DE MOTV OSCILLATORIO PENDVLI CIRCA AXEM CYLINDRICVM PLANO HORIZONTALI INCVMBENTEM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14 *Aug.* 1780.

§. 1.

Pendulum ſuperne traiectum concipiatur cylindro, qui vtroque termino plano horizontali incumbat, quod tantam frictionem opponat, vt nullus motus reptorius ſe admiſcere queat. Dum igitur tale pendulum oſcillationes peragit, cylindrus ſuper plano horizontali alternatim voluendo procedet et recedet, ſicque pendulum motu ſuo nullam aliam reſiſtentiam patietur praeter aërem. Quanquam autem talis motus iam ſaepius eſt tractatus, tamen hic praecipue in vires ſum inquiſiturus, quibus axis cylindricus planum horizontale inter oſcillandum premit, et quantam vim frictio exſerere debeat, vt motus reptorius penitus coërceatur.

§. 2. Sit igitur C centrum axis cylindrici, qui tempore quocunque, ab initio motus elapſo $= t$, plano horizontali QV in O incumbat, ita vt recta COP ſit verticalis. Nunc vero pendulum talem ſitum obliquum teneat, vt, ducta ex C ad Tab. V. Fig. 1.

ad eius centrum grauitatis G recta C G, angulus obliquitatis fit O C G $= \phi$. Ponamus porro radium axis cylindrici C O $= c$, distantiam centri grauitatis a puncto C, hoc est C G $= a$, massam seu pondus totius penduli $=$ M eiusque momentum inertiae respectu axis per G transeuntis et axi cylindri parallelli $=$ M kk. Hinc ergo ducta horizontali G P et verticali G Q erit G P $=$ sin. ϕ, C P $= a$ cos. ϕ et G Q $= a$ cos. $\phi - c$.

§. 3. Hoc igitur penduli statu erit arcus O A $= c\phi$, cui in recta horizontali Q V aequale capiatur interuallum O A $= c\phi$, eritque A punctum, vbi cylindrus initio motus, quo rectam C G verticalem fuisse assumemus, plano horizontali incumbebat, quod ergo punctum erit fixum, quippe a quo punctum O durante motu modo recedit modo accedit, atque adeo in contrariam partem excurrit, cui motui aequalis erit motus ipsius puncti C, quod in statu penduli verticali ipsi puncto A imminebit et durante motu oscillatorio ab hoc situ modo dextrorsum modo sinistrorsum recedit, quem ergo motum, vna cum proprio motu penduli, accurate determinari oportet, vt totius motus perfectam cognitionem acquiramus. Euidens autem est hoc modo istum motum nondum esse exploratum.

§. 4. Cum igitur non punctum O sed punctum A tanquam fixum spectari debeat, ad id situm puncti G referri conueniet per coordinatas A Q $= x$ et Q G $= y$, atque euidens est fore $x = a$ sin. $\phi - c\phi$ et $y = a$ cos. $\phi - c$, vnde differentiando erit $\partial x = a\,\partial\phi$ cos. $\phi - c\,\partial\phi$ et $\partial y = -a\,\partial\phi$ sin. ϕ, denuoque differentiando

$$\partial\partial x = a\,\partial\partial\phi \cos.\phi - a\,\partial\phi^2 \sin.\phi - c\,\partial\partial\phi \text{ et}$$
$$\partial\partial y = -a\,\partial\partial\phi \cos.\phi - a\,\partial\phi^2 \cos.\phi,$$

vbi sumto elemento temporis ∂t constante erit $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ celeritas angu-

angularis, qua pendulum a ſitu verticali recedit, et $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$ erit acceleratio huius motus angularis.

§. 5. His conſtitutis conſideremus vires, quibus pendulum hoc motu ſollicitatur. Ac primo quidem ob proprium pondus ſuſtinebit vim $= M$, cuius directio per ipſum centrum grauitatis G deorſum tendit. Deinde vero ob preſſionem axis cylindrici in planum horizontale QV vis aderit verticalis axem ſurſum ſecundum OC vrgens, quae vis, cum ſit adhuc incognita, ponatur $= \Pi$, in directione OC ſollicitans, haecque vis in ſtatu aequilibrii vtique aequaretur ponderi totius penduli, foretque $\Pi = M$; durante autem motu oſcillatorio mox videbimus, eam modo fore maiorem, modo minorem. Denique ne punctum O ſuper plano horizontali prorepat, neceſſe eſt vt in puncto O certa quadam vi horizontaliter vrgeatur, quae cum pariter ſit incognita, concipiamus eam in directione OC agere quantitate $= \Theta$, quae etiam erit variabilis atque ab ipſo motu penduli potiſſimum pendebit. Ad perfectam autem totius motus cognitionem plurimum intererit iſtas duas vires Π et Θ accurate inueſtigaſſe.

