

DE BINIS
 CURVIS ALGEBRAICIS
 INVENIENDIS, QUARVM ARCVS INDEFINITE INTER
 SE SINT AEQVALES.

Auctore

L. EULERO.

Conuent. exhib. d. 20 Iun. 1776.

§. I.

Tab. I. **S**int AY et ay huiusmodi binae curvae algebraicae, quarum
 Fig. 2. et 3. arcus AY et ay inter se sint aequales; ac pro priore vo-
 centur coordinatae orthogonales $AX = X$ et $XY = Y$; pro
 altera vero $ax = x$ et $xy = y$, tum igitur requiritur vt fit

$$\sqrt{(\partial X^2 + \partial Y^2)} = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Hunc in finem, introducta in calculum noua variabili z , quae-
 stio huc redit: cuiusmodi quatuor functiones algebraicae istius
 quantitatis z pro quaternis illis coordinatis X, Y et x, y accipi
 debeant, vt vtrunque elementa curuae inter se euadant aequalia,
 siue vt fiat $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$? Talibus enim functio-
 nibus inuentis manifestum est, inde pro vtraque curua aequa-
 tiones algebraicas inter binas coordinatas erui posse, ita vt am-
 bae curuae proditurae sint algebraicae.

§. 2.

§. 2. Quo nunc hanc conditionem facilius adimpleamus, quatuor illas coordinatas sequenti modo per partes exprimamus:

$$X = p + q; \quad x = p - q;$$

$$Y = r - s; \quad y = r + s;$$

fic enim pro priori curua reperietur

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2 + 2 \partial p \partial q - 2 \partial r \partial s,$$

pro altera vero curua erit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial q^2 + \partial p^2 + \partial r^2 + \partial s^2 - 2 \partial q \partial p + 2 \partial r \partial s,$$

quae formulae cum inter se debeant esse aequales, satisfieri oportebit huic aequationi: $\partial p \partial q = \partial r \partial s$. Sicque tota quaestio perducta est ad quaternas functiones algebraicas ipsius z pro litteris p, q, r, s , inueniendas, vt fiat $\partial p \partial q = \partial r \partial s$, cui conditioni haud difficulter infinitis modis satisfieri posset, si in solutionibus particularibus acquiescere vellemus.

§. 3. Veluti si ponamus $p = A z^\alpha, q = B z^\beta, r = C z^\gamma, s = D z^\delta$, effici debet vt fiat

$$A B \alpha \beta z^{\alpha+\beta-2} \partial z^2 = C D \gamma \delta z^{\gamma+\delta-2} \partial z^2.$$

Hic igitur duabus conditionibus erit satisfaciendum: primo enim fieri debet $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, tum vero $A B \alpha \beta = C D \gamma \delta$. Vt nunc priori conditioni commodissime satisfaciamus, statuamus

$$\alpha = \lambda + \mu, \quad \beta = \lambda - \mu, \quad \gamma = \lambda + \nu, \quad \delta = \lambda - \nu;$$

fic enim fiet $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2\lambda$. His autem valoribus substitutis altera conditio postulat vt fiat

$$A B (\lambda^2 - \mu^2) = C D (\lambda^2 - \nu^2),$$

sive $\frac{A B}{C D} = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2}$; cui conditioni nitidissime et generalissime satisfaciamus, ponendo:

$$\begin{array}{l|l} A = fg(\lambda + \nu), & C = fb(\lambda + \mu), \\ B = bk(\lambda - \nu), & D = gk(\lambda - \mu), \end{array}$$

vbi tam tres numeros λ , μ et ν , quam quatuor quantitates f , g , b et k prorsus pro lubitu assumere licet; quamobrem hinc pro priore curua nanciscemur coordinatas

$$\begin{aligned} X &= fg(\lambda + \nu)z^{\lambda + \mu} + bk(\lambda - \nu)z^{\lambda - \mu}, \\ Y &= fb(\lambda + \mu)z^{\lambda + \nu} - gk(\lambda - \mu)z^{\lambda - \nu}, \end{aligned}$$

pro altera vero curua habebimus

$$\begin{aligned} x &= fg(\lambda + \nu)z^{\lambda + \mu} - bk(\lambda - \nu)z^{\lambda - \mu}, \\ y &= fb(\lambda + \mu)z^{\lambda + \nu} + gk(\lambda - \mu)z^{\lambda - \nu}. \end{aligned}$$

