DE LINEIS RECTIFICABILIBVS IN SVPERFICIE SPHAEROIDICA QVACVNQVE GEOMETRICE DVCENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4. Iul. 1776.

§. 1.

Maxime ardua est quaestio, quando in superficie corporis cuiuscunque eiusmodi lineae geometrice ducendae requiruntur, quarum omnes arcus algebraice assignare liceat; cum adeo in cylindris, etsi pro genere simplicissimo huiusmodi corporum sint habendi, praeter lineas rectas axi parallelas nullae aliae curuae rectificabiles duci queant. Hinc equidem etiam sum arbitratus, in superficiebus conicis quoque nullas alias tales lineas, nisi quae ipsae sint rectae, duci posse, id quod quidem in genere affirmandum videtur; veruntamen deinceps deprehendi, in iis conis rectis, quorum latera ad basis diametrum rationem teneant rationalem, infinitas plane lineas rectificabiles geometrice duci posse, quemadmodum alia occasione sum ostensurus. In superficie autem sphaerica nullae adhuc aliae huiusmodi lineae rectificabiles inueniri potuerunt, praeter Epicycloïdes illas satis notas, quae prouolutione circuli maximi super minore nascuntur, quae quidem inueſtigatio per nullam certam methodum, ſed potius caſu quodam fortuito peracta videtur.

§. 2. Multo minus igitur ſperare licuit, vnquam fore, vt in ſuperficie corporis ſphaeroidici eiusmodi lineae rectificabiles detegerentur; quandoquidem arcus elliptici talem inueſtigationem penitus impedire videbantur. Incidi autem nuper in inſigne quodpiam Theorema, quod tanquam fundamentum talium inueſtigationum merito ſpectari poteſt, vnde non ſolum pro ſuperficiebus ſphaericis methodo ſatis plana et facili curvas illas rectificabiles elicere potui, ſed quod me etiam ad tales curuas in ſuperficie ſphaeroidica quacunque manuduxit. Hoc igitur Theorema ante omnia iſti inueſtigationi praemittere neceſſe eſt.

Theorema generale.

§. 3. *Si littera v denotet functionem quamcunque anguli Φ, atque elementum curuae ita exprimatur vt ſit $\partial s = v \partial \Phi + \partial . \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, tum coordinatae orthogonales huius curuae, quae ſint x et y, ſemper ita abſolute exprimi poſſunt, vt ſit*

$$x = \int \partial s \text{ ſin. } \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \text{ ſin. } \Phi - v \text{ coſ. } \Phi \quad et$$

$$y = \int \partial s \text{ coſ. } \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \text{ coſ. } \Phi + v \text{ ſin. } \Phi.$$

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 1. §. 4. Sit A Y linea illa curua ad axem A N relata, ad quam in quouis puncto Y ducatur normalis Y N, in qua producta notetur punctum O, centrum circuli curuam in Yy oſculantis. Tum vero vocetur angulus A N Y $= \Phi$, ac demiſſo ex Y ad axem perpendiculo Y X, ſint coordinatae A X $= x$ et X Y $= y$, ipſe vero arcus A Y vocetur $= s$. Iam quia eius ele-

elementum est $Yy = \partial s = v\,\partial\Phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}$, per hypothesin, ob angulum $AYX = \Phi$, erit vtique $\partial x = \partial s.$ sin. Φ et $\partial y = \partial s$ cos. Φ, ideoque

$$\partial x = v\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi + \text{fin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$\partial y = v\,\partial\Phi \text{ cof. } \Phi + \text{cof. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

quamobrem habebitur integrando

$$x = \int v\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi + \int \text{fin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$y = \int v\,\partial\Phi \text{ cof. } \Phi + \int \text{cof. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}.$$

§. 5. Ad istas formulas integrales euoluendas per reductiones notissimas elicimus

$$\int v\,\partial\Phi \text{ fin. } \Phi = -v \text{ cof. } \Phi + \int \partial v \text{ cof. } \Phi \text{ et}$$
$$\int \text{fin. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ fin. } \Phi - \int \partial v \text{ cof. } \Phi,$$

quibus coniunctis manifesto prodit $x = -v \text{ cof. } \Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ fin. } \Phi$. Simili modo pro applicata y reperietur

$$\int v\,\partial\Phi \text{ cof. } \Phi = v \text{ fin. } \Phi - \int \partial v \text{ fin. } \Phi \text{ et}$$
$$\int \text{cof. } \Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cof. } \Phi + \int \partial v \text{ fin. } \Phi;$$

vnde conficitur $y = v \text{ fin. } \Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} \text{ cof. } \Phi$.

