
DE
MOMENTIS VIRIVM
RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE
INVENIENDIS;

VBI PLVRA INSIGNIA SYMPTOMATA CIRCA
BINAS RECTAS, NON IN EODEM PLANO
SITAS, EXPLICANTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14 Aug. 1780.

Si proposita fuerit vis quaecunque V , in directione AZ vr-Tab. II.
gens, pro eius momento respectu axis az , vtcunque siti, inue- Fig. 1.
stigando praecepta statica hanc suppeditant regulam: Ex puncto
quocunque V , in recta AZ assumto, ducatur ad alteram rectam az
perpendicularis $V\varphi$, quae vocetur $=\varphi$; deinde quaeratur inclina-
tio rectae AZ ad planum aVz , quod scilicet tribus punctis
 a, V, z determinatur, quae inclinatio vocetur $=\Phi$: hincque erit
momentum quaesitum $=V \cdot \varphi \sin. \Phi$. Scilicet aequabitur producto
ex vi sollicitante V in distantiam $V\varphi = \varphi$, atque insuper in
sinum anguli inclinationis Φ .

Ve-

Verum si pro hac formula tam distantiam v quam angulum Φ in genere per calculum definire velimus, in formulas analyticas tantopere intricatas delabimur, ut vix quicquam inde ad usum mechanicum concludi queat. Cum autem electio puncti V ab arbitrio nostro pendeat, id ita assumere licet, ut pleraeque difficultates memoratae evanescant, quod eueniet, si punctum V ibi accipiatur, ubi distantia inter binas rectas AZ et az (quas ambas in infinitum extendi concipere conuenit) fit minima. Hanc conditionem igitur introducetes totam momentorum inuestigationem instituemus, et more apud Geometras recepto procedamus; ubi, quae proprie ad Mechanicam spectant, ab iis quae ad Geometriam sunt referenda, distinguamus.

Theorema geometricum.

Tab. II. §. 1. Si recta Mm fuerit minima distantia inter binas
 Fig. 2. rectas AZ et az , ea ad utramque erit normalis, ita ut tam
 angulus AMm quam angulus aMm sit rectus.

Demonstratio.

§. 2. Si enim angulus Mmz non esset rectus, perpendicularum Mp , ex M in rectam az demissum, minus foret quam Mm , contra hypothesin. Simili modo, si recta mM non esset perpendicularis ad AZ , ex m eo duci posset perpendicularis mP , quae iterum minor foret quam Mm , contra hypothesin. Vnde euidens est, distantiam minimam Mm ad utramque rectam AZ et az esse debere perpendiculararem.

Corollarium.

§. 3. Quod si per m ipsi AZ ducamus parallelam $\alpha\omega$, erit etiam Mm perpendicularis ad $\alpha\omega$ et perpendicularis ad
 pla-

planum $a m \alpha$ vel $\omega m z$; sicque recta $m z$ sita erit in plano ad rectam $M m$ normali, atque si angulus $a m \alpha$, siue $z m \omega$ ponatur $= \omega$, iste angulus metietur inclinationem mutuam binarum rectarum propositarum $A Z$ et $a z$.

Problema mechanicum.

§. 4. *Cognita distantia minima $M m = m$ inter directionem vis sollicitantis $A Z$ et axem $a z$, definire momentum vis V respectu axis $a z$.*

Solutio.

§. 5. Punctum V supra in regula memoratum summa-Tab. II. mus in recta $A Z$, in ipso puncto M , vbi distantia ab altera Fig. 3. recta $a z$, scilicet $M m = m$, est minima. Per M ducatur recta $a \omega$, ipsi $a z$ parallela, quae ergo cum $a z$ in eodem plano iacebit, atque angulus $A M \alpha$, siue $Z M \omega$, qui fit $= \omega$, exprimet inclinationem rectae $A Z$ ad planum $a M z$, quam supra in regula indicauimus per Φ , quamobrem momentum quaesitum nunc erit $= V m \sin. \omega$.

Corollarium.

§. 6. Ad momentum igitur vis V , in directione $A Z$ vrgentis, respectu axis $a z$ inueniendum, primo quaeri debet distantia minima inter binas rectas $A Z$ et $a z$, quam ponimus $M m = m$. Deinde etiam quaeri debet angulus ω , siue inclinatio mutua ambarum rectarum $A Z$ et $a z$. Quemadmodum igitur vtramque inuestigationem institui oporteat doceamus, postquam ostenderit, quomodo positionem vtriusque rectae ad calculum reuocari conueniat.

Problema geometricum.

§. 7. *Positionem ambarum rectorum AZ et az ad calculum reuocare.*

Solutio.

