

DE
VIRIBVS CENTRIPETIS,
AD CURVAS NON IN EODEM PLANO SITAS
DESCRIBENDAS, REQUISITIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

Notissimum est problema & a summo *Newtono* egregie solutum, quo vis centripeta ad datum punctum fixum tendens quaeritur, a qua si corpus sollicitetur, per datam lineam curuam promoueatur. Euidens autem est in enunciatione huius problematis tacite assumi, tam totam curuam a corpore describendam in eodem plano sitam esse debere, quam ipsum centrum virium in eodem plano esse statuendum, quando quidem certum est, omne corpus ab vnica vi centripeta sollicitatum semper in eodem plano moveri, quod per ipsum centrum virium transeat. Hinc ergo patet, si curva a corpore describenda non fuerit in eodem plano sita, tum omnino fieri non posse vt talis motus ab vnica vi centripeta producat, sed ad minimum duo centra virium diuersa constitui debere. Ostendam igitur hic, talia duo centra virium semper pro arbitrio accipi posse, quomocunque curua descripta extra planum diuagetur, ac perpetuo illas binas vires centripetas ita determinari posse, vt corpus ab iis sollicitatum per curuam propositam promoueri queat.

§. 2.

Tab. III.
Fig. I.

§. 2. Sit igitur proposita curua quaecunque A Z, cuius punctum quoduis Z vtcunque extra planum tabulae sit positum, cuius ergo locus more solito per ternas coordinatas C X = x, X Y = y et Y Z = z definiatur, inter quas igitur ob curuam datam duplex relatio detur necesse est, vnde pro quavis abscissa x tam valor ipsius y quam ipsius z assignari possit. Quin etiam, introducendo ipsius curuae elementum, quod sit = ds, poni poterit dx = p ds, dy = q ds et dz = r ds, ita vt sit pp + qq + rr = 1, et quouis casu valores harum litterarum vt cogniti spectari poterunt.

§. 3. Constituatur igitur alterum centrum virium in ipso puncto C ac ponatur ab eo distantia puncti Z scilicet CZ = v, ita vt sit vv = xx + yy + zz; tum vero denotet V ipsam vim centripetam qua corpus in Z versus istud centrum C vrgeri debet, ex qua ergo secundam directiones coordinatarum resultabunt ternae vires, quae erunt

secundum X C = $\frac{v x}{v}$,
 secundum Y X = $\frac{v y}{v}$ et
 secundum Z Y = $\frac{v z}{v}$.

§. 4. Alterum autem centrum virium C' vbicumque in plano quidem tabulae accipiatur, pro quo si punctum Z pariter per ternas coordinatas prioribus parallelas referatur, vocentur eae C' X' = x', X' Y = y' et Y Z = z vt ante, quae ergo a praecedentibus tantum quantitate constante discrepabunt, ita vt sit x' = x + a, et y' = y + b. Quod si vero centrum C' extra planum tabulae accipiatur, tum praeterea erit z' = z + c; vnde differentialia harum coordinatarum a praecedentibus non discrepabunt, ideoque litterae p, q, r perinde ad ambo centra virium C et C' referentur. Statuatur igitur pro hoc centro C' di-

distancia $C'Z = v'$ et ipsa vis centripeta huc tendens $= V'$,
 ita vt. nunc sit $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$; at vires pro ter-
 minis nostris directionibus hinc oriundae erunt

secundum $X' C' = \frac{v'x'}{v'}$,

secundum $Y X' = \frac{v'y'}{v'}$,

secundum $Z Y = \frac{v'z'}{v'}$.

§. 5. Introducamus nunc elementum temporis ∂t , quo
 pro constanti assumto, principia motus sequentes tres aequatio-
 nes suppeditabunt:

I. $\frac{\partial \partial x}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v x}{v} - \frac{v' x'}{v'}$;

II. $\frac{\partial \partial y}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v y}{v} - \frac{v' y'}{v'}$;

III. $\frac{\partial \partial z}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v z}{v} - \frac{v' z'}{v'}$;

vbi α denotat certam quantitatem constantem, ex ratione qua
 tam tempus t exprimitur quam ipsae vires V et V' ad men-
 suras cognitae reuocantur, petendam. Cum igitur hic tres ha-
 beantur aequationes, facile intelligitur, ex iis binas vires in-
 cognitae V et V' semper determinari posse.

