
DE
FORMVLIS DIFFERENTIALIBVS,
QVAE PER DVAS PLVRESVE QVANTITATES DA-
TAS MVLTIPlicATAE FIANt INTEGRABILES.

Auctore
L. E V L E R.

Conuent. exhib. die 1 Iul. 1776.

§. 1.

Iam saepius eiusmodi quaestiones tractavi, quibus curvae algebraicae requiruntur, quarum longitudo per datam formulam integram exprimitur. Ita nuper (*) infinitas curvas algebraicas mihi quidem assignare licuit, quarum longitudo siue per arcus Parabolicos, siue Ellipticos, mensurari queat; tum vero etiam plures alias formulas, quibus longitudo curvae exprimitur, satis felici successu sum perscrutatus (**). Interim tamen ex his omnibus concludi debet, eam Analyseos partem, ad quam huiusmodi quaestiones sunt referendae, minime adhuc esse satis excultam, atque adeo etiam nunc quasi prima principia latere, unde huiusmodi quaestionum solutionem peti oporteat. Plurimum igitur ad fines Analyseos promovendos conferre putandum est, si hoc argumentum Geometrae omni cura ulterius prosequi dignabuntur.

A 2

§. 2.

(*) C. Nov. Act. Acad. Tom. V. pro Anno 1787.

(**) C. Nov. Act. Acad. Tom. VI. pro Anno 1788.

§. 2. Quando autem quaestio proponitur de curvis Algebraicis inueniendis, quarum elementum indefinitum formula differentiali quadam praescripta ∂s exprimat, totum negotium eo reducitur, ut angulus quispiam Φ inuestigetur, ex quo hae duae formulae differentiales $\partial s \sin. \Phi$ et $\partial s \cos. \Phi$ integrabiles euadant. Quae inuestigatio cum in genere ne suscipi quidem queat, quaestionem inuersam accuratius tractasse iuuabit, quae omnes eae formulae differentiales exquiruntur, quae tam per $\sin. \Phi$ quam per $\cos. \Phi$ multiplicatae reddantur integrabiles, cuius resolutio cum nulla amplius laboret difficultate, eam in latiori sensu acceptam euoluamus, quo loco formularum $\sin. \Phi$ et $\cos. \Phi$ aliae quantitates quaecunque proponuntur. Quin etiam istam quaestionem ad tres pluresue huiusmodi quantitates extendamus. Quanquam autem methodum huiusmodi problemata soluendi iam ante complures annos adumbraui, quae noua quaedam pars Analyseos Infinitorum, quam *indeterminatam* appellare liceat, constitui est censenda, tamen quoniam hoc argumentum tum nimis generaliter est tractatum, nunc operae pretium erit id maiori cura propius ad praesens institutum accommodare.

Problema I.

Inuestigare omnes formulas differentiales, quae per datas duas quantitates propositas multiplicatae reddantur integrabiles.

Solutio.

§. 3. Designemus formulam differentialem quaesitam caractere ∂W , sintque p et q bini illi multiplicatores dati, quibus haec formula integrabilis reddi debeat; ita ut hae duae formulae integrales: $\int p \partial W$ et $\int q \partial W$ euadant quantitates algebraicae. Denotent igitur P et Q istas quantitates algebraicas, ut sit $\int p \partial W = P$ et $\int q \partial W = Q$, atque hinc duplici

mo-

modo
quaes
inuest
tione

imple
P et
quan
p q f
quae
q, d
ad q
facto
ipfas
et P
Cur
=q:1

instit
Q P
tame
vae

hinc

frac
ex
cui
aut

modo sponte elicitur $\partial W = \frac{\partial P}{p}$ et $\partial W = \frac{\partial Q}{q}$. Nunc igitur quaestio perducta est ad duas quantitates algebraicas P et Q inuestigandas, quarum differentialia inter se teneant datam rationem vt $p:q$, siue vt sit $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$.

§. 4. Ista quidem conditio certo respectu facillime adimpleri potest, ita vt adeo ratio quaecunque inter quantitates P et Q statui possit. Namque si curua aq ita referat binas quantitates datas p et q , vt sumta abscissa $ap = p$, applicata pq fiat $= q$, super eodem axe construatur pro lubitu curua quaecunque AQ , ac sumto in priori curua puncto quocunque q , ductaque chorda aq , in altera curua capiatur punctum Q , ad quod ducta tangens QT illi cordae aq fiat parallela; quo facto coordinatae huius alterius curuae AP et PQ exhibebunt ipsas quantitates quaesitas P et Q. Si enim ponamus $AP = P$ et $PQ = Q$, in triangulo PQT utique erit $PQ:PT = \partial Q:\partial P$. Cum igitur hoc triangulum simile sit triangulo pqa , erit $\partial Q:\partial P = q:p$, quae est ipsa proportio requisita.