Tab. II.

Fig. 4.

§. 8. Hunc in finem in subsidium vocemus ternas directiones fixas inter se normales, ad quas vtriusque rectae positionem per ternas coordinatas, istis directionibus parallelas, referamus. Hinc igitur pro recta AZ constituamus tres axes AF, AG, AH, directionibus illis fixis parallelas, quorum respectu pro puncto quocunque Z statuamus ternas coordinatas istis axibus parallelas AX = X, XY = Y, et YZ = Z, et posito interuallo AZ = S, quia ad id ternae coordinatae constantes tenent rationes; ponamus X = FS, Y = GS, Z = HS, vbi cum sit $F = \frac{AX}{AZ}$, euidens est F exprimere cosinum anguli FAZ, quo directio AZ ad axem AF inclinatur. Simili modo G erit cosinus anguli, quo directio AZ ad axem AG inclinatur, et H erit cosinus anguli, quo directio AZ ad axem AH inclinatur. Praeterea vero, cum fit

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (F^2 + G^2 + H^2) S^2,$$

euidens est semper fore $F^2 + G^2 + H^2 = 1$.

§. 9. Eodem modo pro altera directione az statuantur terni axes af, ag, ah, directionibus fixis paralleli, ad quos positio cuiusvis puncti z referatur per coordinatas ax = x, xy = y, yz = z; et posito interuallo az = s, statuatur x = fs, yg = s et zb = s, vbi, vt ante, litterae f, g, h, expriment cosinus angulorum faz, gaz, haz, quibus directio propofita az ad ternos axes af, ag, ah, inclinatur. Tum vero etiam hic habebitur $f^2 + g^2 + h^2 = 1$.

§. 10.

§. 10. Denique quo etiam situs puncti a respectu puncti A in calculum inferatur, ex puncto a in planum FAG demittatur perpendicularum aC , tum vero ex puncto C ad axem AF normalis ducatur CB , ac vocentur interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, ita vt punctum a quoque per ternas coordinatas a, b, c , determinetur, hocque modo omnia, quae ad relationem inter binas rectas propositas AZ et az pertinent, facillime ad calculum reuocari poterunt.

Problema geometricum.

§. 11. *Propositis duabus rectis AZ et az , earum inclinationem mutuam, quae fit ω , per calculum definire.*

Solutio.

§. 12. Postquam ambae rectae propositae AZ et az per ternas coordinatas, vti modo docuimus, ad calculum fuerint reuocatae, quia omnes rectae inter se parallelae ad quamuis aliam rectam aequaliter inclinantur, ducamus ex A rectam Az' , alteri rectae propositae az parallelam, simulque ducantur ternae coordinatae respondententes $Ax' = x, x'y' = y, y'z' = z$. Haec scilicet figura, vbicunque extiterit recta az , in hunc locum translata concipiatur, atque iam angulus ZAz' erit inclinatio, quam ambae rectae propositae AZ et az inter se tenent.

§. 13. Quamobrem, quo istum angulum ZAz' commodius definire queamus, ambo internalla AZ et az' inter se aequalia accipiamus, ita vt sit $s = S$, vnde sequentes habebimus valores:

$$AX = X = FS; XY = Y = GS; YZ = Z = HS;$$

$$Ax' = x = fS; x'y' = y = gS; y'z' = z = hS.$$

B b 2

cx

ex quibus recta Zz' ita definitur, vt fit

$$(Zz')^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2, \text{ siue}$$

$$(Zz')^2 = S [(f - F)^2 + (g - G)^2 + (b - H)^2]$$

qua expressio euoluta, ob

$$f^2 + g^2 + b^2 = 1 \text{ et } F^2 + G^2 + H^2 = 1, \text{ erit}$$

$$(Zz')^2 = 2 S^2 (1 - fF - gG - bH).$$

§. 14. Ex Geometria autem constat angulum ZAz' ex datis tribus lateribus ita definiri, vt fit $\cos. \omega = \frac{AZ^2 + Az'^2 - Zz'^2}{2AZ \times Az'}$, vnde, valoribus substitutis colligitur fore $\cos. \omega = fF + gG + bH$, quae expressio satis est simplex, vt in calculum commode introduci queat.

Problema geometricum.

Tab. II. §. 15. *Propositis duabus rectis AZ et az , prouti ante Fig. 4. ad calculum sunt reuocatae, inuestigare puncta Z et z , quorum distantia Zz omnium sit minima.*

Solutio.