§. 6. Elidamus hinc primo vim V' , id quod duplici
 modo fieri poterit; primo scilicet ex aequationum §. praecedentis
 prima et secunda fiet

$$\frac{y' \partial \partial x - x' \partial \partial y}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v (y' x - x' y)}{v}$$

deinde secunda et tertia simili modo praebent

$$\frac{z' \partial \partial y - y' \partial \partial z}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v (z' y - y' z)}{v}$$

quarum haec per illam diuisa perducit ad hanc aequationem:

$$\frac{z' \partial \partial y - y' \partial \partial z}{y' \partial \partial x - x' \partial \partial y} = \frac{z' y - y' z}{y' x - x' y}$$

vnde etiam ipsum temporis elementum ∂t est expulsus; inter-

rim tamen conditio, qua ∂t constans est assumtum, etiamnunc inhaeret, unde ratio differentialium secundi gradus, quae per se forent indefinita, peti debet.

§. 7. Quod si iam postrema ista aequatio euoluatur, peruenietur ad sequentem aequationem

$y' \partial \partial x (z'y - y'z) + y' \partial \partial y (x'z - z'x) + y' \partial \partial z (y'x - x'y) = 0,$
 quae commode per y' diuidi se patitur, et aequatio induet hanc formam:

$$\partial \partial x (z'y - y'z) + \partial \partial y (x'z - z'x) + \partial \partial z (y'x - x'y) = 0.$$

Hic iam introducamus valores supra notatos, scilicet $x' = x + a,$
 $y' = y + b, z' = z + c,$ et prodibit haec aequatio:

$$\partial \partial x (cy - bz) + \partial \partial y (az - cx) + \partial \partial z (bx - ay) = 0,$$

quae secundum litteras a, b, c disposita euadet

$$a(z \partial \partial y - y \partial \partial z) + b(x \partial \partial z - z \partial \partial x) + c(y \partial \partial x - x \partial \partial y) = 0.$$

§. 8. Hic igitur singulae partes manifesto sponde sunt integrabiles, unde integratio dabit

$$a(z \partial y - y \partial z) + b(x \partial z - z \partial x) + c(y \partial x - x \partial y) = \text{const.}$$

quam constantem utique formam differentialem habere oportet; quare cum elementum ∂t sumtum sit constans, aequatio ita repraesentari debet:

$$a(z \partial y - y \partial z) + b(x \partial z - z \partial x) + c(y \partial x - x \partial y) = C \partial t.$$

Ac si iam introducamus positiones $\partial x = p \partial s,$ $\partial y = q \partial s$ et $\partial z = r \partial s,$ haec aequatio accipiet hanc formam:

$$a \partial s (qz - ry) + b \partial s (rx - pz) + c \partial s (py - qx) = C \partial t,$$

atque hinc, quia elementum ∂t suppositum est constans, differentiando colligetur differentiale secundum $\partial \partial s,$ cum fiat

$$a \partial \partial s$$

$$\left\{ \begin{aligned} & a \partial \partial s (qz - ry) + b \partial \partial s (rx - pz) + c \partial \partial s (py - qx) \\ & + a \partial s (z \partial q - y \partial r) + b \partial s (x \partial r - z \partial p) + c \partial s (y \partial p - x \partial q) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Sicque erit

$$\frac{\partial \partial s}{\partial s} = \frac{a(y \partial r - z \partial q) + b(z \partial p - x \partial r) + c(x \partial q - y \partial p)}{a(qz - ry) + b(rx - pz) + c(py - qx)}.$$

§. 9. Cum igitur formula $\frac{\partial s}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis in puncto Z, si haec celeritas vocetur = u, vt fit $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, iam adepti sumus formulam pro corporis celeritate u; erit enim

$$u = \frac{c}{a(qz - ry) + b(rx - pz) + c(py - qx)}.$$

Introducendo autem istam celeritatem, cum in nostris formulis principalibus fit $\frac{\partial \partial x}{\partial t} = \partial \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$, ob $\partial x = p \partial s$ et $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, erit $\frac{\partial \partial x}{\partial t} = \partial \cdot p u = p \partial u + u \partial p$; similique modo erit

$$\frac{\partial \partial y}{\partial t} = \partial \cdot q u = q \partial u + u \partial q \text{ et}$$

$$\frac{\partial \partial z}{\partial t} = \partial \cdot r u = r \partial u + u \partial r.$$