Pro vtraque autem curua erit elementum curuae

$$= \sqrt{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2}.$$

§. 4. Verum hic nobis imprimis est propositum in solutionem generalem inquirere, quae omnes plane speciales in se complectatur, ideoque conditioni inuentae $\partial r \partial s = \partial p \partial q$ generalissime erit satisfaciendum. Cum igitur hinc sit $\partial s = \frac{\partial p \partial q}{\partial r}$, eiusmodi functiones pro p , q , r , inuestigari oportet, vt ista formula differentialis $\frac{\partial p \partial q}{\partial r}$ integrationem admittat; vbi quidem, quoniam haec vnica conditio est adimplenda, facile intelligitur, ex ternis quantitibus p , q et r binas arbitrio nostro penitus relinqui. Quamobrem assumtis pro q et r functionibus quibuscunque algebraicis ipsius z , inde colligatur valor formulae $\frac{\partial q}{\partial r}$, qui ergo itidem erit functio algebraica ipsius z simulque cognita, quam indicemus littera u , ita vt sit $\frac{\partial q}{\partial r} = u$, atque adeo $\partial s = u \partial p$, cui igitur conditioni satisfieri oportet.

§. 5. Cum igitur hic u tanquam functio cognita ipsius z spectetur, totum negotium redit ad functionem p inuestigan-

figandam. Quare cum fit $s = f u \partial p$, per reductionem notissimam habebimus $s = p u - \int p \partial u$, ita ut formula differentialis $p \partial u$ integrabilis reddi debeat. Statuatur ergo $\int p \partial u = v$, existente v functione pariter algebraica ipsius z , unde ergo fiet $p = \frac{\partial v}{\partial u}$, hincque porro

$$s = p u - v = \frac{u \partial v}{\partial u} - v,$$

ficque vniuersi conditioni praescriptae erit satisfactum, atque adeo pro v functionem quamcunque algebraicam ipsius z pro arbitrio assumere licebit.

§. 6. Ecce ergo quaestionis nostrae propositae solutio generalissima sequenti modo adornari poterit: 1.) Pro litteris q et r sumantur pro lubitu functiones quaecunque algebraicae ipsius z , ex quibus deducatur quantitas $u = \frac{\partial q}{\partial r}$. 2.) Accipiaturs etiam pro v functio quaecunque algebraica ipsius z , ita ut adeo tres functiones ipsius z arbitrio nostro penitus permittantur. 3.) His igitur constitutis binae reliquae litterae p et s ita accipiantur, ut fit

$$p = \frac{\partial v}{\partial u} \text{ et } s = \frac{u \partial v}{\partial u} - v.$$

Quibus inuentis ambae curuae quaesitae ita determinabuntur, ut earum coordinatae orthogonales futurae sint

Pro curua A Y:

$$X = \frac{\partial v}{\partial u} + q$$

$$Y = r - \frac{u \partial v}{\partial u} + v$$

Pro curua a y:

$$x = \frac{\partial v}{\partial u} - q,$$

$$y = r + \frac{u \partial v}{\partial u} - v,$$

haecque ergo solutio ita est generalis, ut omnes plane casus possibiles in se complectatur.

§. 7. Cum igitur fit vtriusque curvae elementi quadratum $= \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2$, quoniam primo est $\partial q = u \partial r$, tum vero $s = pu - v$, ob $\partial v = p \partial u$ erit $\partial s = u \partial p$; vnde his valoribus substitutis obtinebitur elementum vtriusque curvae $= \sqrt{(1 + uu)} (\partial p^2 + \partial r^2)$.

§. 8. Cum igitur porro fit $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, erit pro priore curua AY formula $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial p + u \partial r}{\partial r - u \partial p}$, quae, ducta in curua AY normali YN, exprimit tangentem anguli ANY. Simili modo in altera ay, si pariter ducatur normalis yn, erit anguli any tangens $= \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial p - u \partial r}{\partial r + u \partial p}$. Quamobrem si introducamus binos angulos Φ et θ , ita vt sit tang. $\Phi = \frac{\partial p}{\partial r}$ et tang. $\theta = u$, euadet

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\text{tang. } \Phi + \text{tang. } \theta}{1 - \text{tang. } \Phi \text{ tang. } \theta} = \text{tang. } (\Phi + \theta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\text{tang. } \Phi - \text{tang. } \theta}{1 + \text{tang. } \Phi \text{ tang. } \theta} = \text{tang. } (\Phi - \theta).$$

Vnde manifestum est, angulos ANY et any, quibus vtriusque curvae amplitudo mensuratur, fore $\text{ANY} = \Phi + \theta$ et $\text{any} = \Phi - \theta$.