§. 16. Quia distantia minima inter binas rectas propositas ad vtramque est normalis, puncta Z et z inde definiri debent, vt anguli AZz et azZ fiant recti, siue, si ductae intelligantur rectae Az et aZ , vt fit

$$Az^2 = AZ^2 + Zz^2 \text{ et } aZ^2 = az^2 + Zz^2,$$

quas ergo aequationes ad calculum reduci oportet. Ante omnia autem ex elementis constitutis interuallum Zz ita exprimitur, vt fit

$$Zz^2 = (a + fs - FS)^2 + (b + gs - GS)^2 + (c + hs - HS)^2,$$

quae

quae expressio quo magis contrahatur, ponamus br. gr.

$$aa + bb + cc = \Delta; aF + bG + cH = E \text{ et } af + bg + ch = e,$$

sicque impetrabimus hanc formam:

$$Zz^2 = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss(Ff + Gg + Hh) + s^2 + S^2.$$

Cum igitur, ut modo ante vidimus, sit $Ff + Gg + Hh = \text{cof. } \omega$, erit

$$Zz^2 = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss \text{cof. } \omega + s^2 + S^2.$$

§. 17. Deinde vero has denominationes in subsidium vocando reperietur per nostras coordinatas

$$Az^2 = (a + fs)^2 + (b + gs)^2 + (c + hs)^2,$$

ideoque erit

$$Az^2 = \Delta + 2es + ss.$$

Simili modo erit

$$aZ^2 = (a - FS)^2 + (b - GS)^2 + (c - HS)^2,$$

adeoque

$$aZ^2 = \Delta - 2ES + SS.$$

Hinc igitur binæ aequationes supra datae dabunt has:

$$\Delta + 2es + ss = 2S^2 + \Delta - 2ES + 2es - 2Ss \text{cof. } \omega + s^2$$

$$\Delta - 2ES + SS = 2ss + \Delta - 2ES + 2es - 2Ss \text{cof. } \omega + S^2$$

quae ad has formas reducuntur:

$$S - E - s \text{cof. } \omega = 0$$

$$s + e - S \text{cof. } \omega = 0.$$

§. 18. Ex his iam duabus aequationibus satis simplicibus ambo intervalla quaesita $AZ = S$ et $az = s$, ita determinantur, ut fit

$$S = \frac{E - e \text{cof. } \omega}{\text{fin. } \omega^2} \text{ et } s = \frac{E \text{cof. } \omega - e}{\text{fin. } \omega^2}$$

Corollarium.

§. 18. Quodsi ergo interuallis $AZ = S$ et $az = s$ hi valores tribuantur, tum distantia Zz omnium euadet minima, ideoque $= m$, quam ergo si in calculo retineamus, binae aequationes principales, vnde haec solutio est deducta, erunt

$$m m + S S = \Delta + 2 e s + s s,$$

$$m m + s s = \Delta - 2 E S + S S,$$

quae duae aequationes additae producent hanc:

$$m m = \Delta + e s - E S,$$

quae multo simplicior est quam ea quae ante immediate fuerat orta, scilicet

$$m m = \Delta + 2 e s - 2 E S - 2 S s \cos. \omega + s s + S S,$$

ea igitur in sequente Problemate vtemur.

Problema geometricum.

§. 19. *Propositis duabus rectis AZ et az, per elementa supra stabilita definitis, inuenire earum distantiam minimam.*

Solutio.

§. 20. In Problemate praecedente inuenimus, si capiatur

$$AZ = S = \frac{E - e \cos. \omega}{\sin. \omega^2} \text{ et } az = s = \frac{E \cos. \omega - e}{\sin. \omega^2},$$

tum distantiam Zz aequari ipsi distantiae minimae $= m$. Deinde vero in Corollario ostendimus esse $m^2 = \Delta + e s - E S$; quamobrem tantum opus est, vt pro litteris Δ , e et E valores assumpti restituantur, qui erant

$$\Delta = a a + b b + c c,$$

$$E = a F + b G + c H$$

$$e = a f + b g + c h,$$

vnde

vnde oritur haec aequatio :

$$m^2 \sin. \omega^2 = (aa+bb+cc) \sin. \omega^2 + 2 (af+bg+cb) (aF+bG+cH) \cos. \omega - (af+bg+cb)^2 - (aF+bG+cH)^2.$$

Manifestum igitur est facta evolutione talem formam esse pro-
dituram :

$$mm \sin. \omega^2 = aa \mathcal{A} + bb \mathcal{B} + cc \mathcal{C} + 2ab \mathcal{F} + 2bc \mathcal{G} + 2ac \mathcal{H},$$

ficque tantum opus est, vt valores litterarum \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} ,
euoluantur.