§. 10. His inuentis ambas vires quaesitas V et V' definire licebit; cum enim inuenerimus:

$$\frac{y' \partial \partial x - x' \partial \partial y}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v}{v'} (y' x - x' y) = -\frac{v'}{v} (b x - a y),$$

multiplicando per $\alpha \partial t$ et loco $\frac{\partial \partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial \partial y}{\partial t}$ valores ante inuentos substituendo, erit

$$y' (p \partial u + u \partial p) - x' (q \partial u + u \partial q) = -\frac{\alpha v \partial t}{v'} (b x - a y),$$

ergo ob $x' = x + a$ et $y' = y + b$, erit

$$V = \frac{(x+a)(q \partial u + u \partial q) - (y+b)(p \partial u + u \partial p)}{b x - a y} \cdot \frac{v}{\alpha \partial t}.$$

§. 11. Simili modo cum ex aequationibus principalibus elici queat haec aequatio y'

$$\frac{y\partial\partial x - x\partial\partial y}{a\partial t^2} = -\frac{v'}{v}(x'y - y'x) = -\frac{v'}{v}(ay - bx),$$

factis iisdem substitutionibus perueniemus ad sequentem formam:

$$V = \frac{v'}{a\partial t} \cdot \frac{x(q\partial u + u\partial q) - y(p\partial u + u\partial p)}{ay - bx}.$$

Sicque pro quouis casu oblato, non solum ambas vires centripetas V et V' , sed etiam celeritatem corporis in singulis punctis curvae propositae assignare licet.

§. 12. Quoniam ternas coordinatas x, y et z inter se permutare licet, etiam pro vtraque vi centripeta V et V' ternae expressiones exhiberi poterunt, quae erunt pro vi V ad centrum C tendente

$$\text{I. } V = \frac{v}{a\partial t} \left(\frac{(x+a)(q\partial u + u\partial q) - (y+b)(p\partial u + u\partial p)}{bx - ay} \right),$$

$$\text{II. } V = \frac{v}{a\partial t} \left(\frac{(y+b)(r\partial u + u\partial r) - (z+c)(q\partial u + u\partial q)}{cy - bz} \right),$$

$$\text{III. } V = \frac{v}{a\partial t} \left(\frac{(z+c)(p\partial u + u\partial p) - (x+a)(r\partial u + u\partial r)}{az - cx} \right),$$

Simili modo pro altera vi centripeta V' ad centrum C' tendente

$$\text{I. } V' = \frac{v'}{a\partial t} \cdot \frac{x(q\partial u + u\partial q) - y(p\partial u + u\partial p)}{ay - bx},$$

$$\text{II. } V' = \frac{v'}{a\partial t} \cdot \frac{y(r\partial u + u\partial r) - z(q\partial u + u\partial q)}{bz - cy},$$

$$\text{III. } V' = \frac{v'}{a\partial t} \cdot \frac{z(p\partial u + u\partial p) - x(r\partial u + u\partial r)}{cx - az}.$$

ALIA SOLVTIO

eiusdem quaestionis multo succinctior.

Tab. III.
Fig. 2.

§. 13. Quia ternas directiones fixas, quibus ternas coordinatas x, y, z parallelas statuimus, pro lubitu accipere licet, solutio multo fiet simplicior, si axem, in quo abscissas x , capimus, per ipsa bina centra virium C et C' ducamus. Sint igitur C et C' bina centra virium, et ne alteri prae altero vlam.

lam praerogatiuam tribuamus, abscissas OX a puncto medio O computemus, quem in finem ponamus $OC = OC' = k$, vt pro centro C fit abscissa $CX = x + k$, pro altero vero centro $C'X = x - k$, quia in partem contrariam vergit; binae autem reliquae coordinatae XY et YZ aequae referuntur. Hinc ductis distantis CZ et C'Z, erit

$$CZ = v = \sqrt{(x+k)^2 + yy + zz} \text{ et}$$

$$C'Z = v' = \sqrt{(x-k)^2 + yy + zz},$$

ita vt fit $vv + v'v' = 4kx$.

