SPECIMEN SINGVLARE ANALYSEOS INFINITORVM INDETERMINATAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 18 *Mart.* 1776.

§. 1.

Iam ante complures annos nouum prorſus Calculi genus adumbraui, cui *Analyſeos Infinitorum indeterminatae* nomen inpoſueram, quoniam ad Analyſin Infinitorum ordinariam eodem modo refertur, quo Analyſis Diophantea ad Algebram communem. Indoles ſcilicet huius Calculi in eo conſiſtit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles inueſtigetur, vnde vna pluresue formulae integrales nanciſcantur valores ſiue algebraicos, ſiue datas quadraturas inuoluentes. Veluti ſi talis definiri debeat relatio inter binas variabiles x et y, vt iſta formula integralis: $\int \surd(\partial x^2 + \partial y^2)$, algebraicum valorem adipiſcatur, vel etiam datas quantitates tranſcendentes inuoluat. Hinc enim euidens eſt curuas algebraicas obtineri, quae ſint vel rectificabiles, vel quarum rectificatio a datis quadraturis pendeat; atque hinc problema illud *Hermannianum* celeberrimum methodo directa ſolutum dedi, quo requirebantur curuae algebraicae non rectificabiles, ſed quarum rectificatio datas quadraturas inuolueret, in quibus tamen nihilominus vel vnus, vel duo, vel adeo quotquis voluerit arcus aſſignari poſſent abſolute rectificabiles,

biles, poſtquam ipſe *Hermannus* et *Bernoullii* methodo maxime indirecta ad eius ſolutionem perueniſſent. Praeterea vero etiam tum temporis plura alia huius generis Problemata non parum curioſa ope methodi, quam ibi expoſui, felici ſucceſſu expediui.

§. 2. Methodus autem mea huiusmodi Problemata ſoluendi ita eſt comparata, vt eius beneficio ſequens Problema generale pertractari poſſit:

Si P, Q, R, S, etc. fuerint functiones quaecunque datae variabilis x, *ſemper eiusmodi relatio algebraica inter binas variabiles* x *et* y *aſſignari poteſt, vt omnes iſtae formulae integrales*: $\int P\partial y$, $\int Q\partial y$, $\int R\partial y$, *etc. quotcunque fuerint, algebraicos ſortiantur valores. Quin etiam effici poteſt vt vna earum, vel etiam duae, datas quadraturas inuoluant.*

Quamuis autem iſte caſus latiſſime patere videatur, tamen hac conditione maxime reſtringitur, quod in iſtis formulis altera variabilis y vnicam tantum obtineat dimenſionem. Si enim diverſae dimenſiones occurrerent, neutiquam adhuc perſpicere poſſum, quomodo reſolutio ſuſcipi deberet.

§. 3. Quoties igitur eiusmodi quaeſtiones proponuntur, quas ad huiusmodi formulas reuocare non licet, fateri cogor, me nullo adhuc modo perſpicere poſſe, quibusnam artificiis ſolutionem ſaltem tentari conueniat, id quod exemplo ſimpliciſſimo declaraſſe ſufficiet. Veluti ſi hae duae formulae: $\int \frac{y\partial x}{x}$ et $\int \frac{\partial x}{yx}$, ambae reddi debeant integrabiles, aliam ſolutionem exhiberi poſſe non video, niſi quae ſponte ſe offert, dum pro y poteſtas quaecunque ipſius x aſſumitur. Vix autem aſſeuerare auſim, nullam aliam ſolutionem locum habere poſſe. Ex quo intelligere licet, quantopere adhuc iſtud nouum cal-

cul

culi genus nobis sit absconditum, et omnia quae adhuc sunt praestita vix tanquam prima eius elementa spectari posse; vnde maxime esset optandum, vt sagacissima ingenia omnes vires intenderent ad istam Analyseos partem vberius excolendam.

§. 4. Ad hoc etiam Calculi genus referri debent bina illa Theoremata, quae non ita pridem in medium afferre sum ausus, quorum priore asseueraui, praeter circulum nullam aliam dari curuam algebraicam, cuius singuli arcus per arcus circulares exhiberi queant, siue nullam aliam inter x et y relationem algebraicam assignari posse, vt fieret

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - zz)}}.$$

Altero autem Theoremate affirmaui, nullam plane dari curvam algebraicam, cuius singuli arcus per simplices logarithmos exprimi queant, siue vt fieri possit $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{z}$. Pluribus quidem rationibus veritatem horum Theorematum corroborare sum annisus, ita vt nullum amplius dubium superesse posse videatur; interim tamen plenam eius demonstrationem vix ante exspectare licebit, quam nouum hoc Calculi genus vberius fuerit elaboratum.