Corollarium 1.

§. 6. Quodsi ergo v fuerit functio algebraica, non quidem ipsius anguli Φ, sed potius eius sinus vel tangentis, ita vt posita tang. $\Phi = t$ quantitas v sit functio quaecunque algebraica ipsius t; euidens est, ipsam curuam futuram esse algebraicam, propterea quod ambae eius coordinatae x et y per functiones algebraicas ipsius t exprimuntur. Longitudo autem huius curuae, cum sit $s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$, adeo erit rectificabilis, quoties formulam $\int v\,\partial\Phi$, siue $\int \frac{v\,\partial t}{1+tt}$, integrare licet. Contra vero haec rectificatio ab eiusmodi quadratura pendebit, quam formula integralis $\int v\,\partial\Phi$ inuoluet; vnde ope huius theorematis facile erit, non solum innumerabiles curuas algebraicas assignare, quae sint rectificabiles, sed etiam tales, quarum rectificatio datam quadraturam inuoluat.

Corollarium 2.

§. 7. Quoniam ducta normali proxima $y\,O$, priori in centro circuli osculantis O occurrente, ob angulum $A\,n\,y = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus $Y\,O\,y = \partial\Phi$, ideoque ipse radius osculi $Y\,O = \frac{\partial s}{\partial\Phi}$. Hinc ergo sumto elemento $\partial\Phi$, pro differentialibus secundis, constante, erit ipse radius osculi $Y\,O = v + \frac{\partial\partial v}{\partial\Phi^2}$.

Corollarium 3.

§. 8. Quoniam inuenimus applicatam

$$X\,Y = y = v \sin.\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cos.\Phi,$$

ob angulum $X\,N\,Y = \Phi$ erit ipsa normalis

$$Y\,N = \frac{v}{\sin.\Phi} = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cot.\Phi$$

et subnormalis

$$X\,N = v\cos.\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cdot\frac{\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi},$$

vnde erit interuallum $A\,N = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cdot\frac{1}{\sin.\Phi}$. Quare si ex A in normalem Y N ducatur perpendiculum A P, habebimus $A\,P = A\,N \sin.\Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi}$ et interuallum $N\,P = A\,N\cos.\Phi = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cot.\Phi$. Hinc cum esset $Y\,N = v + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\cot.\Phi$, colligitur fore $P\,Y = v$; sicque functio nostra v exprimit perpendiculum ex puncto A in tangentem Y T demissum.

Corollarium 4.

§. 9. Hinc igitur discimus, quoties hoc perpendiculum A T fuerit functio algebraica anguli $A\,N\,Y = \Phi$, seu potius

tius eius tangentis $= t$, toties ipsam curuam fore algebraicam; quoniam inde ambas coordinatas $AP = x$ et $PN = y$ algebraice exprimere licet. Vbi meminisse iuuabit angulum Φ tanquam mensuram amplitudinis curuae spectari posse.

Corollarium 5.

§. 10. Si praeterea ducamus chordam AY, quia in triangulo rectangulo APY habemus cathetos $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$ et $PY = v$, longitudo ipsius chordae ita concinne exprimitur, vt fit $AY = \sqrt{(vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2})}$, vnde simul deducitur tang. $AYP = \frac{\partial v}{v \partial \Phi}$, quae ergo simul erit cotangens anguli AYT, quem chorda cum tangente constituit, ita vt huius anguli tangens sit $= \frac{v \partial \Phi}{\partial v}$, dum ipsa tangens YT aequatur rectae $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion 1.