§. 14. Quod si nunc vt ante vis ad centrum C tendens vocetur = V, altera vero vis ad centrum C' tendens = V', sumto elemento temporis ∂t constante tres aequationes motum determinantes erunt:

$$I. \frac{\partial \partial x}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v(x+k)}{v} - \frac{v'(x-k)}{v'};$$

$$II. \frac{\partial \partial y}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v y}{v} - \frac{v' y}{v'};$$

$$III. \frac{\partial \partial z}{\alpha \partial t^2} = -\frac{v z}{v} - \frac{v' z}{v'};$$

vbi statim commode vsu venit, vt secunda per tertiam diuisa praebeat hanc simplicem aequalitatem $\frac{\partial \partial y}{\partial \partial z} = \frac{y}{z}$, ideoque $z \partial \partial y - y \partial \partial z = 0$, hinc igitur integrando fiet $z \partial y - y \partial z = C \partial t = \frac{c \partial s}{u}$, posito scilicet elemento curuae descriptae = ∂s et celeritate = u .

§. 15. Ponamus nunc vt ante $\partial x = p \partial s$, $\partial y = q \partial s$ et $\partial z = r \partial s$; ita vt fit $pp + qq + rr = 1$, eritque $C \partial t = \partial s (qz - ry)$, ideoque $u = \frac{c}{qz - ry}$. Porro vero ob summum ∂t constans fiet $\partial \partial s = \frac{\partial s (y \partial r - z \partial q)}{qz - ry}$, vel etiam per celeritatem habebimus $\partial \partial s = \frac{\partial u \partial s}{u}$, vnde erit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \partial x}{\partial t^2} &= \frac{\partial s (p \partial u + u \partial p)}{u} \\ \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} &= \frac{\partial s (q \partial u + u \partial q)}{u} \text{ et} \\ \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} &= \frac{\partial s (r \partial u + u \partial r)}{u} \end{aligned}$$

unde porro colligitur: $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = \frac{u (r \partial u + u \partial r)}{\partial s}$, $\frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = \frac{u (q \partial u + u \partial q)}{\partial s}$
 et $\frac{\partial \partial z}{\partial t^2} = \frac{u (r \partial u + u \partial r)}{\partial s}$, quae ternae expressiones breuitatis gra-
 tia per litteras P, Q et R indicentur, vbi notasse iuuabit fore
 $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z}$, ob $u = \frac{c}{qz - ry}$.

§. 16. Nunc pro ipsis viribus centripetis inueniendis combinemus primam aequationem cum secunda, ac primo

I. $y - k$ II. $(x - k)$ praebet
 $\frac{P \cdot y - Q(x - k)}{a} = \frac{2 \sqrt{k y}}{v}$ ideoque
 vis $V = \frac{v Q (x - k) - v P y}{2 a k y}$.

Simili modo combinatio I. $y - k$ II. $(x + k)$ praebet

$\frac{y P - Q(x + k)}{a} = \frac{2 \sqrt{k y}}{v'}$ ideoque vis
 $V' = \frac{v' P y - v' Q (x + k)}{2 a k y}$

quas ambas formulas etiam ita repraesentare licet.

$$\frac{2 a v}{v} = \frac{Q x - P y}{k y} - \frac{Q}{y} \text{ et } \frac{2 a v'}{v'} = \frac{P y - Q x}{k y} - \frac{Q}{y}$$

Ad illustrationem huius solutionis quaedam exempla subiungamus.

Problema I.

§. 17. Si corpus utcumque in superficie cylindri moueri debeat, in cuius axe ambo centra virium C et C' accipiantur inuenire tam celeritatem corporis u quam ambas vires centripetas V et V'.

Solutio.

Solutio.

Sit radius cylindri = a et distantia centrorum $CC = 2k$,
eritque $yy + zz = aa$; ponatur ergo

$$y = a \cos. \Phi \text{ et } z = a \sin. \Phi,$$

tum vero, quia motum quemcunque in superficie cylindri statuimus, abscissa x tanquam certa functio anguli Φ spectari poterit, unde fiat $\partial x = \Pi \partial \Phi$, inde autem colligentur distantiae corporis a centris virium

$$v = \sqrt{(x+k)^2 + aa} \text{ et } v' = \sqrt{(x-k)^2 + aa};$$

deinde vero ob $\partial y = -a \partial \Phi \sin. \Phi$ et $\partial z = a \partial \Phi \cos. \Phi$,
erit $\partial s = \partial \Phi \sqrt{(\Pi \Pi + aa)}$, ex quo porro fiet $p = \frac{\pi}{\sqrt{(\Pi \Pi + aa)}}$,
 $q = \frac{a \sin. \Phi}{\sqrt{(\Pi \Pi + aa)}}$ et $r = \frac{a \cos. \Phi}{\sqrt{(\Pi \Pi + aa)}}$.