Tab. I.
Fig. I.

§. 5. Verum haec constructio, licet facilis ac plana, ad institutum nostrum parum confert; propterea quod inuentio puncti Q postulat resolutionem aequationum cuiusque ordinis, quae tamen neutiquam est in nostra potestate. Nam si natura curvae AQ hac tantum aequatione exprimatur:

$$Q = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^5$$

hinc fiet

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \alpha + 2\beta P + 5\gamma P^4$$

fractioni $\frac{q}{p}$ aequalis statuenda, ita vt quantitas P erui debeat ex hac aequatione ordinis quinti: $\alpha + 2\beta P + 5\gamma P^4 = \frac{q}{p}$, cuius resolutio utique vires Algebrae superat. Multo maiorem autem difficultatem offendemus, si aequatio inter P et Q ma-

gis fuerit complicata, in eaque etiam altiores potestates ipsius Q occurrant; quamobrem ad inueniendas quantitates P et Q longe alia via nobis est incunda.

§. 6. Cum igitur haec aequatio resoluenda proponatur $\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{q}{p}$; vbi quantitates p et q vt datae spectantur: ponamus breuitatis gratia $\frac{q}{p} = t$, vt esse debeat $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, ideoque $\partial Q = t \partial P$, quae formula cum integrabilis esse debeat, ob $Q = \int t \partial P$ per reductiones notissimas habebimus $Q = tP - \int P \partial t$, ita vt tantum formula $\int P \partial t$ integrabilis sit reddenda, id quod facillime praestatur, ponendo $\int P \partial t = T$. Hinc enim fiet $P = \frac{\partial T}{\partial t}$, vnde, quaecunq; functio algebraica ipsius t pro T accipitur, semper idoneum valorem pro quantitate P adipiscimur, scilicet $P = \frac{\partial T}{\partial t}$; ex quo porro elicimus $Q = t \frac{\partial T}{\partial t} - T$, sicque plene satisfactum erit conditioni requisitae: $\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{q}{p} = t$. Sumto enim elemento ∂t constanti, erit

$$\partial P = \frac{\partial \partial T}{\partial t} \text{ et } \partial Q = \partial T + \frac{t \partial \partial T}{\partial t} - \partial T = \frac{t \partial \partial T}{\partial t}$$

vnde manifesto prodit $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, vti requiritur. Eadem autem aequalitas prodisset, etiamsi elementum ∂t non fuisset constanti assumptum; tum enim prodisset

$$\partial P = \frac{\partial t \partial \partial T - \partial T \partial \partial t}{\partial t^2} \text{ et}$$

$$\partial Q = \frac{\partial t^2 \partial T + t \partial t \partial \partial T - t \partial T \partial \partial t}{\partial t^2} - \partial T = \frac{t \partial t \partial \partial T - t \partial T \partial \partial t}{\partial t^2}$$

vnde iterum colligitur $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, vt ante.

§. 7. Inuentis autem duabus quantitatibus P et Q ipsa formula differentialis quaesita ∂W duplici modo expressa habetur, scilicet vel $\partial W = \frac{\partial P}{p}$ vel $\partial W = \frac{\partial Q}{q}$, quae autem necessario ad eandem expressionem deducere debent; ex vtraque enim colligitur fore $\partial W = \frac{\partial t \partial \partial T - \partial T \partial \partial t}{p \partial t^2}$. Cum autem hic sit

==== (7) =====

fit $t = \frac{q}{p}$, erit $\partial t = \frac{p \partial q - q \partial p}{p^2}$; vnde cum fit

$$P = \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ erit } P = \frac{p \partial T}{p \partial q - q \partial p},$$

vnde reperimus

$$\partial P = \frac{p \partial \partial T}{p \partial q - q \partial p} + \frac{2 p \partial p \partial T}{p \partial q - q \partial p} - \frac{p \partial T (p \partial \partial q - q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2}$$

hincque denique ipsa formula differentialis quaesita erit

$$\partial W = \frac{p \partial \partial T}{p \partial q - q \partial p} + \frac{2 p \partial p \partial T}{p \partial q - q \partial p} - \frac{p \partial T (p \partial \partial q - q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2}$$

tum autem necessario fiet, vti constituimus

$$\int p \partial W = P = \frac{p \partial T}{p \partial q - q \partial p} \text{ et}$$

$$\int q \partial W = Q = \frac{p q \partial T}{p \partial q - q \partial p} - T.$$

Alia Solutio.