§. 9. Hinc igitur intelligitur, ambas nostras curuas communi amplitudine gaudere non posse, nisi fuerit angulus $\theta = 0$; tum autem foret $u = 0$, ideoque, ob $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, ambae quantitates q et s forent constantes, quae ergo ponantur $q = a$ et $s = b$, vnde propterea prodiret $X = p + a$ et $Y = r - b$, tum vero $x = p - a$ et $y = r + b$; sicque foret $x = X - 2a$ et $y = Y + 2b$, vnde manifestum est, ambas curuas profus fore easdem, verum coordinatas tantum ad alios axes referri.

§. 10. Cum igitur hoc problema felicissimo cum successu generaliter expediuerimus, si ternae functiones arbitrariae q , r et v ita definiiri possent, ut altera curua oriatur data, ueluti siue ellipsis siue hyperbola, tum simul inueniretur alia curua propositae aequalis. Verum talem methodum vix, ac ne vix quidem, sperare licet, quandoquidem problema generale curuam quamcunque datam in alias diuersas eiusdem longitudinis transformandi vires Analyseos superare videtur.

Alia Solutio quaestionis propositae.

§. 11. Cum tota solutio perducta sit ad hanc aequationem: $\partial p \partial q = \partial r \partial s$, siue $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, statuatur tam $\frac{\partial s}{\partial p} = z$ quam $\frac{\partial q}{\partial r} = z$, et quaecunque accipiatur aequatio algebraica inter p et s , qua littera s definiatur per certam functionem ipsius p , erit etiam $\frac{\partial s}{\partial p}$ certa functio ipsius p , qua ipsi z aequali posita quantitas p , ideoque et altera s , per z determinabitur. Simili modo sumpta inter q et r aequatione algebraica quacunque, ex qua q definiatur per certam functionem ipsius r , fiet etiam $\frac{\partial q}{\partial r}$ certa functio ipsius r , quae posita $= z$ dabit itidem tam r quam q per functiones ipsius z expressas. Inuentis autem his quatuor functionibus p , q , r , s , ambae curuae quaestitae ita determinabuntur per suas utraque coordinatas, ut fit.

$$X = p + q, \quad Y = r - s;$$

$$x = p - q, \quad y = r + s.$$

§. 12. Quoniam uero ista solutio postulat resolutionem aequationum omnis generis, siquidem generalis esse debeat, prior solutio huic sine dubio longe est anteferenda. Interim tamen etiam haec solutio usu non caret, dum nobis egregiam

constructionem geometricam binarum curvarum, quae quaeruntur, suppeditat, quae ita se habet.

CONSTRUCTIO GEOMETRICA

Curvarum quaesitarum.

Tab. I. §. 13. Super communi axe describantur binae curvae
Fig. 4. algebraicae quaecunque bs et cq , in quibus perpetuo capiantur bina puncta s et q , ubi tangentes st et $q\theta$ inter se fiant parallelae; tum ductis applicatis sp et qr habebuntur quatuor nostrae quantitates, scilicet $bp = p$, $ps = s$ et $cr = r$, $rq = q$. Quia enim $\frac{\partial s}{\partial p}$ exprimit tangentem anguli ad t et $\frac{\partial q}{\partial r}$ tangentem anguli ad θ , cum hi anguli sint aequales, erit utique $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, ideoque $\partial p \partial q = \partial r \partial s$, uti requiritur. Quamobrem ex his duabus curvis pro arbitrio assumtis binae curvae quaesitae hoc modo construentur:

Fig. 2 et 3.	Pro curva AY	Pro curva ay
	$AX = b \cdot p + r \cdot q$	$ax = bp - r \cdot q$
	$XY = cr - ps$	$xy = cr + ps$

quae constructio ob elegantiam utique notatu maxime est digna.

§. 14. Pro curva bs sumamus parabolam hac aequatione contentam: $ss = 2ap$; pro altera autem cq circulum aequatione $qq = 2ar - rr$ expressum; tum igitur erit

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{a}{\sqrt{2ap}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{a-r}{\sqrt{2ar-rr}};$$

quae duae quantitates inter se aequales esse debent: perinde enim est siue sibi immediate aequales statuatur, siue utraque ipsi z aequalis statuatur. Hoc modo omnia ad solam quantitatem r reuocare licebit; quandoquidem habebimus:

$$p = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2}, \quad q = \sqrt{(2ar-rr)} \quad \text{et} \quad s = \frac{a\sqrt{(2ar-rr)}}{a-r}.$$

Vnde

Vnde pro binis curuis has nanciscimur coordinatas:

Pro curua A Y		Pro curua ay
$X = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2} + \sqrt{(2ar-rr)}$		$x = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2} - \sqrt{(2ar-rr)}$
$Y = r - \frac{ay(2ar-rr)}{a-r}$		$y = r + \frac{ay(2ar-rr)}{a-r}$

Vbi quantitatem r tantum vsque ad $r = a$ augere licet, quia tum ambae curuae in infinitum excurrent.

