

S O L U T I O  
P R O B L E M A T I S M E C H A N I C I

Auctore L. EULERO.

Conventui exhibita die 25. April. 1782.

§. 1.

Tab. I.  
Fig. I.

Referat circulus XTGF, cujus centrum in C, globum five cylindrum, aliudve corpus rotundum, plano inclinato AH incumbens, cujus inclinatio ad horizontem fit angulus  $AHD = \zeta$ ; circuli autem radius ponatur  $CX = a$ . Corporis, hoc circulo repræsentati, axis maneat perpetuo horizontalis, ejusque massa statuatur  $= M$ , qua simul ejus pondus exprimatur. Momentum vero inertiae respectu axis fit  $= Mkk$ .

§. 2. Huic circulo, seu corpori rotundo, circumvolutum intelligatur filum, cujus terminus extremus fixus fit in puncto E, a plano inclinato distante intervallo  $AE = a$ , hoc est radio circuli aequali, cujus situs initio tangebatur punctum E, filo scilicet penitus involuto. Hinc autem elapso tempore  $t$  pervenerit in situm figurâ repræsentatum, quem jam filum deferat in puncto T, ejusque portio ulterior circulo fit circumvoluta, indefinitae longitudinis, ut, quamdiu corpus descendat, evolvi queat.

§. 3.

§. 3. Nunc igitur circulus tangat planum inclinatum AH in puncto X, ac ponatur spatium  $AX = x$ , ita ut, sumpto intervallo  $AB = a$ , fit  $BX = x - a$ , eritque BX spatium motu corporis progressivo descriptum. Tum igitur, ducta recta EC, ea erit plano inclinato AH parallela, ideoque aequalis ipsi  $x$ ; unde ducto radio CT erit anguli ECT cosinus  $= \frac{a}{x}$ , at anguli XCT five CET finus  $= \frac{a}{x}$ . Ponatur autem iste angulus  $XCT = CET = \vartheta$ , ita ut fit  $\sin. \vartheta = \frac{a}{x}$ .

§. 4. Hinc jam longitudo fili evoluti colligitur fore  $ET = x \cos. \vartheta$ . cui si aequalis statuatur arcus TGF, erit F punctum circuli, quod initio applicatum erat puncto E, ubi ergo radius CF erat plano inclinato AH parallelus five cadebat in EG. Statuatur angulus motu rotatorio jam confectus  $GCF = \Phi$ , erit angulus  $TCF = 90^\circ - \vartheta + \Phi$ , ex quo ipse arcus  $TGF = a(90^\circ - \vartheta + \Phi)$ , qui cum aequalis fit rectae  $TE = a \cot. \vartheta$ , hinc concluditur angulus  $\Phi = \cot. \vartheta - 90^\circ + \vartheta$ . Unde patet, tam spatium  $x$  quam angulum  $\Phi$  per angulum  $\vartheta$  definiri posse, cum fit  $X = \frac{a}{\sin. \vartheta}$  et  $\Phi = \cot. \vartheta - 90^\circ + \vartheta$ .

§. 5. Ut jam in motum corporis nostri super plano inclinato descendente inquiramus, observandum est, corpus primo sollicitari a propria gravitate  $= M$ ; unde oritur vis motum progressivum accelerans  $= M \sin. \zeta$ . Deinde vero corpus etiam urgetur a tensione fili TE, quae autem tensio etiam nunc penitus est incognita. Ponatur ea  $= T$ , et cum corpus urgeat secundum directionem TE, ea producit vim directioni motus progressivi contrariam secundum CE sollicitantem  $= T \cos. \vartheta$ , ita ut motus progressivus centri C, ubi simul

centrum gravitatis totius corporis existere affumimus, vis fit  $= M \sin. \zeta - T \cos. \vartheta$ .

§. 6. Ex primis igitur motus principiis, fumendo elementum temporis  $dt$  constans, ac denotante  $g$  altitudinem lapsus uno minuto secundo peracti, sequitur fore  $\frac{\partial \partial x}{2g \partial t^2} = \frac{M \sin. \zeta - T \cos. \vartheta}{M}$ . Hac scilicet aequatione motus corporis progressivus determinatur, unde autem nihil adhuc concludere licet, propterea quod vis  $T$  est incognita. Hanc ergo aequationem combinari oportet cum ea, qua motus corporis gyratorius determinatur.