§. 6. Secundum praecepta igitur in Mechanica tradita primo inueſtigemus motum progreſſiuum centri grauitatis G, tum vero etiam motum gyratorium circa ipſum centrum gravitatis, quippe cui aequalis erit motus angularis circa punctum C. Motum autem progreſſiuum ſecundum binas directiones fixas coordinatarum x et y indagari oportet, vnde pro directione AQ, quia ſola vis Θ in ipſa hac directione agere aſſumitur, principia motus hanc ſuppeditant formulam: $\frac{\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = \frac{\Theta}{M}$, vbi g eſt altitudo lapſus grauium vno minuto ſecundo. Simili modo pro directione QG habetur primo vis promouens, ſeu ipſum pondus $= M$, praeterea vero vis reagens $= \Pi$, vnde prodit

 $\partial\partial y$

$\frac{\partial\partial y}{2g\partial t^2} = \frac{M - \Pi}{M} = 1 - \frac{\Pi}{M}$; pro hoc enim motu progressiuo definiendo omnes vires ipsi centro grauitatis G applicatae sunt concipiendae. Substitutis igitur loco $\partial\partial x$ et $\partial\partial y$ valoribus assignatis, per differentialia secundi gradus binae vires incognitae Π et Θ ita determinabuntur:

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{a\partial\partial\Phi \sin.\Phi + a\partial\Phi^2 \cos.\Phi}{2g\partial t^2},$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{a\partial\partial\Phi \cos.\Phi - a\partial\Phi^2 \sin.\Phi - c\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}.$$

§. 7. Nunc ad motum angularem determinandum momenta virium respectu centri grauitatis G capi oportet, vnde quia primae vis, seu ponderis M, directio per ipsum centrum grauitatis transit, eius momentum erit nullum. Secunda vis Π, in directione OC agens, momentum habebit Π. GP, quod ergo erit $\Pi\, a \sin.\Phi$, et quia huius vis actione angulus Φ minuetur, eius momentum negatiue sumi debet. Tertia vis Θ in directione OQ agens momentum dabit

$$\Theta . GQ = \Theta (a \cos.\Phi - c),$$

cuius actione pariter angulus Φ minuetur, ideoque negatiue accipi oportet. Quoniam igitur momentum virium per momentum inertiae diuisum praebet accelerationem angularem, inde orietur ista aequatio:

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = -\frac{\Pi\, a \sin.\Phi - \Theta (a \cos.\Phi - c)}{M k k},$$

hocque modo nacti sumus tres aequationes, ex quibus non solum ad quoduis tempus angulus Φ, sed etiam ambae vires incognitae Π et Θ definiri debebunt.

§. 8. Substituamus nunc loco $\frac{\Pi}{M}$ et $\frac{\Theta}{M}$ valores modo ante assignatos, et multiplicando per $2gkk\partial t^2$ resultabit sequens aequatio:

kk

$$kk\partial\partial\phi = -2ag\partial t^2 \text{ sin. } \phi - (aa+cc)\partial\partial\phi$$
$$+ 2ac\partial\partial\phi \text{ cos. } \phi - ac\partial\phi \text{ sin. } \phi,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial\partial\phi(kk+aa+cc-2ac \text{ cos. } \phi)$$
$$+ ac\partial\phi^2 \text{ sin. } \phi = -2ag\partial t^2 \text{ sin. } \phi,$$

haecque aequatio commode integrabilis redditur, si modo multiplicetur per $2\partial\phi$; tum enim integrale reperitur:

$$\partial\phi^2(kk+aa+cc-2ac \text{ cos. } \phi) = 4ag\partial t^2 \text{ cos. } \phi + C\partial t^2.$$

§. 9. Quia $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ exprimit celeritatem angularem, aequatio inuenta, per ∂t^2 diuisa, erit:

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial t^2}(kk+aa+cc-2ac \text{ cos. } \phi) = C + 4ag \text{ cos. } \phi,$$

vbi ad constantem rite determinandam consideretur maxima penduli excursio a situ verticali, quae fiat per angulum $= \zeta$, et cum in hoc situ celeritas prorsus euanescat, constans C erit ita definienda, vt posito $\phi = \zeta$ fiat $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, ex qua conditione constans ista per integrationem ingressa ita definietur, vt sit $C = -4ag \text{ cos. } \zeta$, sicque nostra aequatio motum penduli determinans erit

$$\partial\phi^2(kk+aa+cc-2ac \text{ cos. } \phi) = 4ag\partial t^2(\text{cos. } \phi - \text{cos. } \zeta),$$

ex qua aequatione ad quoduis tempus t status penduli definiri poterit. Cum enim radice extracta hinc prodeat

$$\partial t = \frac{\partial\phi\sqrt{(kk+aa+cc-2ac \text{ cos. } \phi)}}{2\sqrt{ag(\text{cos. } \phi - \text{cos. } \zeta)}},$$

determinatio totius motus perducta est ad integrationem istius formulae differentialis. Inuento autem eius integrali tempus statim in minutis secundis expressum reperitur, vnde si eius integrale a termino $\phi = 0$ vsque ad terminum $\phi = \zeta$ extendatur, habebitur tempus vnius semi-oscillationis penduli, cuius ergo duplum dabit tempus vnius oscillationis.

§. 10. Facile autem patet istud integrale in genere aliter exhiberi non posse, nisi praefixo signo integrationis: erit igitur tempus vnius dimidiae oscillationis

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ag}} \int \frac{\sqrt{(kk + aa + cc - 2ac\,\text{cos.}\,\Phi)}}{\sqrt{(\text{cos.}\,\Phi - \text{cos.}\,\zeta)}} \cdot \partial\Phi \begin{bmatrix} \text{a} & \Phi = 0 \\ \text{ad} & \Phi = \zeta \end{bmatrix}.$$

Verum si oscillationes fuerint valde paruae, istud tempus facile ad quadraturam circuli reuocatur, quem ergo casum hic accuratius euoluamus. Cum sit cos. $\Phi = 1 - 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$, similique modo cos. $\zeta = 1 - 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\zeta^2$, ponamus sin. $\frac{1}{2}\zeta = b$ et sin. $\frac{1}{2}\Phi = s$, vt sit cos. $\zeta = 1 - 2bb$ et cos. $\Phi = 1 - 2ss$, tum vero erit $\partial\Phi = \frac{2\partial s}{\sqrt{(1 - ss)}}$. Quod si iam breu. gr. statuamus $kk + (a - c)^2 = bb$ formula nostra induet hanc formam:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s \sqrt{(bb + 4acss)}}{\sqrt{(1 - ss)(bb - ss)}},$$

vbi notetur esse b quantitatem valde paruam, et tempus semi-oscillationis repertum iri, si integrale ab $s = 0$ vsque ad $s = b$ extendatur.

§. 11. Cum igitur b respectu vnitatis sit fractio valde exigua, et variabilis s fractionem b nunquam excedere queat, proxime erit

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - ss)}} = 1 + \tfrac{1}{2}ss \text{ et}$$

$$\sqrt{(bb + 4acss)} = b + \frac{2acss}{b},$$

ex his valoribus erit

$$t = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} \left(b + \frac{4ac + bb}{2b} ss\right),$$

sicque integrale constat ex duabus partibus, quarum posterior prae priore est quasi infinite parua ideoque ita repraesentari potest:

$$t = \frac{b}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} + \frac{4ac + bb}{2b\sqrt{2ag}} \int \frac{ss\,\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}},$$

vbi manifestum est esse $\int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} = \text{A sin.}\,\frac{s}{b}$, vnde, sumto

$s = b$

$s = b$, pro vna ſemi-oſcillatione erit $\int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} = \frac{\pi}{2}$. Praeterea facile patet eſſe

$$\int \frac{ss\,\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} = -\tfrac{1}{2} s \sqrt{(bb - ss)} + \tfrac{1}{2} bb \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}}.$$

Hinc ergo ſumto $s = b$ erit iſtud integrale $= \frac{\pi bb}{4}$, quocirca tempus vnius dimidiae oſcillationis erit

$$t = \frac{b\pi}{2\sqrt{2ag}} + \frac{\pi b, b(4ac + bb)}{8b\sqrt{2ag}},$$

ideoque tempus integrae oſcillationis

$$= \frac{\pi b}{\sqrt{2ag}} + \frac{\pi bb(4ac + bb)}{4b\sqrt{2ag}}.$$

Vnde patet, quo maiores fuerint penduli excurſiones, tempora oſcillationum eo maiora incrementa accipere.

