METHODVS FACILIS OMNIVM VIRIVM MOMENTA RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE DETERMINANDI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 14 *Aug.* 1780.

Solutio Problematis geometrici, quo inter binas rectas non in eodem plano sitas quaerebatur earum distantia minima, deduxit me, per calculos non parum abstrusos, ad insigne Theorema mechanicum, quod ita commodissime enunciari potest: *Propositis viribus quibuscunque, si inuenta fuerint earum momenta respectu trium axium* af, ag, ah, *inter se normalium, quae sint* $\mathfrak{P}$ *respectu axis* af, $\mathfrak{Q}$ *respectu axis* ag *et* $\mathfrak{R}$ *respectu axis* ah; *tum ab iisdem viribus, respectu axis cuiusuis obliqui* az, *per punctum* a *transeuntis, orietur momentum hoc:* Tab. III. Fig. 1.

$$\mathfrak{P} \cos. faz + \mathfrak{Q} \cos. gaz + \mathfrak{R} \cos. haz,$$

si quidem tria illa momenta, secundum eundem sensum agant, siue in sensum fgh *siue in contrarium* fhg. Quae egregia veritas cum ex consideratione geometrica per calculos satis prolixos deriuata sit, nullum est dubium, quin etiam via directa ex principiis staticis deduci queat. Postquam igitur hoc argumentum sol-

sollicite essem perscrutatus, incidi in viam satis planam, quae me ad hanc veritatem perduxit, et quae simul mihi facilem methodum aperuit omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi.

Theorema.

Tab. III. Fig. 2. §. 1. *Quaecunque vis fuerit proposita, ea semper in tres alias resolui potest, quarum directiones cadant in plana f a g, g a h, h a f, quae scilicet plana per ternos axes a f, a g, a h, inter se normales determinantur.*

Demonstratio.

§. 2. In quacunque directione vis proposita agat, ea producatur, donec planum *f a g* alicubi in O traiiciat, in quo ergo puncto vis O Z applicata concipi potest. Haec igitur vis O Z resolui poterit in duas, quarum vna cadat in ipsum planum *f a g*, altera vero, quae sit O *p*, ad hoc planum sit perpendicularis. Hoc modo iam nacti sumus vnam vim, cuius directio in planum *f a g* cadit; quare ostendendum est, quomodo altera vis O *p*, quae sit *p*, in duas nouas resolui possit, quarum directiones cadant in plana *f a h* et *g a h*.

§. 3. Ad hoc praestandum concipiatur in ipso puncto *a* secundum directionem *a h* applicata vis illi *p* aequalis et parallela, quae quia transit per ipsum punctum *a* nullum gignit momentum respectu vllius axis per punctum *a* ducti, ideoque in computo momentorum perinde est, siue haec noua vis adsit, siue absit. Concipiamus igitur hanc nouam vim adesse, et ducta recta O *a*, eaque bisecta in D, si in hoc puncto D vis ad planum B *a* C perpendicularis et aequalis 2 *p* applicata intelligatur, ea aequiualebit viribus illis *p*, ideoque aequiualebit ipsi vi vi $Op = p$, quandoquidem iſta vis pro puncto a idem producit momentum quod ipſa vis Op.

§. 4. Nunc ex puncto O in axes af et ag ducantur perpendicula OB et OC, et ducta inſuper recta BC punctum D in eius medium cadet, vnde loco vis $2p$, puncto D applicatae, ſubſtitui poterunt vires $Cq = p$ et $Br = p$, quarum directiones axi ab erunt parallelae, ſicque iſtae duae vires Cq et Br ipſi vi Op aequiualentes ſunt cenſendae. Quoniam igitur vis illius Cq directio cadit in planum gab, huius vero Br in planum fab, hoc modo vim propoſitam reſoluimus in tres alias, quarum directiones incidunt in plana fag, fab, gab, quae ergo vires eundem praeſtabunt effectum atque ipſa vis propoſita.

Corollarium.

§. 5. Harum virium prima, cuius directio in ipſum planum fag cadit, nullum momentum generat, tam pro axe af quam ag, ſed tota quaſi inſumitur in momento circa axem ab producendo. Simili modo ſecunda vis, cuius directio cadit in planum fab, neque pro axe af, neque pro axe ab nullum momentum generabit, ſed tota impendetur ad momentum circa axem ag producendum. Eodemque modo vis cuius directio in planum gab cadit, circa ſolum axem af momentum generabit.