§. 21, Incipiamus a littera \mathcal{A} , eiusque valor reperitur

$$\mathcal{A} = \sin. \omega^2 + 2 F f \cos. \omega - F^2 - f^2, \text{ siue}$$

$$\mathcal{A} = 1 - F^2 - f^2 + \cos. \omega (2 F f - \cos. \omega).$$

Hinc iam loco $\cos. \omega$ eius valor $Ff + Gg + Hh$ substituatur,
eritque

$$\mathcal{A} = 1 - F^2 - f^2 + F^2 f^2 - (Gg + Hh)^2,$$

cuius expressionis pars prior manifesto est productum ex facto-
ribus $1 - F^2$ et $1 - f^2$; quare cum sit

$$1 - F^2 = G^2 + H^2 \text{ et } 1 - f^2 = g^2 + h^2,$$

facta evolutione reperitur

$$\mathcal{A} = GGbb - 2GHgb + HHgg = (Gb + Hg)^2.$$

Simili modo valores litterarum \mathcal{B} et \mathcal{C} inueniri possent; sed
quia tam litterae a, b, c , quam F, G, H , item f, g, h , eodem
ordine procedunt, tantum opus est singulas litteras pro \mathcal{A} in-
uentas vno gradu promouere, vt obtineatur

$$\mathcal{B} = (Hf - Fh)^2; \text{ atque } \mathcal{C} = (Fg - Gf)^2,$$

dum denuo vno gradu progreditur.

§. 22. Quaeramus nunc valorem litterae \mathcal{F} , qui ex
forma inuenta colligitur fore

§

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf) \cos. \omega - FG - fg.$$

Hinc substituto valore pro $\cos. \omega$ fiet

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)(Ff + Gg + Hb) - FG - fg, \text{ siue}$$

$$\mathfrak{F} = -FG(1 - ff - gg) - fg(1 - F^2 - G^2) + Hb(Fg + Gf).$$

Quia igitur est

$$1 - ff - gg = bb \text{ et } 1 - F^2 - G^2 = H^2, \text{ fiet}$$

$$\mathfrak{F} = Hb(Fg + Gf) - FGbb - fgHH,$$

quod manifesto est productum ex factoribus $Gb - Hg$ et $Hf - Fb$, ita ut sit

$$\mathfrak{F} = (Gb - Hg)(Hf - Fb).$$

Quod si iam vno gradu progrediamur, hinc deducimus valorem

$$\mathfrak{G} = (Hf - Fb)(Fg - Gf)$$

ac denuo progrediendo

$$\mathfrak{H} = (Fg - Gf)(Gb - Hg).$$

§. 23. His igitur colligendis sequentem aequationem nanciscemur:

$$\begin{aligned} m \sin. \omega^2 &= (Gb - Hg)^2 aa + 2(Gb - Hg)(Hf - Fb)ab \\ &+ (Hf - Fb)^2 bb + 2(Hf - Fb)(Fg - Gf)bc \\ &+ (Fg - Gf)^2 cc + 2(Fg - Gf)(Gb - Hg)ac \end{aligned}$$

quae expressio manifesto est quadratum. Extracta ergo radice orietur:

$$m \sin. \omega = (Gb - Hg)a + (Hf - Fb)b + (Fg - Gf)c$$

quae formula etiam negativè potuisset accipi, sed quia de distantia sermo est, ea semper positiva intelligi solet. Quia etiam $\sin. \omega$ negativè sumi posset, quia tantum inclinationis cosinum immediate inuenimus, vnde vna ambiguitas ab altera tolli est censenda.

Pro-

Problema mechanicum.

§. 24. *Proposita vi quacunq̄ue V secundum directionem AZ urgente, definire eius momentum respectu axis cuiuscunq̄ue az.*

Solutio.

§. 25. Positionem vtriusque directionis AZ et az per eadem elementa exprimi assumamus, quae supra sunt stabilita, scilicet per terna intervalla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$; tum vero per cosinus F, G, H, angulorum, quibus directio AZ ad axes fixos AF, AG, AH, inclinatur, atque insuper per cosinus f, g, h, angulorum, sub quibus altera directio az ad axes fixos af, ag, ah, inclinatur; ex quibus elementis colligitur inclinatio mutua ambarum directionum, qua posita $= \omega$ inuenimus esse $\cos. \omega = Ff + Gg + Hh$. Praeterea vero si m denotet distantiam minimam inter has duas directiones, modo vidimus esse:

$$m \sin. \omega = (Gb - Hg)a + (Hf - Fb)b + (Fg - Gf)c.$$

§. 26. Ex his autem duobus valoribus pro angulo ω et distantia minima m inuentis supra demonstrauimus §. 5. fore momentum quaesitum $= V m \sin. \omega$. Quare, substitutis valoribus modo assignatis, momentum quaesitum hac formula exprimetur:

$$Va(Gb - Hg) + Vb(Hf - Fb) + Vc(Fg - Gf).$$

Corollarium.