§. 12. Quodſi ponamus axem cylindricum infinite eſſe gracilem, ita vt ſit $c = 0$, durante motu oſcillatorio punctum C immotum manebit, et habebitur caſus penduli vulgaris; tum igitur erit $bb = kk + aa$ et tempus vnius oſcillationis fiet $\frac{\pi\sqrt{(kk + aa)}}{\sqrt{2ag}} + \frac{\pi bb\sqrt{(kk + aa)}}{4\sqrt{2ag}}$. Quodſi praeterea fuerit $kk = 0$, ſiue corpus oſcillans infinite paruum, habebitur caſus penduli ſimplicis, longitudinis $CG = a$, pro quo ergo tempus oſcillationis erit $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{\pi bb\sqrt{a}}{4\sqrt{2g}}$, vnde viciſſim tempora omnium oſcillationum ad pendulum ſimplex reduci poterunt, ſiue ſemper hinc longitudo penduli ſimplicis aſſignari poterit, quod eodem tempore oſcillationes ſuas peragat.

Inueſtigatio virium Π & Θ.

§. 13. Valores harum virium iam ſupra per differentialia ſecundi gradus expreſſos dedimus:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2g\,\partial t^2 + a\,\partial\partial\Phi \sin.\Phi + a\,\partial\Phi^2 \cos.\Phi}{2g\,\partial t^2},$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{a\,\partial\partial\Phi \cos.\Phi - a\,\partial\Phi^2 \sin.\Phi - c\,\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2},$$

vnde tantum opus eſt, vt iſta differentialia ad quantitates finitas

tas reuocentur. Iam vero ex integratione generali §. 9. colligitur fore

$$\frac{\partial \Phi^2}{2g\,\partial t^2} = \frac{2a(\cos.\Phi - \cos.\zeta)}{kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi};$$

ex aequatione autem differentiali secundi gradus supra inuenta fiet

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-ac\,\partial\Phi^2 \sin.\Phi}{2g\,\partial t^2\,(kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi)} - \frac{a\sin.\Phi}{kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi},$$

vnde per meras quantitates finitas erit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-2aac\sin.\Phi(\cos.\Phi - \cos.\zeta)}{(kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi)^2} - \frac{a\sin.\Phi}{kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi},$$

siue

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-(kk + aa + cc - 2ac\cos.\zeta)\,a\sin.\Phi}{(kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi)^2},$$

quae expressiones cum sint satis complicatae, ponamus br. gr. $\frac{\partial\Phi^2}{2g\,\partial t^2} = R$ et $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = -S$. Ita vt sit

$$R = \frac{2a(\cos.\Phi - \cos.\zeta)}{kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi} \text{ et}$$

$$S = \frac{a(kk + aa + cc - 2ac\cos.\zeta)\sin.\Phi}{(kk + aa + cc - 2ac\cos.\Phi)}.$$

§. 14. His ergo valoribus substitutis erit per meras quantitates finitas.

$$\frac{\Pi}{M} = 1 - aS\sin.\Phi + aR\cos.\Phi,$$

$$\frac{\Theta}{M} = S(c - a\cos.\Phi) - aR\sin.\Phi,$$

vnde patet durante motu oscillatorio has vires continuo variari. Hinc ergo primo quaeramus istas vires pro situ penduli verticali, vbi $\Phi = 0$, ac reperietur fore $\frac{\Pi}{M} = 1 + aR$ et $\frac{\Theta}{M} = (c - a)S$. Hoc autem casu fit $R = \frac{2a(1 - \cos.\zeta)}{kk + (a - c)^2}$ et $S = 0$, consequenter pro situ verticali erit

$$\frac{\Pi}{M} = 1 = \frac{2aa(1 - \cos.\zeta)}{kk + (a - c)^2},$$

$$\frac{\Theta}{M} = 0;$$

vnde patet hoc situ pressionem esse maiorem quam pondus.

§. 15.