§. 8. Quoniam ambo multiplicatores praescripti q et p aequaliter in computum ingredi debebant, quod tamen in solutione inuenta longe secus euenit, vbi altera harum quantitarum p longe alia ratione inest atque altera q , operae pretium erit eiusmodi solutionem tradere, in quam ambae quantitates p et q pari ratione ingrediuntur, ita vt, facta earum permutatione, formula pro ∂W inuenta nullam alterationem patiatur, quandoquidem haec circumstantia ad elegantiam solutionis pertinere est censenda, licet solutio ante inuenta in se spectata quaestioni pariter perfecte satisfaciat.

§. 9. Maneant igitur in praecedente solutione omnia eadem vsque ad introductionem litterae T ; et quoniam peruenimus ad hanc aequationem: $Q = t P - \int P \partial t$, vbi ob $t = \frac{q}{p}$ est $\partial t = \frac{p \partial q - q \partial p}{p^2}$, quae formula denominatorem habet p^2 , statuamus $\int P \partial t = \frac{v}{p}$, vt differentiando prodeat

$$\frac{p(p \partial q - q \partial p)}{p^2} = \frac{p \partial v - v \partial p}{p^2}$$

sicque

ficque obtinebimus

$$P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p},$$

ex quo valore porro deducimus

$$Q = \frac{q}{p} \cdot \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} - \frac{v}{p},$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p}$$

quae alteri P perfecte est analogae, dum valor ipsius Q ex P sponte prodit permutatione litterarum p et q, solo signo excepto.

§. 10. Cum igitur inuenerimus $P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p}$, per differentiationem nanciscimur

$$\partial P = \frac{(p \partial q - q \partial p)(p \partial \partial v - v \partial \partial p) - (p \partial v - v \partial p)(p \partial \partial q - q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2}$$

quae expressio, facta evolutione, reducitur ad hanc:

$$\partial P = \frac{p \partial \partial v (p \partial q - q \partial p) - p \partial v (p \partial \partial q - q \partial \partial p) + p v (\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2}$$

Hinc igitur formula differentialis quaesita ∂W ita exprimetur, ut fit

$$\partial W = \frac{\partial \partial v (p \partial q - q \partial p) - \partial v (p \partial \partial q - q \partial \partial p) + v (\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2};$$

vbi ambae quantitates p et q manifesto sunt permutabiles, si quidem mutatio signorum nullum discrimen afferre est censenda.

§. 11. Ista solutio non solum antecedentem supereminet insigni elegantia, sed etiam pariter est maxime generalis, quandoquidem quantitas v arbitrio nostro penitus relinquitur, ideoque eius loco omnes plane functiones ipsarum p et q accipi possunt. At vero ista expressio condiciones praescriptas ita adimplet, ut inde fiat —

$$\int p \partial W = P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} \text{ et}$$

$$\int q \partial W = Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p}.$$

Quae

Q
v

fig
qu
tal
f
fo
ter

du
rer
op
ma

run
nen
 $\frac{\partial P}{\partial Q}$

vbi

per
plic
A

Quae ambae expressiones utique sunt algebraicae, dummodo pro v functiones algebraicae ipsarum p et q accipiantur.

§. 12. Isti valores integrales nobis insuper duas insignes proprietates formulae differentialis inuentae declarant, quae in eo consistunt, ut ista formula ad nihilum redigatur, tam posito $v = p$ quam $v = q$. Cum enim formula integralis $\int p \partial W$ manifesto euanescat posito $v = p$, necesse est ut etiam formula differentialis eodem casu euanescat; quod idem de altera formula integrali est tenendum, quae casu $v = q$ euanescit.

Corollarium.

§. 13. Quoniam solutio huius problematis eo est perducta, ut binae quantitates P et Q investigentur, quarum differentia ∂P et ∂Q datam inter se teneant rationem, ut $p : q$, operae pretium erit posteriorem solutionem sub forma theorematís memoriae imprimi.

Theorema.

§. 14. Si duae quantitates P et Q desiderentur, quarum differentia ∂P et ∂Q eandem inter se teneant rationem quam duae quantitates datae p et q , ita ut esse debeat $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$, huic requisito generalissime satisfiet, sumendo

$$P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} \text{ et } Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p}$$

vbi quantitas v penitus arbitrio nostro est relicta.

Exemplum I.

§. 15. Inuenire formulam differentialem ∂W , quae tam per sinum quam per cosinum cuiuspiam anguli variabilis Φ multiplicata euadat integrabilis.