§. 7. Jam observavimus, corpus motu gyratorio jam absolvisse angulum  $GCF = \Phi$ , in sensum  $GF$ , qui ergo motus unice producitur a tensione fili  $ET = T$ , cujus momentum, respectu axis gyrationis, est  $Ta$ , quod divisum per momentum inertiae  $Mkk$  dabit accelerationem motus gyratorii, quae ex principiis motus est  $\frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2}$ . Habebimus ergo hanc aequationem:  $\frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = \frac{Ta}{Mkk}$ , ex qua colligitur ipsa vis incognita, seu tensio  $T = \frac{Mkk \partial \partial \Phi}{2ag \partial t^2}$ .

§. 8. Substituatur igitur iste valor in aequatione ante inventa et facta divisione per massam  $M$  prodibit ista aequatio:  $\frac{\partial \partial x}{2g \partial t^2} = \sin. \zeta - \frac{kk \partial \partial \Phi \cos. \vartheta}{2ag \partial t^2}$ , unde fit  $\sin. \zeta = \frac{kk \partial \partial \Phi \cos. \vartheta + a \partial \partial x}{2ag \partial t^2}$ , atque in hujus aequationis integratione erit elaborandum. Verum si ambas incognitas  $x$  et  $\Phi$  per angulum  $\vartheta$  exprimere velimus, ope formularum  $x = \frac{a}{\sin. \vartheta}$  et  $\Phi = \cot. \vartheta - 90^\circ + \vartheta$ , ob differentialia secundi gradus desaberemur in aequationem tantopere complicatam, ut nihil profus inde concludi possit.

§. 9. Singularem autem artificium haec insignis difficultas superari potest, cujus ope potius ipse angulus  $\vartheta$  ex calculo extrudi poterit, ita ut, etiam si binae variables  $x$  et  $\Phi$  in ea relinquantur, totum tamen negotium facile confici queat. Cum enim sit  $\partial x = -\frac{a \partial \vartheta \cos. \vartheta}{\sin. \vartheta^2}$  et  $\partial \Phi = -\frac{\partial \vartheta}{\sin. \vartheta} + \partial \vartheta = -\frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^3}$ , colligitur  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\cos. \vartheta}{a}$ , five  $\cos. \vartheta = \frac{a \partial \Phi}{\partial x}$ .

§. 10. In aequatione ergo differentio-differentiali ante inventa loco  $\cos. \vartheta$  iste valor  $\frac{a \partial \Phi}{\partial x}$  substitutus hanc producit aequationem integrationem admittens:  $\partial x \sin. \zeta = \frac{kk \partial \Phi \partial \Phi + \partial x \partial \partial x}{2g \partial t^2}$ , cujus integrale est  $C + x \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk \partial \Phi^2}{4g \partial t^2}$ . Quoniam autem motus initium assumimus ubi  $x = a$ , hoc integrale, habita constantis ratione, erit  $(x-a) \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk \partial \Phi^2}{4g \partial t^2}$ .

§. 11. Ex hac jam aequatione ipsum tempus elapsum  $t$  determinari poterit. Cum enim sit

$$4g(x-a) \partial t^2 \sin. \zeta = \partial x^2 + kk \partial \Phi^2, \text{ ob } x = \frac{a}{\sin. \vartheta},$$

$$\partial x = -\frac{a \partial \vartheta \cos. \vartheta}{\sin. \vartheta^2} \text{ et } \partial \Phi = -\frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^3}, \text{ his valoribus substitutis habebitur ista aequatio:}$$

$$\frac{4ag \partial t^2 \sin. \zeta (1 - \sin. \vartheta)}{\sin. \vartheta} = \frac{\partial \vartheta^2 \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2} (aa + kk \cos. \vartheta^2), \text{ unde fit}$$

$$\partial t = \frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1 - \sin. \vartheta)}}, \text{ unde colligitur}$$

$$t = -\int \frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1 - \sin. \vartheta)}}. \text{ Hic scilicet signum negativum praefigimus, quoniam angulus } \vartheta \text{ continuo decrefcit, qui angulus initio, ubi } t = 0, \text{ erat } \vartheta = 90^\circ.$$

§. 12. Hinc igitur patet, tempus  $t$  pro quovis angulo  $\vartheta$  definiri posse per formulam quidem integram, quam autem

neque per logarithmos neque per arcus circulares evolvere licet. Quo haec expressio aliquanto simplicior evadat, ponatur  $\sin. \vartheta = s$ , eritque tempus

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{ag \sin. \zeta}} \int \frac{\partial s}{s} \sqrt{\frac{aa + kk(1 - ss)}{s(1 - s)}}$$

ac si ponatur  $s = \frac{1}{2}$  erit

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{ag \sin. \zeta}} \int \frac{\partial z}{z} \sqrt{\frac{(aa + kk)zz - kk}{z - 1}}$$

Vicissim ergo, concessis quadraturis, ad quodvis tempus  $t$  angulus  $\vartheta$  reperiri poterit, quo invento etiam spatium  $x$  cum angulo  $\phi$  habebitur.