§. 11. Ceterum si perpendiculum, ex quopiam puncto fixo A in tangentem curuae demissum, fuerit functio algebraica amplitudinis curuae $= \Phi$, seu potius eius tangentis $= t$, facile perspicitur, si loco A aliud quoduis punctum a accipiatur, perpendiculum inde in tangentem demissum at pariter fore functionem algebraicam ipsius Φ, seu t. Vnde in genere patet, quoties perpendicula, ex puncto quocunque fixo in tangentes curuae demissa, fuerint functiones algebraicae ipsius Φ vel t, toties curuam semper fore algebraicam, quod est theorema sine dubio maximi momenti in theoria linearum curuarum.

Scholion 2.

§. 12. Quae hactenus analytice sunt demonstrata, per solas considerationes geometricas sequenti modo ostendi possunt. Sumatur punctum quodcunque fixum A, vnde recta AN positione Tab. I. Fig. 2.

tione data cum radio osculi curuae Y O constituat angulum $ANY = \phi$; tum vero ex A in ipsum radium osculi ducatur perpendiculum A P, positoque interuallo $YP = v$, si ex A simili modo in radium osculi proximum y O ducatur perpendiculum Ap, erit vtique interuallum $yp = v + \partial v = Yq$, propterea quod ambo radii osculi ad curuam sunt normales; quare cum, ob angulum $Any = \phi + \partial \phi$, sit angulus ad $O = \partial \phi$, erit etiam angulus $PAq = \partial \phi$, vnde cum $Pq = \partial v$, euidens est fore perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial \phi}$, ex quo erit $Ap = \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial \partial v}{\partial \phi}$, ideoque elementum $pq = \frac{\partial \partial v}{\partial \phi}$, vnde ob angulum ad $O = \partial \phi$ statim deducitur interuallum Oq siue $OP = \frac{\partial \partial v}{\partial \phi^2}$, sicque perspicuum est ipsum radium osculi fore $v + \frac{\partial \partial v}{\partial \phi^2}$. Porro vero quia inuenimus perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial \phi}$, ob angulum $ANP = \phi$ erit ipsum interuallum $AN = \frac{\partial v}{\partial \phi} \cdot \frac{1}{\sin. \phi}$ et interuallum $PN = \frac{\partial v}{\partial \phi} \cot. \phi$, ita vt iam futura sit tota normalis

$$YN = YP + PN = v + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cot. \phi.$$

Demittamus iam ex Y ad A N perpendiculum Y X, vt obtineamus coordinatas $AX = x$ et $XY = y$, et quoniam in triangulo rectangulo X Y N habemus hypothenusam $YN = v + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cot. \phi$, cum angulo $XNY = \phi$, inde statim cognoscimus ipsam applicatam

$$XY = y = v \sin. \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cos. \phi$$

et subnormalem

$$XN = v \cos. \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cdot \frac{\cos. \phi^2}{\sin. \phi},$$

qua a toto interuallo A N ablata relinquitur abscissa

$$AX = x = - v \cos. \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \sin. \phi,$$

quas ergo coordinatas, sine vlla integratione, algebraice expressas elicuimus, prorsus vt ante. His igitur praemissis institutum nostrum aggrediamur.

Pro-

Problema.

§. 13. *Si quadrans ellipticus ACB circa axem CB circumuoluatur, sicque sphaeroides ellipticum formetur, cuius aequator erit circulus radio CA descriptus, semiaxis vero CB, in superficie huius sphaeroidis eiusmodi lineam curuam geometrice describere, quae simul sit rectificabilis.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 14. Vocemus radium aequatoris $CA = 1$, at semiaxem sphaeroidis $CB = c$, ac referat in Figura 4. circulus centro C radio $CA = 1$ descriptus aequatorem sphaeroidis propositi, ad quem ex quouis superficiei puncto Z demittatur perpendiculum ZY, atque ex Y ad radium aequatoris CA perpendiculum YX, vt locum puncti Z per ternas coordinatas orthogonales determinemus, quae sint $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, quibus constitutis, si nostrum sphaeroides esset sphaera radio $= 1$ descripta, ob interuallum $CZ = 1$ haberetur haec aequatio: $xx + yy + zz = 1$, ideoque $z = \sqrt{(1 - xx - yy)}$. Nunc igitur, quia semiaxis sphaeroidis est $= c$, ista altitudo YZ in ratione $= 1 : c$ augeri debet, ita vt pro hac superficie sphaeroidica habeamus istam aequationem: $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, quae est aequatio naturam huius sphaeroidis exprimens. Fig. 4.