§. 5. Imprimis autem ad istum Calculum pertinent quaestiones iam passim tractatae de lineis rectificabilibus in data superficie siue conuexa siue concaua ducendis, quarum solutio semper multo maiorem huius noui calculi perfectionem requirere videtur. Postquam enim multum desudassem, vt in superficie sphaerica lineam rectificabilem inuestigarem, nullam aliam reperire potui, praeter eam, quae Geometris iam pridem innotuit, quae scilicet describitur, dum circulus sphaerae maximus super minore prouoluitur, et cuius inuentio casui potius fortuito quam certae methodo accepta est referenda; vnde vix

 dubi-

dubitauerim aſſeuerare, praeter iſtam curuam in ſuperficie ſphaerica nullam aliam dari, quae eſſet rectificabilis. Quin etiam in ſuperficiebus cylindricis et conicis nullae aliae lineae rectificabiles mihi quidem exhibere poſſe videntur, praeter eas quae ipſae ſunt rectae.

§. 6. Nuper vero ſe mihi alia huius generis quaeſtio obtulit, cuius quidem ſolutio iam aliunde mihi erat cognita; interim tamen eam ita comparatam deprehendi, vt nullam plane viam directam, ad eius ſolutionem pertingendi, perſpicere potuerim, niſi ipſa ſolutio iam aliunde innotuiſſet. Hinc ſcilicet methodum maxime obliquam et indirectam deriuaui, quae demum per plures ambages ad ſcopum perduxerat; quamobrem plurimum lucis in hoc obſcuro calculi genere affulgere poſſe confido, ſi problema iſtud cum mea ſolutione, quantumuis obliqua, Geometris propoſuero.

Problema.

Inueſtigare relationem inter binas quantitates variabiles q *et* z, *vt primo haec formula:* $\int q\,dz$, *fiat algebraica, tum vero iſta:* $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ *arcum circularem exprimat.*

Solutio.

§. 7. Hic manifeſto ſumma difficultas in poſteriori formula deprehenditur, quam ad arcum circularem reuocari oportet; vbi quidem in tranſitu notari meretur, ſi iſta formula etiam algebraica reddi deberet, vti prior, ne vllam plane viam me perſpicere poſſe hoc negotium conficiendi. Ex quo conditio, quod iſta formula ad arcum circularem reduci debeat, multo difficilior videbatur; interim tamen haec ipſa conditio viam nobis apperiet ad ſcopum propoſitum perueniendi, id quod ex ſequentibus operationibus patebit.

§. 8.

§. 8. Primo igitur formulam $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcui circuli, cuius tangens sit $\frac{x}{y}$, aequalem statuamus, vbi data opera duas nouas variabiles x et y in calculum introducimus, quo deinceps ambae nostrae propositae q et z per eas commodius exprimi queant. Sumtis igitur differentialibus consequemur hanc aequationem: $\frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = \frac{y \partial x - x \partial y}{xx + yy}$, et nunc faciamus $zz = xx + yy$, id quod vtique sine vlla quaestionis restrictione fieri licet, propterea quod ambae litterae x et y prorsus a nostro arbitrio pendent. Posito autem $zz = xx + yy$, superest vt fiat $z \partial z \sqrt{(qq-1)} = y \partial x - x \partial y$, vnde cum sit $z \partial z = x \partial x + y \partial y$ deducimur ad hanc determinationem:

$$\sqrt{(qq-1)} = \frac{y \partial x - x \partial y}{x \partial x + y \partial y}.$$

§. 9. Vt iam hanc formulam a differentialibus liberemus, statuamus $\partial y = p \partial x$, vbi manifestum est formulam integralem $\int p \partial x$ absolute integrabilem seu algebraicam reddi debere. Hinc igitur habebimus $\sqrt{(qq-1)} = \frac{y - px}{x + py}$, vbi commode vsu venit vt sumtis quadratis fiat $qq = \frac{(1+pp)(xx+yy)}{(x+py)^2}$, quare ob $xx + yy = zz$, erit radice extracta $q = \frac{z \sqrt{(1+pp)}}{x + py}$, ita vt nunc ambae variabiles q et z propositae satis concinne per binas nouas variabiles x et y expressae prodierint, atque posteriori conditioni, qua formula $\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z}$ arcum circuli exprimere debet, iam perfecte sit satisfactum, idque tam generaliter, vt nulla limitatio sit introducta, quandoquidem in calculo adhuc duae variabiles x et y remanserunt, nullo modo a se inuicem pendentes.

