissideat, necessario statui oportet, singulas Terrae particulas Z non solum ad centrum Terrae C vrgeri, sed insuper alias vires adesse debere, quibus particula in Z secundum directionem ZS ad CZ normalem sollicitetur; tales etiam vires hypothesis grauitatis vniuersalis qua singulae particulae ad omnes alias attrahi supponuntur reuera ostendit, ita vt in figura Terrae determinanda etiam istae vires laterales in computum duci debeant. Verum has ipsas vires ex theoria grauita-
vita-

vitiationis ne determinare quidem licet, nisi iam ante figura Terrae cum vniuersa eius structura fuerit cognita, quandoquidem harum virium determinatio non solum a densitate materiae per totam Terram dispositae sed etiam ab ipsa figura externa totius Terrae pendet; vnde satis intelligitur, hanc inuestigationem tan opere esse absconditam, vt eius perfecta explicatio nullo modo sperari possit. Quicquid enim a Geometris super hoc argumento in medium est allatum, meris hypothesibus iisque precario assumtis innititur, quae plerumque adeo omni probabilitate destituuntur.

§. 4. Quod si vero hanc inquisitionem generalissime suscipere velimus, binas illas vires, quibus singulae Terrae particulae Z secundum directiones ZC et ZS ob grauitatem vniuersalem sollicitantur, generaliter in computum introduci conueniet, vnde autem ob summam generalitatem vix quicquam concludere licebit; cum non constet, a quibusnam elementis istae vires pendere sint censendae; vis quidem prior ad centrum C vrgens probabili ratione functioni cuiusdam ipsius distantiae $CZ = z$ proportionalis statui posse videtur, quam designemus littera Z , altera vero vis lateralis secundum ZS quae fit $= S$, manifesto non solum a distantia $CZ = z$ pendere potest, sed insuper angulum ACZ ita inuoluere debet, vt ea euanescat tam casu quo iste angulus euanescit, quam vbi fit rectus; quoniam ex rei natura euidens est, istam vim lateralem tam in aequatore CA quam in axe CB euanescere debere, siquidem nullum est dubium quin tam sub polis quam in aequatore omnia corpora directe versus centrum C sollicitentur, quamobrem vim illam alteram S tanquam functionem binarum variabilium $CZ = z$ et $CX = x$ spectari oportebit.

§. 4. His igitur praenotatis figuram Terrae secundum principia aequilibrii fluidorum, quemadmodum ea in Tom. XIII.

novor. Commentar. exposui inuestigemus, ac primo quidem statum pressionis in puncto quocunque Z definiamus, quae altitudine p definiatur. Hunc in finem pro puncto Z vocemus binas coordinatas $CX = x$ et $XZ = CY = y$: hic enim tertia coordinata, quae ibi vocata erat $= z$, carere possumus, quandoquidem certum est, in omnibus sectionibus per axem factis terram eandem figuram habere debere. Nunc igitur ambae vires Z et S secundum binas directiones ZX et ZY resoluantur, ac prior quidem Z secundum ZC pro directionibus ZY et ZX, praebet vires $\frac{zx}{z}$ et $\frac{zy}{z}$. Altera vero vis ZS=S pro iisdem directionibus dat has vires: $-\frac{sy}{z}$ et $+\frac{sx}{z}$. Praeterea vero vis centrifuga a motu diurno Terrae orta praebet vim secundum YZ $= \frac{x}{f}$, vnde ex ternis viribus quas in genere designavi per litteras P, Q, R, primo erit $R = 0$, secundo $P = \frac{x}{f} - \frac{zx}{z} + \frac{sy}{z}$ et tertio $Q = -\frac{zy}{z} - \frac{sx}{z}$. Ex his autem viribus, sumta littera q pro densitate in puncto Z, principia aequilibrii hanc dederunt aequationem: $\frac{\partial p}{q} = P \partial x + Q \partial y$, quae ergo nostro casu induet hanc formam,

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x \partial x}{f} - \frac{zx \cdot \partial x}{z} + \frac{sy \cdot \partial x}{z} - \frac{zy \cdot \partial y}{z} - \frac{sx \cdot \partial y}{z},$$

sive

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x \partial x}{f} - \frac{z}{z} (x \partial x + y \partial y) + \frac{s}{z} (y \partial x - x \partial y).$$

Haec autem aequatio porro, ob $x \partial x + y \partial y = z \partial z$, contrahitur in hanc

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x \partial x}{f} - Z \partial z + \frac{s}{z} (y \partial x - x \partial y).$$