His positis celeritas corporis in Z reperietur

$$u = \frac{c \sqrt{(\Pi \Pi + aa)}}{aa}$$

Deinde pro ipsis viribus inueniendis quaerantur ante omnia valores litterarum P, Q, R ; reperieturque

$$P = \frac{cc \partial \Pi}{a^2 \partial \Phi} = \frac{cc}{a^2} \Pi,$$

posito $\partial \Pi = \Pi' \partial \Phi$. Porro erit $Q = -\frac{cc \cos. \Phi}{a^3}$, ac denique
 $R = -\frac{cc \sin. \Phi}{a^3}$, unde utique habetur $\frac{Q}{R} = \frac{y}{z} = \frac{\cos. \Phi}{\sin. \Phi}$.

His valoribus inuentis pro ipsis viribus quaeramus primo formulam:

$$\frac{Qx - Py}{y} = -\frac{cc}{a^2} (x + \Pi),$$

ac tum ob $\frac{Q}{y} = -\frac{cc}{a^2}$ habebimus:

$$\frac{2ay}{v} = \frac{cc}{a^2} - \frac{cc}{a^2} \frac{(x + \Pi)}{k} = \frac{cc}{a^2} \left(1 - \frac{x + \Pi}{k} \right),$$

$$\frac{2av'}{v'} = \frac{cc}{a^2} + \frac{cc}{a^2} \frac{(x + \Pi)}{k} = \frac{cc}{a^2} \left(1 + \frac{x + \Pi}{k} \right),$$

unde

vnde ipsae vires erunt

$$V = \frac{ccv}{2\alpha a^2} \left(1 - \frac{x - \Pi}{k} \right) \text{ et } V' = \frac{ccv'}{2\alpha a^2} \left(1 + \frac{x + \Pi}{k} \right).$$

Corollarium 1.

§. 18. Quod si velimus vt corpus in superficie cylindricae describat helicem Archimedis, seu eam lineam, quae intra suos terminos est breuissima, poni debet $x = na\Phi$, ideoque $\Pi = na$ et $\Pi' = 0$, vnde sequitur celeritas corporis $u = \frac{cv(1+nn)}{a}$, quae ergo perpetuo manebit constans, vnde si vocetur $u = c$, erit $C = \frac{ac}{v(1+nn)}$, tum vero ambae vires centripetae ita erunt comparatae,

$$V = \frac{ccv}{2\alpha a^2} \left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k} \right) \text{ et } V' = \frac{ccv'}{2\alpha a^2} \left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k} \right),$$

quare si loco C scribamus valorem modo assignatum, erit

$$V = \frac{ccv}{2\alpha a^2(1+nn)} \left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k} \right) \text{ et}$$

$$V' = \frac{ccv'}{2\alpha a^2(1+nn)} \left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k} \right).$$

Corollarium 2.

§. 19. Quod si factorem constantem $\frac{cc}{2\alpha a^2(1+nn)}$ designemus litera, A habemus

$$V = A v \left(1 - \frac{na(1+\Phi)}{k} \right) \text{ et } V' = A v' \left(1 + \frac{na(1+\Phi)}{k} \right),$$

vnde patet vtramque vim centripetam constare duabus partibus, quarum prior simpliciter proportionalis est distantiae corporis a centro, posterior vero eidem distantiae per angulum Φ multiplicatae, quandoquidem erit

$$V = A \left(1 - \frac{na}{k} \right) v - \frac{1na\Phi v}{k} \text{ et}$$

$$V' = A \left(1 + \frac{na}{k} \right) v' + \frac{1na\Phi v'}{k},$$

vbi posterior vis V' maior est priore, propterea quod corpus a cen-

a centro C recedere, contra vero ad centrum C' accedere assumimus.

Problema II.

§. 20. Si corpus vicunque in superficie globi moueri debeat; et ambo centra virium in ipsis polis huius globi statuatur, inuenire tam celeritatem corporis u, quam ambas vires centripetas V et V'.

Solutio.