Problema.

§. 6. *Si ſola adſit vis, cuius directio in planum fag cadet, eiusque momentum reſpectu axis ab fuerit cognitum $= \mathfrak{R}$, eiusdem vis momentum reſpectu axis cuiuscunque obliqui az, pariter per punctum a tranſeuntis, inueſtigare.*

Solu-

Solutio.

Tab. III. Fig. 3. §. 7. Pro ſitu huius axis az definiendo ponamus cof. $faz = f$, cof. $gaz = g$, cof. $haz = h$, atque euidens eſt fore $ff + gg + hh = 1$. Iam quaecunque ſit vis propoſita, cuius directio in planum fag incidit, eam ſemper reſoluere licet in duas, quarum altera in ipſum axem af incidat, altera vero ad eum ſit normalis, quarum illa in hoc negotio penitus negligi poteſt, hanc vero per rectam xy referre licet, quae ſi ponatur $= v$, eius momentum reſpectu axis ah erit $= vax$, quod cum detur $= \mathfrak{R}$, erit $v \cdot ax = \mathfrak{R}$; et quia hanc vim ſecundum directionem xy vrgere aſſumimus, momentum $\mathfrak{R}$ aget in ſenſum fg, ſiue, ſecundum ordinem litterarum, in ſenſum fgh.

§. 8. Iam vt in huius vis $xy = v$ momentum reſpectu axis az inquiramus, punctum y ibi ſumatur, vbi perpendiculum yz ipſi directioni propoſitae az in z occurrat. Tum vero ducatur etiam recta ay, atque vis illa $xy = v$ reſoluatur ſecundum directiones ya et yt ad eam normali, quarum illa per punctum a tranſiens nihil confert ad momentum quod quaerimus. Quod ſi ergo ponamus angulum $fay = \zeta$, erit vis in directione ty vrgens $= v$ cof. ζ, quae ſola in axem az agere eſt concipienda. Vt iam huius vis momentum reſpectu axis az indagemus, ex y ad az normaliter ducamus rectam ys, cuius quantitatem definire debemus. Vbi notetur angulum yaz eſſe complementum anguli haz, cuius coſinum poſuimus $= h$, ſicque erit ſin. $yaz = h$, ideoque perpendiculum $ys = ay \cdot h$. Quare cum ſit $ay = \frac{ax}{\text{cof.}\,\zeta}$, erit $ys = \frac{ax \cdot h}{\text{cof.}\,\zeta}$.

§. 9. Quia igitur directio vis ſollicitantis $ty = v$ cof. ζ normalis eſt ad planum yaz, in eoque recta ys normalis ad az, huius vis momentum reſpectu axis az erit $= v$ cof. $\zeta \cdot ys$ =

$= v . a . x . b$. Quare cum productum $v . a x$ aequetur momento proposito $\mathfrak{R}$, istud momentum respectu axis $a z$ erit $\mathfrak{R} b$, quod manifesto etiam in sensum $f g b$ vergit.

Corollarium.

§. 10. Simili modo cum par sit ratio virium quarum directiones cadunt in plana $f a b$ et $g a b$, non opus est totum ratiocinium, quo hic vsi sumus, ad eas applicare, sed per solam translationem, secundum ordinem litterarum f, g, b, procedentem, earum momenta respectu axis $a z$ expedite assignari poterunt.

Corollarium 2.

§. 11. Quoniam igitur hic a vi cuius directio in planum $f a g$ cadit incepimus, vno gradu progrediendo perueniemus ad planum $g a b$, et vis in hoc plano agens momentum generabit respectu axis $a f$, quod ergo si ponamus $= \mathfrak{P}$, ex eo resultabit pro axe $a z$ momentum $= \mathfrak{P} f$. Ac si porro vno gradu progrediamur, incidemus in planum $b a f$, et vis in hoc planum agens si respectu axis $a g$ producat momentum $= \mathfrak{Q}$, ex eo obtinebitur pro axe $a z$ momentum $\mathfrak{Q} g$, hincque iam sponte fluit demonstratio Theorematis supra initio memorati.

Theorema.