Hic ergo erit $p = \sin. \Phi$ et $q = \cos. \Phi$, hincque differentiando (vbi quidem elementum $\partial \Phi$ constans assumamus) prodibit

$$\partial p = \partial \Phi \cos. \Phi \text{ et } \partial q = -\partial \Phi \sin. \Phi$$

porroque

$$\partial \partial p = -\partial \Phi^2 \sin. \Phi \text{ et } \partial \partial q = -\partial \Phi^2 \cos. \Phi$$

vnde formulae, quae in expressionem ipsius ∂W ingrediuntur, sequentes valores fortientur :

$$\text{I. } p \partial q - q \partial p = -\partial \Phi,$$

$$\text{II. } p \partial \partial q - q \partial \partial p = 0,$$

$$\text{III. } \partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = -\partial \Phi^3,$$

ex quibus valoribus ergo concluditur formula differentialis quaesita

$$\partial W = -\frac{\partial \partial v}{\partial \Phi} - v \partial \Phi.$$

§. 16. Quod haec formula prodiit negatiua, negotium nullo modo turbat, ac tuto statuere poterimus

$$\partial W = v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$$

sumto scilicet elemento $\partial \Phi$ constante; tum autem pariter, mutatis signis, erit

$$\int \partial W \sin. \Phi = \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} - v \cos. \Phi \text{ et}$$

$$\int \partial W \cos. \Phi = \frac{\partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + v \sin. \Phi.$$

Tum vero etiam euidentis est ipsam formulam ∂W euanescere, tam casu $v = \sin. \Phi$ quam casu $v = \cos. \Phi$.

§. 17. Quodsi ergo formula ∂W exprimat elementum cuiuspiam lineae curuae ∂s , vt fit $\partial s = v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi}$, quaecunque functio algebraica fuerit v , semper curua algebraica exhiberi poterit. Constitutis enim coordinatis orthogonalibus x et y ,

(11)

si sumatur $\partial x = \partial s \cos. \Phi$ et $\partial y = \partial s \sin. \Phi$, ut fiat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, quia ambae hae formulae sunt integrabiles, coordinatae curvae quaesitae erunt

$$x = \frac{\partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + v \sin. \Phi \quad \text{et} \quad y = \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} - v \cos. \Phi,$$

vbi notasse iuuabit fore $xx + yy = \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2} + vv$. Praeterea vero si formula $\int v \partial \Phi$ integrationem admittat, tum curua ipsa erit rectificabilis; fiet enim $s = \int v \partial \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion.

§. 18. Quo insignis vsus huius tractationis vberius ob oculos ponatur, tam huic exemplo, quam sequentibus, cuique problema speciale adiungamus, in quo integratio cuiuspiam aequationis differentialis secundi gradus perficiatur; quod saepissime egregium vsum habere poterit.

Problema speciale 1.

§. 19. Si Φ denotet functionem quamcunque ipsius Φ , resolueret istam aequationem differentialem secundi gradus:

$$v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi} = \Phi \partial \Phi$$

in qua elementum $\partial \Phi$ constans est assumtum, siue per integrationem inuenire valorem ipsius v .

Quia iam inuenimus huius aequationis membrum sinistrum integrabile fieri duobus casibus, dum vel per $\sin. \Phi$ vel $\cos. \Phi$ multiplicatur, membrum autem dextrum iam est functio ipsius Φ tantum; eius integratio nulla laborat difficultate. Primo enim haec aequatio in $\sin. \Phi$ ducta et integrata dabit

$$\frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} - v \cos. \Phi = \int \Phi \partial \Phi \sin. \Phi;$$

at vero multiplicatio per $\cos. \Phi$ praebebit

$$\frac{\partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + v \sin. \Phi = \int \Phi \partial \Phi \cos. \Phi.$$

§. 20. Cum igitur iam geminam habeamus aequationem primi gradus, sine vlla ulteriori integratione valorem quantitatis v elicere poterimus: prior enim in $\text{cos. } \Phi$ ducta et a posteriori in $\text{sin. } \Phi$ ducta ablata perducet ad hanc aequationem:

$$v = \text{sin. } \Phi \int \Phi \partial \Phi \text{ cos. } \Phi - \text{cos. } \Phi \int \Phi \partial \Phi \text{ sin. } \Phi,$$

quod integrale vtiq; est completum, propterea quod, ob binas formulas integrales, geminam constantem arbitrariam inuoluit.

§. 21. Quoniam per reductiones notissimas est
 $\int \Phi \partial \Phi \text{ sin. } \Phi = -\Phi \text{ cos. } \Phi + \int \partial \Phi \text{ cos. } \Phi$ et
 $\int \Phi \partial \Phi \text{ cos. } \Phi = \Phi \text{ sin. } \Phi - \int \partial \Phi \text{ sin. } \Phi,$

si hi valores substituantur, valor ipsius v etiam hoc modo exprimi poterit:

$$v = \Phi - \text{sin. } \Phi \int \partial \Phi \text{ sin. } \Phi - \text{cos. } \Phi \int \partial \Phi \text{ cos. } \Phi.$$

Exemplum 2.

§. 22. Inuenire formulam differentialem ∂W , quae tam per tangentem, quam secantem cuiuspiam anguli variabilis Φ multiplicata euadat integrabilis.