§. 13. Longe autem difficilius est tensionem fili ET per expressionem finitam assignare, quippe quae hactenus fuerat incognita atque hanc ob causam ex calculo expulsa. Erat autem ex motu gyatorio  $\frac{Ta}{Mkk} = \frac{\partial \partial \Phi}{2g \partial t^2}$ , unde necesse est differentiale secundum  $\partial \partial \Phi$  ad differentiale primi gradus revocare, quod praestari poterit ope postremae aequationis differentio-differentialis, unde integrale hausimus, quaeque erat  $\partial x \partial \partial x + kk \partial \Phi \partial \partial \Phi = 2g \partial t^2 \partial x \sin. \zeta$ . Fuerat autem  $\partial x \cos \vartheta = a \partial \Phi$ , hinc differentiando colligitur  $a \partial \partial \Phi = \partial \partial x \cos. \vartheta - \partial \vartheta \partial x \sin. \vartheta$ , ex qua aequatione oritur  $\partial \partial x = \frac{a \partial \partial \Phi}{\cos. \vartheta} + \partial x \partial \vartheta \operatorname{tag} \vartheta$ , qui valor in illa substitutus praebet hanc:  $\partial \partial \Phi \left( \frac{a}{\cos. \vartheta} + \frac{kk \cos. \vartheta}{a} \right) = 2g \partial t^2 \sin. \zeta - \partial x \partial \vartheta \operatorname{tag} \vartheta$ . Sicque nunc differentio-differentialia  $\partial \partial \Phi$  per differentialia primi gradus definitur. Atque si loco  $2g \partial t^2$  et  $\partial x$  valores supra per  $\partial \vartheta$  expressi substituuntur, orietur

$$\frac{\partial \partial \Phi (aa + kk \cos. \vartheta^2)}{a \cos. \vartheta} = \partial \vartheta^2 \frac{(aa(1 + \sin. \vartheta^2 - 2 \sin. \vartheta^3) + kk \cos. \vartheta^4)}{2a \sin. \vartheta^3 (1 - \sin. \vartheta)}$$

§. 14.

§. 14. Quod si ergo hinc valor pro  $\partial\partial\Phi$  in formula pro tensione fili T inventa substituat, prodibit

$$T = \frac{Mkk}{2ag\partial t^2} + \frac{\partial\partial^2 \cos.\vartheta (aa(x + \sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk \cos.\vartheta^4)}{2\sin.\vartheta^3 (1 - \sin.\vartheta) (aa + kk \cos.\vartheta^2)}$$

Est vero  $2ag\partial t^2 = \frac{\partial^2 \cos.\vartheta^2 (aa + kk \cos.\vartheta^2)}{2\sin.\vartheta^2 \sin.\zeta \sin.\vartheta' (1 - \sin.\vartheta)^2}$  unde fit tensio

$$T = \frac{Mkk \sin.\zeta (aa(x + \sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk \cos.\vartheta^4)}{\cos.\vartheta (aa + kk \cos.\vartheta^2)^2}$$

quae expressio quia solum angulum  $\vartheta$  involvit, ad quodvis tempus elapsam  $t$  tensio T absolute assignari poterit et cum pondere M comparari.

§. 15. Denique etiam tam celeritas corporis progressiva, quae est  $\frac{\partial x}{\partial t}$ , quam gyratoria  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , satis eleganter definiri potest. Si enim ponamus  $\frac{\partial x}{\partial t} = v$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = u$ , erit aequatio  $vv + kk uu = 4g(x - a) \sin \zeta$ . Unde simul patet principium virium vivarum hic egregie conservari. Cum enim fit  $Mvv$  vis viva motus progressivi et  $Mkk uu$  vis viva motus gyratorii, erit summa utriusque  $M(vv + kk uu) = 4gM(x - a) \sin \zeta$ , cujus aequationis membrum postremum exprimit descensum verticalem centri gravitatis corporis in massam M ductum, cui constat semper aequalem esse debere totam vim vivam hoc descensu generatam.

§. 16. Quin etiam, ex solo principio conservationis virium vivarum ista aequatio facile deduci potuisset. Neque vero patet quomodo hinc ipsa tensio fili, qua insigne momentum perfectae solutionis est constituendum, derivari potuisset. Quam ob causam operam dedi, ut universam huius Problematis solutionem ex primis motus principiis repeterem.