§. 12. *Propositis viribus quibuscunque, si inuenta fuerint earum momenta, respectu trium axium $a f$, $a g$, $a b$, inter se normalium, quae sint $\mathfrak{P}$ respectu axis $a f$, $\mathfrak{Q}$ respectu axis $a g$ et $\mathfrak{R}$ respectu axis $a b$; tum ab iisdem viribus respectu axis cuiusuis obliqui $a z$, per punctum a transeuntis, orietur momentum*

$$\mathfrak{P} \operatorname{cos} f a z + \mathfrak{Q} \operatorname{cos} g a z + \mathfrak{R} \operatorname{cos} b a z,$$

siue etiam $\mathfrak{P} f + \mathfrak{Q} g + \mathfrak{R} b$.

Demonſtratio.

§. 13. Cum omnes vires in ternas alias reſoluere liceat, quarum directiones incidant in plana fag, gah, haf, ex earumque prima naſcatur momentum circa ſolum axem ah, quod ſit $= \mathfrak{R}$; ex ſecunda vero momentum circa ſolum axem af, quod ſit $\mathfrak{P}$; ex tertia vero circa ſolum axem ag, quod ſit $\mathfrak{Q}$; in his tribus momentis totus effectus virium ſollicitantium conſtare eſt cenſendus. Quod ſi iam pro axe propoſito az ſtatuamus

$$\text{coſ.}\, faz = f, \ \text{coſ.}\, gaz = g, \ \text{coſ.}\, haz = h\,;$$

modo vidimus ex momento $\mathfrak{R}$ oriri pro axe az momentum $\mathfrak{R}h$, tum vero ex momento $\mathfrak{P}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{P}f$ et ex momento $\mathfrak{Q}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{Q}g$. Ex omnibus ergo tribus momentis $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ iunctim ſumtis, hoc eſt ab actione tota virium ſollicitantium, orietur pro axe az hoc momentum: $\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$, prorſus vti per ſatis longas ambages ex Problemate geometrico eſt erutum.

Corollarium.

§. 14. Totum ergo negotium huc redit, vt virium, quibus corpus circa axem az mobile ſollicitatur, momenta reſpectu trium axium af, ag, ah, inueſtigentur, quae ſi fuerint $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, atque in eandem plagam, ſiue fgh, ſiue fhg vergant, his inuentis momentum reſpectu axis propoſiti az facillime per formulam inuentam definitur, quae operatio quemadmodum commodiſſime inſtitui queat in ſequente Problemate docebimus.

Prob-

Problema principale.

§. 15. *Si corpus circa axem az mobile a vi quacunque v, in directione AZ agente, sollicitetur, eius momentum respectu axis az assignare.* Tab. III. Fig. 4.

Solutio.

§. 16. Ante omnia vtraque directio az et AZ cum tribus directionibus fixis et inter se normalibus conferatur, quae pro axe proposito az sint af, ag, ah, ad quas axis az ita inclinetur, vt sit

$$\text{cos. } faz = f, \text{ cos. } gaz = g, \text{ cos. } haz = h.$$

Simili modo directio AZ referatur ad ternas directiones fixas AF, AG, AH, quarum respectu directio ita determinetur, vt sit

$$\text{cos. } FAZ = F, \text{ cos. } GAZ = G, HAZ = H.$$

Tum vero pro situ puncti b respectu A ex puncto a in planum FAG demittatur perpendiculum aC, atque ex puncto C ad AF perpendiculum CB, vocenturque interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, quae, vti in figura sunt repraesentata, in easdem plagas cum ternis directionibus fixis cadant, ita vt, si quodpiam in plagam contrariam vergat, id negatiue capi debeat.

§. 17. His praeparatis vis $AZ = V$ resoluatur in ternas vires secundum directiones fixas, vocenturque hae vires: secundum $AF = VF = P$; secundum $AG = VG = Q$; secundum $AH = VH = R$; et iam quaeramus harum singularum virium momenta respectu axium af, ag, ah. Ac primo quidem vis P, in directione AF agens, quae ipsi af est parallela, eius respectu nullum momentum producit; at vero respectu axis ah, qui vsque ad C productus intelligatur, mo-

 men-

mentum producit $= P.b$, quod momentum manifesto in plagam F G siue fg tendit, ideoque in sensum fgh.