§. 15. Constat autem in genere, quando in superficie corporis cuiuscunque ducatur linea curua quaecunque, eius elementum ∂s semper ita exprimi, vt sit $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$. Quamobrem nostra quaestio huc reducitur, vt eiusmodi relatio inter binas coordinatas x et y assignetur, vnde formula illa differentialis pro ∂s data euadat integrabilis; tum autem aequatio inter x et y huic conditioni satisfaciens simul exhibebit proiectionem curuae illius rectificabilis in plano aequatoris factam, ita vt vicissim ex cognita hac proiectione ipsa curua quaesita in superficie sphaeroidis facile exploretur.

§. 16. Quisquis autem hunc laborem in genere suscipere voluerit, mox deprehendet, nullum successum exspectari posse, nisi inuestigationem ad casum particularem adstrinxerit, quo ratio constans inter longitudinem curuae quaesitae s et altitudinem z statuatur. Hanc ob rem statim ponamus esse $s = nz$, ita vt sumtis differentialibus esse debeat

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = nn\,\partial z^2, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial z \sqrt{(nn - 1)};$$

vnde perspicitur, numerum n necessario vnitate maiorem esse debere.

§. 17. Cum igitur formula $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ exprimat elementum proiectionis in plano aequatoris factae, patet etiam hanc proiectionem esse debere curuam rectificabilem. Si enim eius longitudo ponatur $= \Sigma$, ob $\partial \Sigma = \partial z \sqrt{(nn - 1)}$ sequitur fore $\Sigma = z\sqrt{(nn - 1)} + C$; quamobrem si amplitudo istius arcus Σ ponatur $= \Phi$, per theorema praecedens, si v denotet functionem quamcunque algebraicam ipsius Φ, erit $\Sigma = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, vbi manifestum est formulam $\int v\,\partial\Phi$ quoque integrabilem esse debere; tum vero necesse est vt sit

$$\int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} = z\sqrt{(nn - 1)}.$$

§. 18. Cum autem sit $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, supra vidimus ob

$$x = -v \operatorname{cos}.\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\operatorname{sin}.\Phi \text{ et}$$

$$y = v \operatorname{sin}.\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\operatorname{cos}.\Phi, \text{ fore}$$

$$xx + yy = vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2};$$

sicque

ſicque totum negotium reductum eſt ad hanc aequationem:

$$\int v\,\partial\Phi + \tfrac{\partial v}{\partial\Phi} = c\sqrt{(nn-1)\left(1 - vv - \tfrac{\partial v^2}{\partial\Phi^2}\right)},$$

ad quam reſoluendam ponamus $v = f\,\mathrm{cof.}\,(\lambda\Phi + \alpha)$, eritque

$$\int v\,\partial\Phi = \tfrac{f}{\lambda}\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi + \alpha) \text{ et}$$

$$\tfrac{\partial v}{\partial\Phi} = -\lambda f\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi + \alpha),$$

vnde habebimus

$$\int v\,\partial\Phi + \tfrac{\partial v}{\partial\Phi} = \tfrac{f(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi + \alpha),$$

qui ergo eſt valor membri ſiniſtri noſtrae aequationis.