Sint igitur C et C' poli nostrae Sphaerae, cuius radius ponatur = a, eritque O eius centrum et k = a. Cum igitur esse debeat $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, statuamus $x = a \sin. \eta$, tum vero $y = a \cos. \eta \cos. \Phi$, et $z = a \cos. \eta \sin. \Phi$, vbi in genere ambo anguli η et Φ relationem quamcunque inter se tenere possunt, ex quo statuamus $\partial \Phi = \Pi \partial \eta$ et $\partial \Pi = \Pi' \partial \eta$. Primo igitur distantiae corporis ab utroque polo erunt

$$v = a \sqrt{(2 + 2 \sin. \eta)} = 2a \cos. (45^\circ - \frac{1}{2} \eta) \text{ et}$$

$$v' = a \sqrt{(2 - 2 \sin. \eta)} = 2a \sin. (45^\circ - \frac{1}{2} \eta).$$

Cum nunc sit $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$, ob

$$\partial x = a \partial \eta \cos. \eta$$

$$\partial y = -a \partial \eta (\sin. \eta \cos. \Phi + \Pi \cos. \eta \sin. \Phi) \text{ et}$$

$$\partial z = a \partial \eta (\Pi \cos. \eta \cos. \Phi - \sin. \eta \sin. \Phi),$$

habebitur

$$\partial s = a \partial \eta \sqrt{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)}.$$

Hinc iam porro deducimus

$$p = \frac{\cos. \eta}{\sqrt{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)}},$$

$$q = \frac{(\sin. \eta \cos. \Phi + \Pi \cos. \eta \sin. \Phi)}{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)} \text{ et}$$

$$r = \frac{\Pi \cos. \eta \cos. \Phi - \sin. \eta \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)}}.$$

quamobrem hinc celeritas corporis ita definietur, vt fit

$$u = \frac{c \sqrt{(1 + \Pi \Pi \cos. \eta^2)}}{a \Pi \cos. \eta^2},$$

vnde patet, dum corpus ad alterutrum polum pertingit, quod fit quando angulus η fit reclusus, celeritatem corporis ibi fieri infinitam, nisi forte quantitas Π euadat infinita, ita vt $\Pi \cos. \eta^2$ euadat quantitas finita puta A , interim tamen etiam hoc casu, quoniam fit $u = \frac{C \sqrt{(1 + \frac{A A}{\cos. \eta^2}}}{a A}$, manifesto celeritas fit infinita.

Nunc vt etiam valores litterarum P , Q , R eruamus, pro P habemus primo $p u = \frac{c}{a \Pi \cos. \eta}$, hincque

$$\partial. p u = \frac{c \partial \eta}{a} \left(\frac{\Pi \sin. \eta - \Pi' \cos. \eta}{\Pi \Pi \cos. \eta^2} \right), \text{ vnde ob}$$

$$\frac{u}{\partial s} = \frac{c}{a a \Pi \partial \eta \cos. \eta^2} \text{ reperietur}$$

$$P = \frac{c c (\Pi \sin. \eta - \Pi' \cos. \eta)}{a^3 \Pi^2 \cos. \eta^2}.$$

Deinde ob

$$q u = \frac{c (\sin. \eta \cos. \Phi + \Pi \cos. \eta \sin. \Phi)}{a \Pi \cos. \eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial. q u = \frac{c \partial \eta \cos. \Phi}{a} \frac{(\Pi (1 + \Pi \Pi) \cos. \eta^2 + 2 \Pi \sin. \eta^2 - \Pi' \sin. \eta \cos. \Phi)}{\Pi \Pi \cos. \eta^2},$$

quae expressio ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$Q = \frac{c c \cos. \Phi (\Pi (1 + \Pi \Pi) \cos. \eta^2 + 2 \Pi \sin. \eta^2 - \Pi' \sin. \eta \cos. \eta)}{a^3 \Pi^2 \cos. \eta^2}.$$

Denique cum fit

$$r u = \frac{c}{u} \frac{(\sin. \eta \sin. \Phi - \Pi \cos. \eta \cos. \Phi)}{\Pi \cos. \eta^2} \text{ erit}$$

$$\partial. r u = \frac{c \partial \eta \sin. \Phi}{a} \frac{(\Pi (1 + \Pi \Pi) \cos. \eta^2 + 2 \Pi \sin. \eta^2 - \Pi' \sin. \eta \cos. \eta)}{\Pi \Pi \cos. \eta^2},$$

quae formula ducta in $\frac{u}{\partial s}$ dabit

$$R = \frac{c c \sin. \Phi (\Pi (1 + \Pi \Pi) \cos. \eta^2 + 2 \Pi \sin. \eta^2 - \Pi' \sin. \eta \cos. \eta)}{a^3 \Pi^2 \cos. \eta^2},$$

vnde manifestum est esse $Q : R = y : z$ hoc est $= \cos. \Phi : \sin. \Phi$.