§. 18. Vt autem pateat, in quemnam sensum momenta reliqua tendant, producantur directiones fa et ga in γ et β, vbi perpendiculis ex B et D erectis occurrant, ita vt sit $aD = b$ et $B\beta = D\gamma = c$. Et nunc clarum erit, vim P in directione B F agentem respectu axis $ga\beta$ momentum producere $= P . B\beta = Pc$, atque in sensum F H siue fh dirigi, quae directio cum sit contraria, eius momentum statui debet $= - Pc$, ita vt vis ista P duo momenta producat, alterum pro axe $ah = Pb$, alterum pro axe $ag = - Pc$.

§. 19. Secunda vis Q in directione A G agens, quia axi ag est parallela, eius respectu nullum momentum producet; at vero respectu axis ah vel Ch momentum producet Qa, quod tendit in sensum G F vel gf, contrarium directioni F G H, ideoque statui debebit $= - Qa$. Tum vero eadem vis Q, respectu axis fa, siue $f\gamma$, momentum producet Qc, atque in ipsum sensum G H, ideoque statuendum $+ Qc$, sicque ex hac vi Q nascuntur duo momenta, alterum pro axe $af = Qc$, alterum pro axe $ah = - Qa$.

§. 20. Denique vis R, in directione A H agens, respectu axis ah nullum momentum producit; at vero respectu axis fa seu $f\gamma$ producet momentum Rb, et quidem in sensum contrarium, ideoque negatiue capiendum. At vero respectu axis ag, siue βg, momentum positiuum generatur Ra.

§. 21. Quodsi iam momenta pro axibus af, ag, ah, indicemus vt supra per litteras $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, si momenta inuenta colli-

colligamus, habebimus

$$\mathfrak{P} = Q c - R b ; \mathfrak{Q} = R a - P c ; \mathfrak{R} = P b - Q a .$$

Quare cum ſit $P = V F$, $Q = V G$, $R = V H$, haec momenta erunt

$$\mathfrak{P} = V (G c - H b);$$
$$\mathfrak{Q} = V (H a - F c);$$
$$\mathfrak{R} = V (F b - G a).$$

§. 22. Deſignemus nunc momentum quaeſitum pro axe propoſito $a z = \mathfrak{M}$, atque per Theorema ante demonſtratum patet fore

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P} f + \mathfrak{Q} g + \mathfrak{R} h .$$

Subſtitutis ergo valoribus modo inuentis erit momentum quaeſitum (partibus formulae ſecundum interualla a, b, c, diſpoſitis)

$$\mathfrak{M} = V a (H g - G h) + V b (F h - H f) + V c (G f - F g) ,$$

quod momentum in ſenſum F G H tendit. Haecque expreſſio egregie conuenit cum forma, quam in praecedente diſſertatione ex principiis geometricis deriuauimus.

Scholion.

§. 23. Demonſtratio primi Theorematis elegantius adornari poteſt, ita vt non opus ſit nouam vim extraneam, in ipſo puncto a applicandam, in ſubſidium vocare. Scilicet poſtquam directio vis ſollicitantis fuerit per planum $f a g$ continuata, quod in puncto o ſecet, vbi applicata intelligatur, atque in duas vires fuerit reſoluta, quarum altera in ipſum planum $f a g$ incidat, altera vero $o p$ ei ſit normalis; per punctum o pro lubitu agatur recta $m n$ axibus $a f$ et $a g$ occurrens in punctis Tab. III. Fig. 5.

 m

m et n, vnde binas vires mq et nr, ipsi op parallelas constituere licet, quae ipsi aequiualeant, quod fit si istae vires ita capiantur:

$$mq = \frac{on \cdot op}{mn} \text{ et } nr = \frac{om \cdot op}{mn}.$$

Hoc enim modo harum virium summa erit $mq + nr = op$, earumque momenta respectu o inter se fient aequalia $= om \cdot on \cdot op$, vti natura rei postulat. Sicque loco vis op nunc nacti sumus duas vires mq et nr, quarum illa sita est in plano fab, haec vero in plano gab; vnde clarius patet, omnes vires semper resolui posse in tres alias, quarum directiones in ipsa plana fag, gab, baf cadant.

ANALY-