§. 10. Quoniam igitur posteriori conditioni problematis est satisfactum, nihil aliud superest, nisi vt prior conditio, qua formula $\int q \partial z$ ad quantitatem algebraicam est reuocanda adimpleatur. Quod si vero loco q valorem inuentum substituamus

tuamus, reperiemus: $q\,\partial z = \frac{z\,\partial z\,\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$; quare cum fit

$$z\,\partial z = x\,\partial x + y\,\partial y = \partial x\,(x+py),$$

quasi praeter exspectationem deducimur ad istam formulam simplicissimam: $q\,\partial z = \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$, quandoquidem hinc denominator quasi casu fortuito est sublatus, ex quo tota quaestio huc est reducta, vt ista formula integralis $\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$ ad quantitatem algebraicam reuocetur, simul vero etiam, vti iam ante obseruauimus, haec formula $\int p\,\partial x$ euadat algebraica, quibus duabus conditionibus cum fuerit satisfactum, problema nostrum in omni extensione simul erit resolutum, tum enim primo habebimus $y = \int p\,\partial x$, hincque porro

$$z = \sqrt{(xx+yy)} \text{ et } q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}.$$

His autem valoribus ambae conditiones praescriptae ita adimplentur, vt sit $\int q\,\partial z = \int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$, quae per hypothesin est quantitas algebraica; pro altera autem conditione fit

$$\int \frac{\partial z\,\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.} \frac{x}{y},$$

ideoque arcui circuli aequalis, vti requirebatur.

§. 11. Quaeri igitur debet eiusmodi ralatio inter binas variabiles p et x, vt ambae istae formulae $\int p\,\partial x$ et $\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)}$ euadant algebraicae. Cum igitur fit

$$\int p\,\partial x = px - \int x\,\partial p \text{ et}$$
$$\int \partial x\,\sqrt{(1+pp)} = x\,\sqrt{(1+pp)} - \int \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quoniam hae duae nouae formulae in supra §. 2. memoratis continentur, per methodum olim expositam statuamus primo $\int x\,\partial p = t$, vt fit $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, atque altera formula abibit in hanc: $\int \frac{p\,\partial t}{\sqrt{(1+pp)}}$, quae si statuatur $= u$, hinc fiet $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial u}{\partial t}$; vbi iam pro u functionem quamcunque algebraicam ipsius t assumere

mere licet. Quare si ponamus $\partial u = v\,\partial t$, erit $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = v$, hincque $p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$.

§. 12. Tota ergo nostra solutio ita se habebit. Sumta functione quacunque variabilis t, quae vocetur $= u$, vnde fiat $\partial u = v\,\partial t$, ita vt etiam v sit functio ipsius t, hinc primo erit

$$p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quo valore inuento capiatur $x = \frac{\partial t}{\partial p}$, ita vt iam p et x per solam variabilem t sint expressae. Tum vero erit

$$\int p\,\partial x = \frac{v\,\partial t}{\partial p\sqrt{(1-vv)}} - t = y.$$

Deinde simili modo erit

$$\int \partial x\sqrt{(1+pp)} = \frac{\partial t}{\partial p\sqrt{(1-vv)}} - u = \int q\,\partial z.$$

Denique ex his ipsae quantitates in problemate quaesitae ita per nouam variabilem t exprimentur, vt fit $z = \sqrt{(xx+yy)}$, et hinc $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, atque ex his valoribus problemati ita satisfiet, vt sit

$$\int q\,\partial z = \frac{x}{\sqrt{(1-vv)}} - u \text{ et } \int \frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.}\,\frac{x}{y}.$$

§. 13. Quo haec clarius intelligantur, exemplum euoluamus, sumendo $u = a\,t^n$, vnde fit

$$v = n\,a\,t^{n-1} \text{ et } \sqrt{(1-vv)} = \sqrt{(1-nnaa\,t^{2n-2})},$$

vnde colligitur

$$p = \frac{n\,a\,t^{n-1}}{\sqrt{(1-nnaa\,t^{2n-2})}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-nnaa\,t^{2n-2})}}.$$