Cum

Cum nunc ob $k = a$ fit

$$\frac{2\alpha v}{v'} = \frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} - \frac{Q}{y} \quad \text{et} \quad \frac{2\alpha v'}{v} = \frac{P}{a} - \frac{Qx}{ay} - \frac{Q}{y}, \quad \text{erit}$$

$$\frac{Q}{y} = \frac{cc(\Pi(1+\Pi\Pi)\cos.\eta^2 + 2\Pi\sin.\eta^2 - \Pi'\sin.\eta\cos.\eta)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6} \quad \text{et}$$

$$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = \frac{cc(\Pi(1+\Pi\Pi)\sin.\eta\cos.\eta^2 + 2\Pi\sin.\eta^3 - \Pi'\sin.\eta^2\cos.\eta + \Pi\sin.\eta\cos.\eta^2 - \Pi'\cos.\eta^3)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6},$$

quae expressiones etiam ita repraesentari possunt

$$\frac{Q}{y} = \frac{cc}{a^4\Pi^4\cos.\eta^6} (\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \sin.\eta \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}) \quad \text{et}$$

$$\frac{P}{a} = \frac{cc}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6} \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta} \quad \text{et hinc}$$

$$\frac{Qx}{ay} - \frac{P}{a} = \frac{cc}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6} (\Pi\sin.\eta(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}).$$

His autem valoribus substitutis fiet

$$\frac{2\alpha v}{v'} = \frac{cc(1-\sin.\eta)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6} (\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) + \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}) \quad \text{et}$$

$$\frac{2\alpha v'}{v} = \frac{cc(1+\sin.\eta)}{a^4\Pi^3\cos.\eta^6} (\Pi(1+\Pi\Pi\cos.\eta^2) - \frac{\partial.\Pi\cos.\eta}{\partial\eta}),$$

quibus formulis ergo ambae vires centripetae V et V' satis commode exprimentur, vbi meminisse iuuabit esse

$$v = a\sqrt{2(1+\sin.\eta)} \quad \text{et} \quad v' = a\sqrt{2(1-\sin.\eta)}.$$

EVOLVTIO CASVS

quo corpus in superficie Sphaerica Loxodromiam describit.

§. 21. Angulus ergo, sub quo via corporis singulos meridianos interfecat, debet esse constans, cuius tangens si ponatur $= n$, reperietur $\frac{\partial\Phi\cos.\eta}{\partial\eta} = n$, vnde ergo fit $\partial\Phi = \frac{n\partial\eta}{\cos.\eta}$, ficque habebitur $\Pi = \frac{n}{\cos.\eta}$, ac propterea formula $\Pi\cos.\eta = n$ erit constans eiusque differentiale euanescet. Hic ergo erit vt ante $v = a\sqrt{2(1+\sin.\eta)}$ et $v' = a\sqrt{2(1-\sin.\eta)}$; tum vero prodibit celeritas $u = \frac{c\sqrt{1+nn}}{an\cos.\eta}$, quae ergo in ipsis polis vbi $\eta = 90^\circ$ fiet infinita. Deinde autem ambae vires cen-

tripetae ita erunt comparata vt fit

$$\frac{2\alpha v}{v} = \frac{cc(1 - \sin.\eta)(1 + nn)}{nn a^2 \cos.\eta^2} \text{ et } \frac{2\alpha v'}{v'} = \frac{cc(1 + \sin.\eta)(1 + nn)}{nn a^2 \cos.\eta^2},$$

vnde loco v et v' valoribus substitutis colligetur

$$V = \frac{(1 + nn)cc(1 - \sin.\eta)\sqrt{2}(1 + \sin.\eta)}{2\alpha nn a^2 \cos.\eta^2} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1 + nn)cc(1 + \sin.\eta)\sqrt{2}(1 - \sin.\eta)}{2\alpha nn a^2 \cos.\eta^2}.$$