§. 6. Nunc autem ante omnia tenendum est, nisi haec formula integrationem admittat, statum aequilibrii nullo modo locum inuenire posse; quamobrem, cum tuto assumere queamus, in Terra dari statum aequilibrii, quia alioquin quaestio de

de figura ne suscipi quidem posset, necesse est vt formula haec inuenta integrationem admittat, quod quidem in primo termino $\frac{x \partial x}{f}$ sponte euenit; tum vero etiam integratio in secundo termino semper succedit, dummodo Z fuerit functio ipsius z vti assumimus; quamobrem superest vt postremum membrum $\frac{s}{z}(x \partial x - x \partial y)$ integrationem admittat, quod cum hoc modo representari possit $\frac{sxy}{z}(\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y})$, integratio locum habere nequit, nisi $\frac{sxy}{z}$ fit functio ipsius $\frac{x}{y}$, ideoque functio nullius dimensionis ipsarum x et y ; quare cum $z = \sqrt{(xx + yy)}$ vnā habeat dimensionem, necesse est vt S fit functio homogenea ipsarum x et y , cuius dimensionum numerus sit -1 , vnde iam satis clare cognoscimus indolem functionis S , siquidem pro certo assumamus, figuram terrae aequilibrio esse praeditam.

§. 7. Quo hoc clarius appareat, loco coordinatarum x et y in postremo membro introducamus angulum $ACZ = \Phi$, eritque $x = z \cos. \Phi$ et $y = z \sin. \Phi$, vnde fit $y \partial x - x \partial y = -z \partial \Phi$, ita vt iam nostra aequatio hanc induat formam:

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x \partial x}{f} - Z \partial z - S z \partial \Phi,$$

quae manifesto integrationem non admittit, nisi fuerit Sz functio anguli Φ . Sit igitur Φ ista functio, eritque vis lateralis $S = \frac{\Phi}{z}$; vbi patet, istam functionem Φ ita debere esse comparatam, vt euanescat tam posito $\Phi = 0$, quam $\Phi = 90^\circ$. Hinc igitur integrando adipiscemur

$$\int \frac{\partial p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \Phi.$$

Atque hic porro obseruandum est aequilibrium subsistere non posse, nisi etiam formula $\int \frac{\partial p}{q}$ fit integrabilis. Quoniam autem hic densitatem aquae q vbique constantem assumere licet, erit

vtique

$$\frac{p}{q} = C + \frac{x x}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \Phi.$$

Si enim ob diuersos caloris gradus densitas q esset variabilis, iam satis euictum est, aequilibrium locum habere non posse, nisi q sit functio ipsius p tantum, hoc est nisi per singula strata vbi eadem est pressio p etiam densitas sit eadem.

§. 8. His de aequilibrio per totam fluidi massam praemissis, nil aliud superest nisi vt aequatio inuenta ad supremam aquae superficiem accommodetur, vbi cum pressio p sit euanesce, posito $p = 0$ aequatio haec

$$0 = C + \frac{x x}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \Phi,$$

exprimet figuram quam suprema aquae superficies in statu aequilibrii accipiet. Ex iam allatis autem patet, parum referre, cuiusmodi functio ipsius x pro Z assumatur, quoniam discrimen inter diametrum aequatoris et axem Terrae nimis est paruum, quam vt ex natura functionis Z sensibilis diuersitas oriri possit.

§. 9. Designemus igitur vti incepimus vnitate semi-axem Terrae CB , sitque sub ipso polo in B vis grauitatis acceleratrix etiam vnitate expressa, ita vt posito $x = 1$, fieri quoque debeat $Z = 1$; quamobrem statuamus aliquanto generalius $Z = x^{n-1}$, vt fiat $\int Z \partial z = \frac{x^n}{n}$. Deinde quia functio

Φ euanescere debet casibus $\Phi = 0$ et $\Phi = 90^\circ$, pro Φ capiamus functionem simplicissimam huic conditioni satisfacientem, ponendo $\Phi = \alpha \sin. \Phi \cos. \Phi$, vnde fit $\int \Phi \partial \Phi = \frac{1}{2} \alpha \sin. \Phi^2$. His igitur valoribus substitutis aequatio pro superficie aquae erit $0 = C + \frac{x x}{2f} - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} \alpha \sin. \Phi^2$, quae ergo simul exprimit

mit

mit figuram Terrae, quam ob vim centrifugam recipere debet, vbi vt ante est $f = 289$.

§. 10. Ante omnia hic constantem C definire oportet, id quod commodissime fiet transferendo punctum Z in ipsum B, vbi fieri necesse est $z = 1$, $x = 0$ et $\Phi = 90^\circ$, vnde colligitur constans $C = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \alpha$. Sicque aequatio pro figura Terrae erit

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \alpha + \frac{x x}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2} \alpha \sin. \Phi^2, \text{ siue}$$

$$0 = \frac{1 - z^n}{n} + \frac{x x}{2f} + \frac{1}{2} \alpha \cos. \Phi^2,$$

seu quia $\cos. \Phi = \frac{x}{z}$, erit

$$z^n = 1 + \frac{n x x}{2f} + \frac{\alpha n x x}{2 z z},$$

vnde ob $z = \sqrt{(x x + y y)}$ facile deducitur aequatio inter binas coordinatas x et y .