Cum igitur hinc sit

$$\partial p = \frac{n(n-1)\,a\,t^{n-2}\,\partial t}{(1-nnaa\,t^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}, \text{ erit}$$

$$x = \frac{(1 - nnaat^{2n-1})^{\frac{3}{2}}}{n(n-1)at^{n-2}} \text{ et}$$

$$y = \frac{t(2 - n - nnaat^{2n-2})}{n-1}.$$

Quoniam vero hae formulae iam nimis fiunt intricatae, ſumamus $a = 1$ et $n = 2$, vt ſit $u = tt$ et $v = 2t$, ex quibus porro colliguntur valores

$$p = \frac{2t}{\sqrt{(1-4tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-4tt)}},$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 - 4tt)^{\frac{3}{2}},\ y = -4t^3, \text{ hincque}$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 3tt + 12t^4}, \text{ ac denique}$$

$$q = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} - 3tt + 12t^4)}}{\frac{1}{2} - 4tt}.$$

Problemati autem iam ita ſatisfiet, vt ſit

$$\int q\,\partial z = \tfrac{1}{2} - 3tt \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial z\sqrt{(qq-1)}}{z} = \text{A tang.} - \frac{(1-4tt)^{\frac{3}{2}}}{8t^3}.$$

Alia Solutio.

per formulas rationales procedens.

§. 14. Vt formulas radicales euitemus, ponamus ſtatim $p = \frac{rr-1}{2r}$, vt fiat $\sqrt{(1+pp)} = \frac{rr+1}{2r}$. Nunc igitur has duas formulas:

$$\int p\,\partial x = \int \frac{(rr-1)\partial x}{2r} \text{ et}$$

$$\int \partial x\sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(rr+1)\partial x}{2r},$$

integrabiles reddi oportet, id quod praeſtabitur faciendo has duas

duas formulas: $\int r\,\partial x$ et $\int \frac{\partial x}{r}$ integrabiles; tum enim fiet

$$\int p\,\partial x = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \tfrac{1}{2}\int r\,\partial x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{r}.$$

Sicque quaeritur eiusmodi relatio inter r et x, vt tantum hae duae formulae euadant integrabiles.

§. 15. Hic igitur reductione fupra adhibita vtamur, et cum fit

$$\int r\,\partial x = r\,x - \int x\,\partial r \text{ et } \int \frac{\partial x}{r} = \frac{x}{r} + \int \frac{x\,\partial r}{rr},$$

ponamus $\int x\,\partial r = t$, vt fiat $x = \frac{\partial t}{\partial r}$; tum vero altera formula erit $\int \frac{x\,\partial r}{rr} = \int \frac{\partial t}{rr}$, cuius valorem fi vellemus ftatuere $= u$, quantitas r fignum radicale inuolueret, quod vt euitemus, vtamur eadem reductione: $\int \frac{\partial t}{rr} = \frac{t}{rr} + 2\int \frac{t\,\partial r}{r^3}$, ac iam ftatuamus $\int \frac{t\,\partial r}{r^3} = s$, fietque $t = \frac{r^3\,\partial s}{\partial r}$. Hic iam pro s functionem quamcunque ipfius r accipere licebit, vnde fiat $\partial s = s'\,\partial r$, ficque habebimus $t = r^3 s'$, hincque regrediendo

$$\int \frac{\partial t}{rr} = \int \frac{x\,\partial r}{rr} = r\,s' + 2\,s,$$

tum vero, pofito $\partial s' = s''\,\partial r$, erit $x = 3\,r\,r\,s' + r^3 s''$.

§. 16. His valoribus inuentis, cum fit

$$\int r\,\partial x = 2\,r^3 s' + r^4 s'' \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial x}{r} = 2\,s + 4\,r\,s' + r\,r\,s'',$$

ex his duobus valoribus colligimus fequentes:

$$\int p\,\partial x = -s + (r^3 - 2\,r)\,s' + \tfrac{1}{2}(r^4 - r\,r)\,s'',$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = s + (r^3 + 2\,r)\,s' + \tfrac{1}{2}(r^4 + r\,r)\,s'',$$

ex quibus porro deducuntur reliqui: $\int p\,\partial x$, $z = \sqrt{(xx+yy)}$, $q = \frac{z\sqrt{(1+pp)}}{x+py}$, hocque pacto tota folutio formulis rationalibus abfoluetur.

§. 17.

§. 17. Ceterum non dubito, quin contemplatio huius Problematis et Solutionis vtcunque obliquae, quae casu tantum successisse videatur, Geometris occasionem suppeditare queat, hoc nouum Calculi genus, cuius vix prima elementa nobis etiamnunc sunt cognita, vlterius rimandi atque ad maiorem perfectionis gradum euehendi, quandoquidem hinc maxima incrementa ad vniuersam Analysin redundare sunt existimanda.

DE