§. 19. Pro membro autem dextro primo erit

$$vv = ff\,\mathrm{cof.}\,(\lambda\Phi + \alpha)^2 \text{ et}$$

$$\tfrac{\partial v^2}{\partial\Phi^2} = \lambda^2 f^2\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi + \alpha)^2;$$

quamobrem habebimus

$$1 - vv = 1 - ff\,\mathrm{cof.}\,(\lambda\Phi + \alpha)^2,$$

qui valor vt cum poſtrema parte conſpiret, ſumatur $f = 1$, vt fiat $1 - vv = \mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi + \alpha)^2$, hocque modo noſtra aequatio erit

$$\tfrac{(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi+\alpha) = c\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi+\alpha)\sqrt{(nn-1)(1-\lambda\lambda)},$$

quae per $\sqrt{(1-\lambda\lambda)}\,\mathrm{fin.}\,(\lambda\Phi+\alpha)$ diuiſa praebet

$$\tfrac{\sqrt{(1-\lambda\lambda)}}{\lambda} = c\sqrt{(nn-1)}$$

vnde numerus hactenus indefinitus λ ita determinatur, vt ſit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1+(nn-1)cc}}$. Vel etiam numerum λ arbitrio noſtro relinquere poſſumus, indeque numerum illum n definire, qui ergo erit $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, vbi tantum notari oportet, numerum λ ita accipi debere, vt numerus $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc$ prodeat poſitiuus, id quod eueniet quando fuerit $\lambda < \frac{1}{\sqrt{(1-cc)}}$; tum vero etiam, vt iam notauimus, numerus n vnitate maior eſſe debet, ad quod requiritur vt ſit $\lambda < 1$, atque adeo hanc conditionem obſeruaſſe ſufficiet: dummodo enim $\lambda < 1$, etiam ſemper erit $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc > 0$, ſimulque $n > 1$.

§. 20. Quaecunque igitur fractio vnitate minor pro λ accipiatur, indeque capiatur $n = \frac{\sqrt{(1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, habebimus

$$v = \text{cof.}\,(\lambda\phi + \alpha),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = -\lambda\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha) \text{ et}$$
$$\int v\,\partial\phi = \tfrac{1}{\lambda}\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha),$$

vnde coordinatae proiectionis curuae quaeſitae in planum aequatoris factae ita determinabuntur, vt ſit

$$x = -\text{cof.}\,\phi\,\text{cof.}\,(\lambda\phi + \alpha) - \lambda\,\text{fin.}\,\phi\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha) \text{ et}$$
$$y = \text{fin.}\,\phi\,\text{cof.}\,(\lambda\phi + \alpha) - \lambda\,\text{cof.}\,\phi\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha),$$

ex quibus porro colligitur

$$xx + yy = \text{cof.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2 + \lambda\lambda\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2, \text{ fiue}$$
$$xx + yy = 1 - (1 - \lambda\lambda)\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2.$$

At vero per notas reductiones ambae coordinatae ita repraeſentari poterunt:

$$x = -\tfrac{1+\lambda}{2}\,\text{cof.}\,[(\lambda - 1)\phi + \alpha] - \tfrac{1-\lambda}{2}\,\text{cof.}\,[(\lambda + 1)\phi + \alpha]$$
$$y = \tfrac{1-\lambda}{2}\,\text{fin.}\,[(\lambda + 1)\phi + \alpha] - \tfrac{1+\lambda}{2}\,\text{fin.}\,[(\lambda - 1)\phi + \alpha],$$

tum autem longitudo ipſius curuae in ſuperficie ſphaeroidica deſcriptae erit

$$s = \int v\,\partial\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} = \frac{1 - \lambda\lambda}{\lambda}\,\text{fin.}\,(\lambda\phi + \alpha).$$