§. 27. Expressio ergo pro momento inuenta, praeter ipsam vim propositam V, inuoluit nouem litteras a, b, c; F, G, H; f, g, h; quae autem ad septem reduci possunt, cum sit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$ et $f^2 + g^2 + h^2 = 1$. Quia igitur ob tantam multitudinem rationem istius formulae haud facile perspicere licet, haud abs re erit, quosdam casus particulares, qui-

bus directio axis az vel in directionem af , vel ag , vel ab incidit, eoluere.

Casus I. quo directio az incidit in axem af .

§. 28. Hoc igitur casu, ob coordinatas $y=0$ et $z=0$, erit $g=0$ et $b=0$, ideoque $f=1$; tum igitur fiet $\cos.\omega=F$, atque momentum vis propositae respectu axis af erit $V(bH-cG)$.

Casus II. quo directio az incidit in axem ag .

§. 29. Hoc igitur casu binae coordinatae x et z euanescent, eritque ergo $f=0$ et $b=0$, ideoque $g=1$. Inclinatio igitur ad hunc axem determinatur per $\cos.\omega=G$, atque momentum respectu axis ag erit $V(cF-aH)$.

Casus III. quo directio az incidit in axem ab .

§. 30. Hic binae coordinatae x et y euanescunt, eritque idcirco $f=0$ et $g=0$, tum vero $b=1$. Inclinatio- nis, siue anguli ω , cosinus erit $=H$, et momentum quaesitum respectu axis ab fiet $V(aG-bF)$.

Problema mechanicum.

§. 31. Cognitis tribus momentis, quae vis proposita V , in directione AZ agens, exerit in ternos axes fixos af , ag , ab , inuenire momentum, quod eadem vis respectu axis az producat.

Solutio.

§. 32. Designemus terna momenta cognita per litteras \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} , atque habebimus, vt modo inuenimus

$$\mathfrak{P} = V(bH - cG);$$

$$\mathfrak{Q} = V(cF - aH);$$

$$\mathfrak{R} = V(aG - bF).$$

Iam

Iam vero expressio pro momento respectu axis az supra inventa etiam hac forma repraesentari potest:

$$Vf(bH - cG) + Vg(cF - aH) + Vb(aG - bF),$$

vbi eadem formulae occurrunt, quas modo pro momentis \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} dedimus, quibus ergo substitutis momentum respectu axis az erit $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + b\mathfrak{R}$, vbi non amplius neque positio, neque ipsa vis sollicitans V in calculum ingreditur, vnde sequens Theorema maximi momenti nanciscimur.

Theorema mechanicum.

§. 33. A quibuscunque viribus corpus circa axem az mobile sollicitetur, si earum virium momenta respectu axium af , ag , ab fuerint \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} , tum momentum respectu axis propositi az erit $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + b\mathfrak{R}$, vbi f , g , b , denotant cosinus angulorum faz , gaz , baz . Veritas huius Theorematis iam penitus est euicta in Problemate praecedente. Hic autem obseruasse iuuabit terna illa momenta \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} in eundem sensum tendere debere. Scilicet si momentum \mathfrak{P} pro axe af tendat in plagam gb , tum bina reliqua momenta tendere debent in plagas bf et fg , siue secundum ordinem harum litterarum, in plagam fgb , atque in eandem plagam etiam verget momentum pro axe az inuentum. Ac si quodpiam horum momentorum \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} , in plagam contrariam vergat, id in calculo negatiue erit accipiendum.

Corollarium I.

§. 34. Hinc ergo etiam ista insignis veritas deducitur: *Quaecunque vires respectu ternorum axium af , ag , ab , inter se normalium eadem praebent momenta, eadem pro quouis axe obliquo az paria momenta generabunt.*

Corollarium 2.

§. 35. Momenta igitur virium pro ternis axibus inter se normalibus eodem prorsus modo componi possunt, quo vires simplices componi solent. Si enim puncto a applicatae fuerint vires P, Q, R , secundum directiones af, ag, ab , ex iis componitur vis secundum directionem $az = fP + gQ + bR$, quae egregia harmonia maxima attentione digna est censenda, atque in vniuersam Mechanicam hinc non contemnenda incrementa redundare possunt.