Cum nunc fit $\cos.\eta^2 = (1 + \sin.\eta)(1 - \sin.\eta)$, hae formulae reducentur ad sequentes

$$V = \frac{(1 + nn)cc\sqrt{2}}{2\alpha nn a^2 \cos.\eta^2 \sqrt{(1 + \sin.\eta)}} = \frac{(1 + nn)cc}{\alpha nn a^2 \cos.\eta^2 \sqrt{2}(1 + \sin.\eta)} \text{ et}$$

$$V' = \frac{(1 + nn)cc}{\alpha nn a^2 \cos.\eta^2 \sqrt{2}(1 - \sin.\eta)}$$

vnde patet fore $V : V' = v' : v$ ita vt fit $V'v' = Vv$.

§. 22. Quod si fuerit $n = 0$, quo casu corpus movebitur in ipso meridiano, erit primo celeritas $u = \infty$; quia autem C est constans arbitraria, si ponamus $C = nA$, fiet $u = \frac{A}{a \cos.\eta}$; ipsae autem vires erunt

$$V = \frac{AA}{\alpha a^2 \cos.\eta^2 \sqrt{2}(1 + \sin.\eta)} \text{ et } V' = \frac{AA}{\alpha a^2 \cos.\eta^2 \sqrt{2}(1 - \sin.\eta)}$$

vbi notetur, dum corpus per aequatorem transit vbi $\eta = 0$, tum fore $u = \frac{A}{a}$, atque vires $V = \frac{AA}{\alpha a^2 \sqrt{2}}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha a^2 \sqrt{2}}$, sicque hae vires erunt aequales, quo longius autem corpus ab aequatore recedit, tam celeritas quam ambae vires continuo fiunt maiores. Ponamus corpus iam tam prope ad polum accessisse, vt fit $\eta = 90^\circ - \omega$, existente ω quasi infinite paruo; eritque $\cos.\eta^2 = \omega\omega$, at $1 + \sin.\eta = 2$, et $1 - \sin.\eta = \frac{1}{2}\omega\omega$; tum ergo erit $u = \frac{A}{a\omega}$, $V = \frac{AA}{2\alpha a^2 \omega\omega}$ et $V' = \frac{AA}{\alpha a^2 \omega^2}$.

§. 23. Sumamus nunc angulum Loxodromiae esse re-
ctum, quo corpus vel in aequatore vel in quouis circulo aequa-
tori parallelo movetur, cuius distantia ab aequatore angulo η
indi-

indicatur; tum igitur erit $n = \infty$, hincque celeritas $u = \frac{c}{a \cos \eta}$, quae ergo erit constans ob angulum η constantem; tum vero vires erunt

$$V = \frac{cc}{a a^3 \cos^2 \eta^2 \sqrt{2(1 + \sin \eta)}} \quad \text{et} \quad V' = \frac{cc}{a a^3 \cos^2 \eta^2 \sqrt{2(1 - \sin \eta)}}$$

quae ergo etiam ambae erunt constantes.

§. 24. Videamus vero etiam, quomodo in genere vires futurae sint comparatae, quando corpus iam proxime ad polum accesserit ita vt sit $\eta = 90^\circ - \omega$; tum autem erit celeritas $u = \frac{c \sqrt{1 + nn}}{n a \omega}$, atque vires

$$V = \frac{(1 + nn) cc}{a n n a^3 \omega^2} \quad \text{et} \quad V' = \frac{(1 + nn) cc}{a n n a^3 \omega^2}$$

vnde patet, vim V infinities esse minorem quam alteram V' , ita vt corpus a sola vi V' vrgeri censei queat, et quia hic ω exprimet distantiam corporis a polo C' , vis ista reciproce erit cubo huius distantiae proportionalis, corpus autem iam circa polum C' spiralem logarithmicam describet, quae vtique talem vim centripetam postulat.

§. 25. Superfluum foret plures casus euoluere, quandoquidem inde nullae expressiones elegantes et attentione dignae forent expectandae; imprimis enim mihi erat propositum ostendere, si corpus in quacunque curua non in eodem plano sita moueri debeat, semper duas vires centripetas assignari posse, quae adeo ad data duo centra virium diriguntur, ita vt corpus ab istis viribus sollicitatum per ipsam curuam propositam promoueatur.