Hic igitur esto $p = \text{tang. } \Phi$ et $q = \text{sec. } \Phi$, unde sequitur

$$\partial p = \frac{\partial \Phi}{\text{cos. } \Phi^2} \text{ et } \partial q = \frac{\partial \Phi \text{ sin. } \Phi}{\text{cos. } \Phi^2},$$

porro vero

$$\partial \partial p = \frac{2 \partial \Phi^2 \text{ sin. } \Phi}{\text{cos. } \Phi^3} \text{ et } \partial \partial q = \frac{\partial \Phi^2}{\text{cos. } \Phi} + \frac{2 \partial \Phi^2 \text{ sin. } \Phi^2}{\text{cos. } \Phi^3}, \text{ siue}$$

$$\partial \partial q = \frac{2 \partial \Phi^2}{\text{cos. } \Phi^3} - \frac{\partial \Phi^2}{\text{cos. } \Phi}.$$

Hinc igitur colliguntur sequentes aequationes:

I. $p \partial q - q \partial p = -\frac{\partial \Phi}{\text{cos. } \Phi}.$

II. $p \partial \partial q - q \partial \partial p = -\frac{\partial \Phi^2}{\text{cos. } \Phi} \text{ tang. } \Phi = -\frac{\partial \Phi^2 \text{ sin. } \Phi}{\text{cos. } \Phi^2}.$

III. $\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = \frac{\partial \Phi^3}{\text{cos. } \Phi^3}.$

Ex

Ex quibus ergo valoribus concluditur formula differentialis quaesita

$$\partial W = -\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}.$$

§. 23. Ternos autem illos valores facilius hoc modo reperire licet. Primo enim cum fit $\frac{q}{p} = \frac{1}{\sin. \Phi}$, erit differentiando

$$\frac{p \partial q - q \partial p}{p^2} = -\frac{\partial \Phi \cos. \Phi}{\sin. \Phi^2},$$

vnde per $p^2 = \frac{\sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^2}$ multiplicando oritur

$$p \partial q - q \partial p = -\frac{\partial \Phi}{\cos. \Phi},$$

quae denuo differentiatata dat

$$p \partial \partial q - q \partial \partial p = -\frac{\partial \Phi^2 \sin. \Phi}{\cos. \Phi^2}.$$

Deinde cum fit $\frac{\partial q}{\partial p} = \sin. \Phi$, erit differentiando

$$\frac{\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p}{\partial p^2} = \partial \Phi \cos. \Phi,$$

quae per $\partial p^2 = \frac{\partial \Phi^2}{\cos. \Phi^2}$ multiplicata dat

$$\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = \frac{\partial \Phi^3}{\cos. \Phi^2}.$$

Cum igitur sit

$$\partial W = -\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}, \text{ erit}$$

$$f p \partial W = P = \frac{v}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} \text{ et}$$

$$f q \partial W = Q = \frac{v \sin. \Phi}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi}.$$

Problema speciale 2.

§. 24. Denotante Φ functionem quamcunque anguli Φ , resolvere istam aequationem secundi gradus:

$$-\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi} = \Phi \partial \Phi.$$

Hic primo per tang. Φ multiplicando et integrando obtinetur haec aequatio primi gradus:

$$\frac{v}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} = \int \Phi \partial \Phi \text{ tang. } \Phi;$$

at vero per sec. Φ multiplicando et integrando prodit

$$\frac{v \sin. \Phi}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi} = \int \Phi \partial \Phi \sec. \Phi.$$

Haec posterior ducta in sin. Φ et a priori subtracta dat

$$v \cos. \Phi = \int \Phi \partial \Phi \tan. \Phi - \sin. \Phi \int \Phi \partial \Phi \sec. \Phi$$

ideoque

$$v = \sec. \Phi \int \Phi \partial \Phi \tan. \Phi - \tan. \Phi \int \Phi \partial \Phi \sec. \Phi$$

quae est integratio completa aequationis propositae.

§. 25. Denique hic annotasse iuuabit, si Φ denotet angulum, quem curuae cuiuspiam elementum ∂s cum elemento abscissae ∂x constituit, atque ∂W exprimat ipsum elementum abscissae ∂x , tum fore elementum applicatae $\partial y = \partial x \tan. \Phi = p \partial W$, elementum vero curuae $\partial s = \partial x \sec. \Phi = q \partial W$, unde ergo habebitur ipsa applicata

$$y = \frac{v}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi},$$

atque ipsa curuae longitudo erit

$$s = \frac{v \sin. \Phi}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi}.$$

Cum igitur sit

$$\partial x = - \frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi},$$

si modo haec formula etiam integrationem admittat, tum prodibit curua algebraica, simulque rectificabilis. Jam vero integrando, qua fieri licet, prodit

$$x = - \frac{\partial v}{\cos. \Phi} \cos. \Phi - \int \partial v \sin. \Phi + \int \partial v \sin. \Phi + \int \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi} = - \frac{\partial v \cos. \Phi}{\cos. \Phi} + \int \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}$$