§. 15. At vero pro excurſionibus maximis, vbi $\Phi = \zeta$, habebimus $R = 0$ et

$$S = \frac{a \sin. \zeta}{kk + aa + cc - 2ac \cos. \zeta}$$

hincque pro hoc ſtatu reperitur $\frac{\Pi}{M} = 1$, ſiue preſſio ipſi ponderi exacte eſt aequalis. Deinde erit

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{-a(a-c) \sin. \zeta}{kk + aa + cc - 2ac \cos. \zeta},$$

vnde patet iſtam vim non in plagam O A, vti ſinximus, ſed in plagam contrariam A V eſſe directam, cui ergo coërcendae frictio ſuper plano horizontali maior eſſe debet. Ceterum ex noſtris formulis haud difficile erit pro quouis penduli ſtatu medio ambas vires Π et Θ aſſignare, quae autem ſecundum nullam legem ſimplicem repraeſentari poſſunt.

Fig. 1.

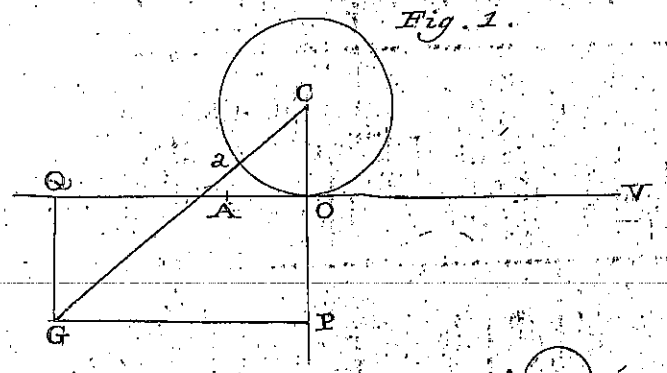

Fig. 3.

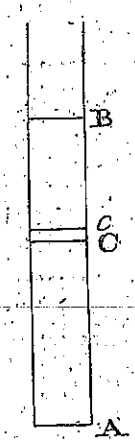

Fig. 2.

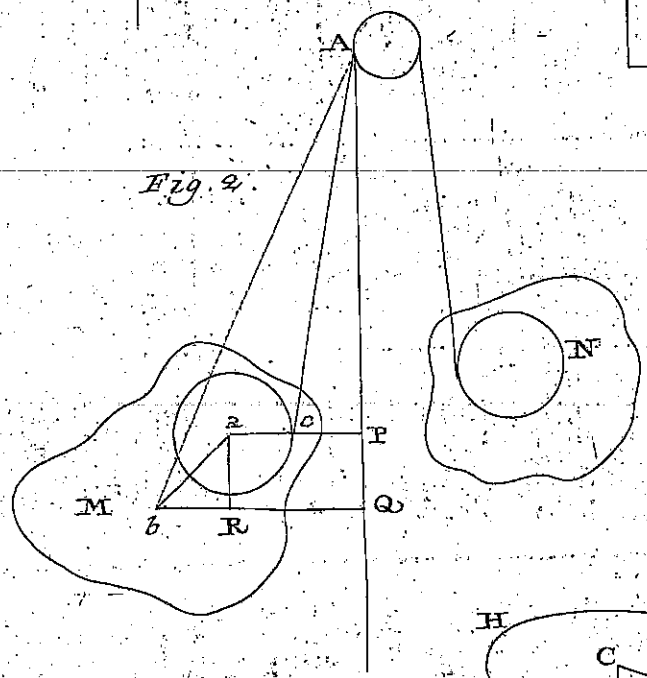

Fig. 4.

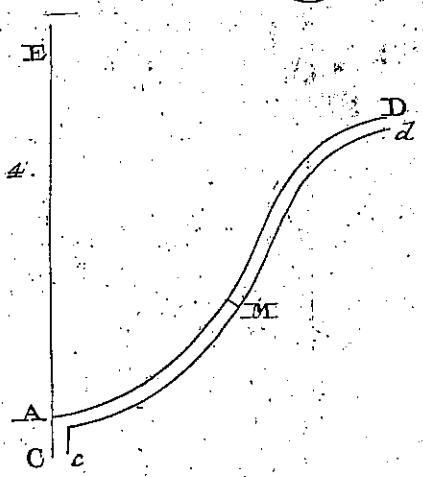

Fig. 5.