SOLV-

Fig. 1.

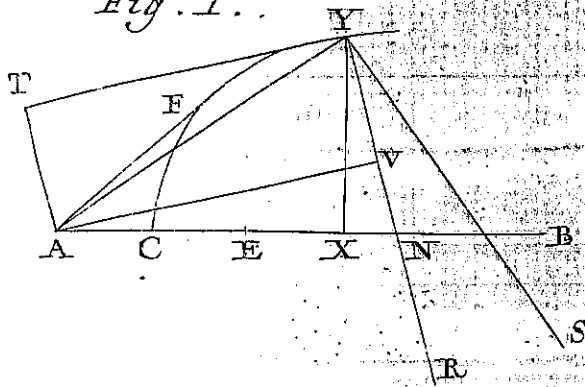


Fig. 2.

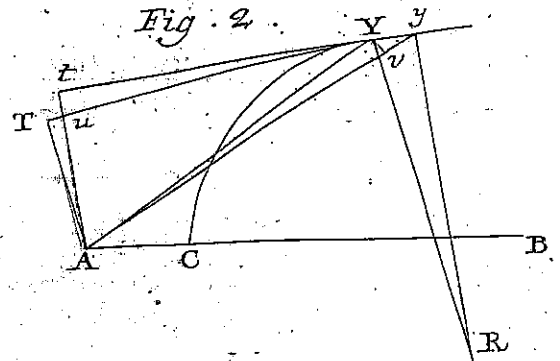


Fig. 3.

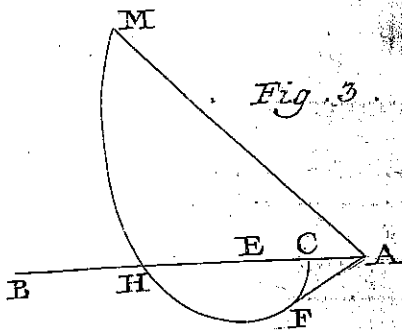


Fig. 4.

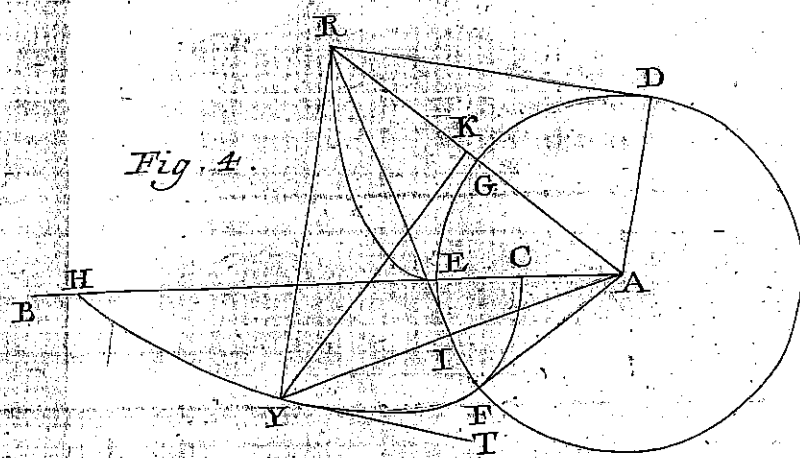


Fig. 5.

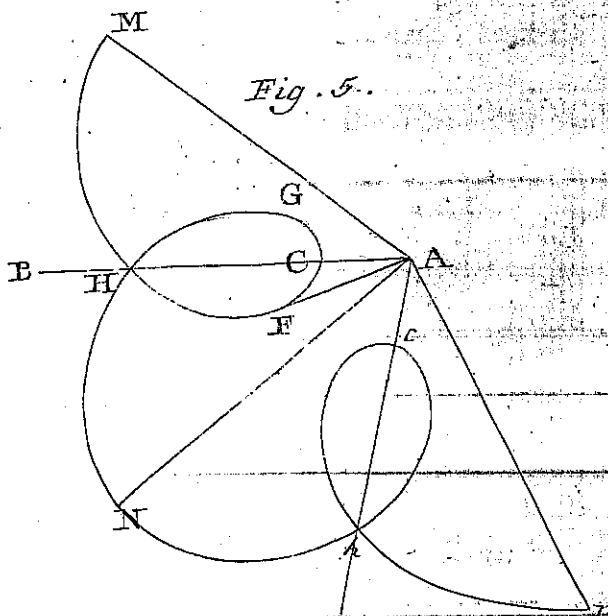


Fig. 6.