Quam ob rem necesse est vt formula $\int \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}$ integrationem admittat, veluti euenit, si sumatur $v = \cos. \Phi^2$, tum enim erit

$$\int \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi} = \sin. \Phi, \text{ atque ob}$$

$$\partial v = - 2 \partial \Phi \sin. \Phi \cos. \Phi$$

prodibit

$$x = 2 \sin. \Phi \cos. \Phi^2 + \sin. \Phi = \sin. \Phi (1 + 2 \cos. \Phi^2)$$

tum vero erit

$$y = \cos. \Phi (1 + 2 \sin. \Phi^2)$$

et arcus curvae

$$s = 3 \sin. \Phi \cos. \Phi.$$

Exemplum 3.

§. 26. Inuenire formulam differentialem ∂W , quae siue multiplicata siue diuisa per datam quantitatem t euadat integrabilis.

Hic ergo hae duae formulae $t \partial W$ et $\frac{\partial W}{t}$ reddi debent integrabiles. Pro hoc igitur exemplo erit $p = t$ et $q = \frac{1}{t}$, unde fit $\partial p = \partial t$ et $\partial q = -\frac{\partial t}{t^2}$. Cum ergo fit $\frac{q}{p} = \frac{1}{t^2}$, erit

$$\frac{p \partial q - q \partial p}{p^2} = -\frac{2 \partial t}{t^3},$$

unde per $p p = t t$ multiplicando fit

$$p \partial q - q \partial p = -\frac{2 \partial t}{t};$$

quae formula porro differentiata, fumendo ∂t constans, praebet:

$$p \partial \partial q - q \partial \partial p = +\frac{2 \partial t^2}{t^2}.$$

Deinde quia est $\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{1}{t^2}$, fiet

$$\frac{\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p}{\partial p^2} = \frac{2 \partial t}{t^3},$$

quae aequatio per ∂p^2 multiplicata praebet

$$\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = \frac{2 \partial t^3}{t^3},$$

ex quibus valoribus colligitur formula quaesita:

$$\partial W = -\frac{t \partial \partial v}{2 \partial t} - \frac{1}{2} \partial v + \frac{v \partial t}{2 t}$$

siue hunc valorem duplicando et signa mutando statui potest:

$$\partial W = \frac{t \partial \partial v}{2 t} + \partial v - \frac{v \partial t}{t}.$$

§. 27. Multiplicemus igitur hanc formam per t vt fiat

$t \partial$

$$t \partial W = \frac{t t \partial \partial v}{\partial t} + t \partial v - v \partial t,$$

vbi primi membri integratio dat

$$\int t \partial W = \frac{t t \partial v}{\partial t} - \int (t \partial v + v \partial t)$$

ficque prodit

$$\int t \partial W = \frac{t t \partial v}{\partial t} - t v.$$

Simili modo cum fit

$$\frac{\partial W}{t} = \frac{\partial \partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{t} - \frac{v \partial t}{t t},$$

erit integrando

$$\int \frac{\partial W}{t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \int \frac{(t \partial v - v \partial t)}{t t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{t}.$$

Problema speciale 3.

§. 28. Denotante T functionem quamcunque ipsius t , resolvere aequationem secundi gradus:

$$\frac{t \partial \partial v}{\partial t} + \partial v - \frac{v \partial t}{t} = T \partial t.$$

Haec resolutio per praecedentia facile expeditur; primo enim per t multiplicando et integrando prodit

$$\frac{t t \partial v}{\partial t} - t v = \int T t \partial t.$$

At vero per t diuidendo et integrando fit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{t} = \int \frac{T \partial t}{t},$$

vnde eliminando terminum $\frac{\partial v}{\partial t}$ oritur

$$v = \frac{1}{2} t \int \frac{T \partial t}{t} - \frac{1}{2t} \int T t \partial t$$

quae expressio quomodo satisfaciat, videamus. Primo hinc erit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \int \frac{T \partial t}{t} + \frac{1}{2 t t} \int T t \partial t$$

quae aequatio denuo differentiatia dat

$$\frac{\partial \partial v}{\partial t} = \frac{T}{t} - \frac{1}{t^2} \int T t \partial t.$$

His

His igitur valoribus substitutis prodit

$$\begin{aligned} \frac{t \partial \partial v}{\partial t} &= T \partial t - \frac{\partial t}{u} \int T t \partial t \\ + \partial v &= \frac{\partial t}{z} \int \frac{T \partial t}{t} + \frac{\partial t}{z t t} \int T t \partial t \\ - \frac{v \partial t}{t} &= - \frac{\partial t}{z} \int \frac{T \partial t}{t} + \frac{\partial t}{z t t} \int T t \partial t \end{aligned}$$

Summa = $T \partial t$, prorsus vt ante.