§. 21. Has formulas multo ſimpliciores reddere licet, ſumendo angulum conſtantem $\alpha = 0$. Quoniam enim per variationem huius anguli α tantum poſitio coordinatarum x et y immutatur, dum ipſa curua eadem manet, ſine vlla ſolutionis reſtrictione tuto ſtatuere poterimus $\alpha = 0$; tum autem coordinatae

natae x et y ita concinnius exprimentur:

$$x = -\frac{1+\lambda}{2}\,\text{cos.}\,(1-\lambda)\,\Phi - \frac{(1-\lambda)}{2}\,\text{cos.}\,(1+\lambda)\,\Phi,$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2}\,\text{sin.}\,(1+\lambda)\,\Phi + \frac{(1+\lambda)}{2}\,\text{sin.}\,(1-\lambda)\,\Phi,$$

tum autem erit longitudo curuae in superficie descriptae

$$s = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda}\,\text{sin.}\,\lambda\,\Phi,$$

quae ergo euanescit vbi $\Phi = 0$, et eo vsque extenditur, quoad angulus $\lambda\Phi$ euadat rectus, a quo termino curua iterum recedere incipit.

§. 23. In hac euolutione quantitas c, qua species sphaeroidis exprimitur, aliter in computum non est ingressa, nisi in numero n, quem inuenimus $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, et quo ratio continetur, quam longitudo curuae quaesitae ad altitudinem z tenet; vnde haec proprietas notatu maxime digna consequitur: quod pro omnibus sphaeroidibus ellipticis, siue sint oblonga siue compressa, lineae rectificabiles, in eorum superficiebus ducendae, si in planum aequatoris proiiciantur, ad easdem proiectiones perducant; ita vt solutio huius problematis plane congruat cum solutione eius, quo lineae rectificabiles in superficie sphaerica quaeruntur. Atque adeo praesens solutio illi, qua hactenus istud problema pro sphaera est solutum, ideo longissime anteferenda videtur, quod per certam methodum ad scopum optatum perduxit, cum solutio vulgaris casui fortuito accepta sit referenda.

Applicatio
praecedentis Solutionis ad corpora conoidica hyperbolica.

§. 23. Quoniam quantitas c, qua semiaxem ellipsis generantis CB designauimus, ex calculo fere penitus est egressa, manifestum est nostram solutionem etiam locum habere

 posse

poſſe, licet iſta quantitas c fiat adeo imaginaria, id quod euenit, quando ellipſis initio conſiderata transmigrat in hyperbolam, cuius centrum erit etiamnunc in c et ſemiaxis transuerſus $CA = 1$, vt ante. Ad hunc igitur caſum euoluendum tantum opus eſt vt loco c quantitatem imaginariam ſtatuamus, ponendo $cc = -aa$, ſiue $c = a\sqrt{-1}$.

§. 24. Omnia igitur, quae ſupra euoluimus, prorſus immutata manebunt, ſola illa aequatione, qua numerum n definivimus, excepta, quae poſito $c = a\sqrt{-1}$ recipiet hanc formam:

$$n = \frac{\sqrt{(1 - \lambda\lambda - \lambda\lambda aa)}}{\lambda\sqrt{-a}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda\lambda(1+aa)-1}{aa}};$$

vbi patet eſſe debere $\lambda\lambda(aa+1) > 1$, ſiue $\lambda > \frac{1}{\sqrt{(aa+1)}}$, tum vero, quia etiam eſſe debet $n > 1$, tam haec quam praecedens conditio adimplebitur, dummodo capiatur $\lambda > 1$. Quamobrem tota ſolutio huius caſus a praecedente in hoc tantum diſcrepabit, quod hic numerum λ vnitate maiorem accipi oportet, cum ante vnitate minor fuiſſet; quamobrem coordinatae proiectionis nunc ita exprimentur:

$$x = -\frac{\lambda+1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi + \frac{\lambda-1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi,$$

$$y = -\frac{\lambda-1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi - \frac{\lambda+1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi,$$

ex hisque erit

$$xx + yy = 1 + (\lambda\lambda - 1)\,\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi^2,$$

ipſa autem curuae in ſuperficie deſcriptae longitudo erit

$$s = -\frac{\lambda\lambda-1}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\lambda\,\Phi,$$

vbi ſignum negationis nihil in figura curuae turbat, dum tantum in partem vergit contrariam ei quam in calculo ſpectauimus. Hoc igitur modo ſolutio noſtra multo latius eſt extenſa quam primo initio ſperare licuiſſet.

DE