§. 10. Hinc igitur quaeramus semi-diametrum aequatoris transferendo punctum Z in A, vbi ergo fiet $x = z = CA$, cuius propterea valor ex hac aequatione elici debet

$$z^n = 1 + \frac{n z z}{2f} + \frac{1}{2} \alpha n.$$

Quia vero nouimus, valorem ipsius z parum ab vnitatem discrepare, ponamus $z = 1 + \omega$, vt fiat $z^n = 1 + n \omega$ et $z z = 1 + 2 \omega$, quibus valoribus inductis fiet $\omega = \frac{1 + \alpha f}{2(n - 1)}$. Sin autem hunc valorem accuratius desideremus, loco z^n scribamus

$$1 + n \omega + \frac{1}{2} n (n - 1) \omega \omega$$

et $1 + 2 \omega + \omega \omega$ loco $z z$, et nostra aequatio fiet

$$\omega + \frac{1}{2} (n - 1) \omega \omega = \frac{1 + \alpha \omega + \omega \omega}{2f} + \frac{1}{2} \alpha,$$

vbi cum fit

$(2(f-1) + (f(n-1) - 1)\omega) \omega = 1 + af,$

inde fit $\omega = \frac{1+af}{2(f-1) + (f(n-1) - 1)\omega}$, vbi si loco f scribatur 289,
 fiet $\omega = \frac{1+289\alpha}{576 + (289n - 290)\omega}$, in quo denominatore loco ω sufficit
 scripsisse valorem vero proximum, qui est $\frac{1+289\alpha}{576}$, vnde obti-
 nebitur valor correctus $\frac{(1+289\alpha)576}{576^2 + (289n - 290)(1+289\alpha)}$.

§. 11. Quoniam igitur ex mensuris variorum graduum meridiani ratio diametri aequatoris ad axem Terrae conclusa est vt 201 ad 200, erit pro prima approximatione $\omega = \frac{1}{250}$, atque hinc valor coefficientis α definiri poterit, cum esse debeat $\frac{1}{200} = \frac{1+289\alpha}{576}$, vnde igitur fiet $\alpha = \frac{376}{200 \cdot 289} = \frac{47}{25 \cdot 289} = \frac{1}{134}$, proxime. Superfluum autem foret determinationem magis exactam desiderare, cum ratio assumpta 201 : 200 satis notabiliter a veritate recedere possit; quamobrem hinc plus concludere non licet, quam esse propemodum $\alpha = \frac{1}{135}$, vnde simul patet, exponentem n prorsus non in computum ingredi.

§. 12. Hinc igitur discimus, vt superficies oceani in statu quo Terra actu reperitur in aequilibrio subsistere possit, necessario requiri, vt in visceribus Terrae singulae particulae non solum ad centrum Terrae in directione ZC sollicitentur, sed praeterea accedat vis lateralis secundum directionem ad ZC normalem agens, cuius quantitas propemodum erit $\frac{\Phi}{z} = \frac{gn \cdot \Phi \cos \Phi}{150z}$, dum scilicet grauitas sub ipso Polo vnitatem exprimitur. Ita igitur vis lateralis maxima euadet vbi angulus $ACZ = \Phi$ fit semirectus, quippe cui respondebit vis lateralis $= \frac{1}{200z}$, quae ergo in superficie maris vbi fit proxime $z = 1$ euadit $\frac{1}{200}$, ideoque vi centrifugae fere aequalis.

§. 13. Nisi igitur istae vires laterales ita fuerint comparatae, maria in superficie Terrae in aequilibrio subsistere nequeunt, sed in perpetua agitatione versarentur, id quod imprimis intelligendum est, si totus Terrae globus ex materia fluida constaret; tum enim, etiamsi suprema superficies talem figuram accepisset, ut vires totales, quibus singula puncta ibi sollicitantur, essent ad ipsam superficiem normales, tamen quia in maioribus profunditatibus aqua non foret in quiete, mox ille situs perturbaretur, neque igitur tota Terra ad certam figuram se componere posset.

§. 14. Manifestum autem est, talem legem circa vires laterales in ipsa natura locum habere nullo modo posse, quandoquidem pro minimis a centro Terrae distantis hae vires laterales in infinitum excreverent, cuiusmodi effectus ab attractione mutua nequaquam oriri potest; unde pro certo affirmare possumus: Si tota Terra esset fluida, eius superficiem nunquam ad vllum statum aequilibrii peruenire posse.

§. 15. Cum autem maxime verisimile sit, maria nunquam tantam profunditatem occupare, ut discrimen nostrae formulae pro S inuentae a vera lege attractionis, quaecunque ea fuerit, vnquam sentiri queat, ideoque perinde, vtrum vires laterales nostram legem sequantur an vero quamcunque aliam, utique fieri poterit, ut vniuersus oceanus in aequilibrio subsistat, siquidem hic ab exiguis agitationibus, quae a plurimis causis oriri possunt, mentem abstrahamus, cuiusmodi sunt venti, imprimis autem varietas caloris. Cum enim sub aequatore calor perpetuo multo maior sit quam versus polos, quoniam ibi densitas aquae aliquanto minor euadit, aequilibrium etiam ob hanc causam locum habere nequit, sed per ea,

Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. II. R quae