Scholion.

§. 29. Duo priora exempla, quae hic attulimus, insignem usum praestant in curuarum indole respectu rectificationis exploranda, vti ostendimus; tertium autem exemplum ideo est notatu dignum, quod in huiusmodi inuestigationibus saepius eiusmodi formulae differentiales occurrunt, quas, per eandem quantitatem tam multiplicatas quam diuisas, reddi oportet integrabiles. Veluti si in superficie cylindri recti praeter rectas axi parallelas aliae lineae duci debeant, quae sint rectificabiles, quaestio ad inuentionem eiusmodi quantitatis algebraicae t reducitur, per quam ista formula differentialis $\frac{\partial v}{\sqrt{(1-vv)}}$ tam multiplicata quam diuisa integrationem admittat. Postquam autem plurimum nequicquam in hoc negotio desudassem, asseuerare non dubito, nullam plane dari eiusmodi quantitatem t , qua hae duae formulae: $\frac{t \partial v}{\sqrt{(1-vv)}}$ et $\frac{\partial v}{t \sqrt{(1-vv)}}$ simul fiant integrabiles. Praeterea vero omnino certum mihi videtur, praeter simplices potestates ipsius v nullas alias eius functiones t dari, unde hae duae formulae differentiales: $\frac{t \partial v}{v}$ et $\frac{\partial v}{t v}$ simul euadant integrabiles.

Problema.

§. 30. Si formula differentialis ∂W vtcunque fuerit composita ex quantitibus variabilibus p et q (inter quas quidem cer-
 Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. VII. C ta

ta relatio dari assumitur) definire quantitatem v ex hac aequatione differentiali secundi gradus:

$$\partial W = \frac{\partial \partial v (p \partial q - q \partial p) - \partial v (p \partial \partial q - q \partial \partial p) + v (\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)^2}.$$

Solutio.

Quia nouimus hanc aequationem integrabilem reddi, si multiplicetur tam per p quam per q : haec duplex integratio nobis duas suppeditat aequationes differentiales primi gradus, quae sunt:

$$\int p \partial W = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} \text{ et } \int q \partial W = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p},$$

quarum posterior, ducta in p , si subtrahatur a priore ducta in q , praebet sequentem aequationem: $q \int p \partial W - p \int q \partial W = v$; sicque innotescit valor quaesitus quantitatis v , qui, quoniam geminam integrationem inuoluit, ob duplicem constantem arbitrariam pro integrali completo aequationis differentio-differentialis est habendus.

Problema 2.

Inuenire formulam differentialem ∂W , quae per tres quantitates variables datas p , q et r multiplicata fiat integrabilis.

Solutio.

§. 31. Ponamus haec tria integralia, quae prodire debent, esse

1°. $\int p \partial W = P$, 2°. $\int q \partial W = Q$, 3°. $\int r \partial W = R$,
vnde triplici modo formula differentialis quaesita ∂W exprimetur

$$1^\circ. \partial W = \frac{\partial P}{p}; \quad 2^\circ. \partial W = \frac{\partial Q}{q}; \quad \text{et } 3^\circ. \partial W = \frac{\partial R}{r}$$

§. 32. Jam supra §. 14. vidimus duabus prioribus conditionibus, quibus requiritur vt fit $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$, satisfieri, si capiatur

$$P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} \text{ et } Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p}.$$

Simili modo conditionibus primae et tertiae, qua requiritur ut fit $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{p}{r}$, satisfiet, loco v aliam quantitatem u scribendo, his duobus valoribus:

$$P = \frac{p \partial u - u \partial p}{p \partial r - r \partial p} \text{ et } R = \frac{r \partial u - u \partial r}{p \partial r - r \partial p}.$$

Nunc igitur totum negotium eo est reductum, ut ambo valores pro P inventi ad aequalitatem perducantur; ubi ergo quaeritur, quales quantitates pro v et u accipi debeant, ut istae duae formulae pro P inventae inter se euadant aequales, quippe quo facto simul etiam bini reliqui valores Q et R innotescant.

§. 33. Cum igitur debeat esse

$$\frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} = \frac{p \partial u - u \partial p}{p \partial r - r \partial p},$$

quo hoc facilius effici possit, statuamus $v = Vp$ et $u = Up$, et conditio adimplenda erit

$$\frac{\partial v}{p \partial q - q \partial p} = \frac{\partial u}{p \partial r - r \partial p}, \text{ ideoque } \frac{\partial V}{\partial U} = \frac{p \partial q - q \partial p}{p \partial r - r \partial p}.$$

Quare si theorema supra §. 14. datum in subsidium vocemus, loco P et Q nunc habemus V et U , at vero loco p et q nunc habemus $p \partial q - q \partial p$ et $p \partial r - r \partial p$, ideoque loco v introducendo quantitatem Z haec conditio adimplebitur, si statuamus:

$$V = \frac{(p \partial q - q \partial p) \partial Z - Z (p \partial \partial q - q \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)(p \partial \partial r - r \partial \partial p) - (p \partial r - r \partial p)(p \partial \partial q - q \partial \partial p)};$$

$$U = \frac{(p \partial r - r \partial p) \partial Z - Z (p \partial \partial r - r \partial \partial p)}{(p \partial q - q \partial p)(p \partial \partial r - r \partial \partial p) - (p \partial r - r \partial p)(p \partial \partial q - q \partial \partial p)};$$

vbi notetur denominatorem reuocari posse ad fequentem formam satis concinnam:

$$p \partial \partial p (q \partial r - r \partial q) + p \partial \partial q (r \partial p - p \partial r) + p \partial \partial r (p \partial q - q \partial p)$$

in qua praeter factorem communem p ternae litterae p , q et r sunt inter se permutabiles.

§. 34. Solutio ergo nostri problematis sequenti modo absoluetur:

1°. Sumta pro lubitu quantitate quacunque variabili Z , quaeratur quantitas V , vt fit

$$V p = \frac{(p \partial q - q \partial p) \partial Z - Z (p \partial \partial q - q \partial \partial p)}{\partial \partial p (q \partial r - r \partial q) + \partial \partial q (r \partial p - p \partial r) + \partial \partial r (p \partial q - q \partial p)}$$

qui simul est valor litterae v .

2°. Eodem modo colligatur valor

$$U p = \frac{(p \partial r - r \partial p) \partial Z - Z (p \partial \partial r - r \partial \partial p)}{\partial \partial p (q \partial r - r \partial q) + \partial \partial q (r \partial p - p \partial r) + \partial \partial r (p \partial q - q \partial p)}$$

qui simul est valor ipsius u .

3°. Inuentis autem his valoribus pro v et u formentur porro isti valores:

$$P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p}, \text{ vel etiam } P = \frac{p \partial u - u \partial p}{p \partial r - r \partial p}$$

quippe qui ambo valores ad aequalitatem sunt perducti; praeterea vero fumatur

$$Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p} \text{ et } R = \frac{r \partial u - u \partial r}{p \partial r - r \partial p}.$$

4°. Denique hae ternae formulae $\frac{\partial P}{p}$, $\frac{\partial Q}{q}$, $\frac{\partial R}{r}$ producent expressiones inter se prorsus aequales, atque adeo valorem formulae differentialis quaesitae ∂W .

§. 35. Solutio haec adhuc magis contrahi potest, si, positis vt ante $v = Vp$ et $u = Up$, insuper statuatur $q = px$ et $r = py$, vbi quia q et r tanquam functiones ipsius p spectari possunt, etiam x et y erunt functiones cognitae ipsius p ; tum autem fiet $\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial y}$. Quare cum x et y sint functiones ipsius p , ponatur $\partial x = X \partial p$ et $\partial y = Y \partial p$, ita vt etiam X et Y futurae sint functiones cognitae ipsius p , hinc autem habebimus hanc aequationem resolvendam $\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{X}{Y}$.

§. 36. Nunc igitur introducendo nouam quantitatem variabilem indefinitam Z theorema nostrum §. 14. nobis dabit

V

$$V = \frac{x \partial z - z \partial x}{x \partial y - y \partial x} \text{ et } U = \frac{y \partial z - z \partial y}{x \partial y - y \partial x}.$$

Inuentis autem valoribus V et U simul habentur litterae $v = V p$ et $u = U p$, ex quibus ut ante determinabuntur valores P , Q et R , hincque tandem ipsa formula differentialis quaesita ∂W .

Corollarium.

§. 37. Quoniam litterae V et U duabus constant partibus, altera per Z , altera vero per ∂Z affecta, etiam quantitates v et u duabus huiusmodi partibus constabunt; unde earum differentia infuper partem secundo differentiali $\partial \partial Z$ affectam continebunt. Huiusmodi ergo tres partes in litteris P , Q et R occurrent, quae cum denuo differentiari debeant, ut formula differentialis ∂W eliciatur, evidens est in expressione ∂W differentia ipsius Z ad tertium gradum affurgere, unde pro ∂W huiusmodi prodibit expressio:

$$\partial W = A Z + B \partial Z + C \partial \partial Z + D \partial^3 Z$$

vbi litteras A , B , C et D pro formulis per evolutionem valorum supra assignatorum posuimus. Quibus praeceptis applicationi ad casus particulares non immorari est opus.