

EVOLVTIO
PROBLEMATIS
CVIVS SOLVTIO ANALYTICA
EST DIFFICILLIMA, DVM SYNTHETICA
PER SE EST OBVIA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 Ian. 1777.

I.

Problema, quod hic euoluendum suscipimus, ita se habet:

Circa punctum fixum A describere curuam CM, ut ductis ad singula puncta M radiis osculi MR, distantia AR vbique sit eiusdem magnitudinis. Hic primo statim patet huic problemati satisfacere curuam ex euolutione circuli natam, cuius centrum sit in puncto A, radius vero distantiae propositae AR aequalis. Descripto enim centro A radio AC circulo, si peripheriae filum circumplicetur, quod ex C euolutum producat curuam CM, eius radius osculi in M erit recta MR, circulum in R tangens, ita vt. puncti R distantia a puncto A vbique sit eadem.

Tab. I.
Fig. 1.

Fig. 2.

§. 2. Praeterea vero etiam euidentis est huic problemati omnes satisfacere circulos, quocumque radio descriptos, quorum centra propositam teneant a puncto A distantiam. Si enim circa punctum R, cuius distantia ab A est data, radio quo-

Fig. 3.

Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. VIII.

K

cun-

cunque R C describatur circulus CM, quia eius radius osculi in M est MR, distantia praescripta AR utique pro omnibus punctis M est eadem. Sicque problema propositum duplicem admittit solutionem, quarum altera praebet curvas ex evolutione circuli, cuius radius AC datur, natas, altera vero complectitur infinities-infinitos circulos, quorum centra a puncto A datam teneant distantiam. Ex quo iam intelligimus, solutionem istius problematis analyticam ita comparatam esse debere, ut ambas solutiones memoratas in se complectatur.

§. 3. At vero solutio analytica haud parum debet esse ardua, propterea quod radius osculi, qui per differentialia secundi gradus determinatur, in computum ingreditur. Interim tamen haec solutio sequenti modo commodissime institui posse videtur. Posita distantia data $AR = a$, pro puncto curvae quocunque M vocetur distantia $AM = z$, ductaque ad M tangente MP, in eam ex A demittatur perpendiculum AP, quod vocemus $AP = p$, ac primo quidem quaeramus aequationem inter has binas variables $AM = z$ et $AP = p$, quandoquidem hinc deinceps haud difficulter aequatio inter coordinatas solitas deduci potest. Has autem binas variables ideo eligi convenit, quod ex iis radius osculi MR simplicissime exprimi potest, siquidem habetur $MR = \frac{z \partial z}{\partial p}$, ita ut tantum differentialia primi gradus inuoluat.

§. 4. Quod si iam ex A ad radium osculi MR ducatur normalis AQ, quae tangenti MP erit parallela et aequalis, erit quoque $MQ = AP = p$, ideoque $QR = \frac{z \partial z}{\partial p} - p$. Quoniam igitur est $AQ = \sqrt{(zz - pp)}$, ob $AR = a$ habebitur ista aequatio pro curua quaesita:

$$aa = (zz - pp) + \left(\frac{z \partial z}{\partial p} - p\right)^2, \text{ siue}$$

$$aa = zz - pp + \frac{(z \partial z - p \partial p)^2}{\partial p^2}.$$

Quare

Quare si ponamus $z z - p p = t t$, ita ut sit

$$t = \sqrt{z z - p p} = M P = A Q,$$

statim habemus hanc aequationem maxime concinnam:

$$a a = t t + \frac{t t \partial t^2}{\partial p^2}, \text{ ideoque}$$

$$a a \partial p^2 = t t (\partial p^2 + \partial t^2),$$

quae duas tantum continet variables p et t , unde elicitur

$$\partial p = \frac{t \partial t}{\sqrt{a a - t t}}.$$

§. 5. Quanquam iam integratio est facillima, antequam eius integrale consideremus, manifestum est huic aequationi differentiali satisfacere valorem $t = a$, quoniam hinc fractionis $\frac{t \partial t}{\sqrt{a a - t t}}$ tam numerator quam denominator evanescunt. Hoc autem accuratius ita ostendi potest. Quoniam immediate deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\partial p \sqrt{a a - t t} - t \partial t = 0,$$

haec ad formam $M \partial V = 0$ reducta praebet

$$\sqrt{a a - t t} (\partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{a a - t t}}) = 0,$$

ita ut hic sit

$$M = \sqrt{a a - t t} \text{ et } \partial V = \partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{a a - t t}},$$

Perspicuum autem est, quoties solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem $M \partial V = 0$, eam complecti geminam solutionem, alteram $M = 0$, alteram vero $\partial V = 0$, ex qua posteriore demum integrando prodit $V = \text{Const}$. Neque igitur mirandum est priorem solutionem $M = 0$ non in altera $V = C$ contineri, multoque minus paradoxon videri debet quod saepenumero aequationi differentiali eiusmodi valores satisfacere queant, qui in integrali completo non contineantur.

§. 6. Cum igitur nostro casu fit $M = \sqrt{(aa - tt)}$ et $\partial V = \partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$, hinc aequatio inuenta duplicem manifesto inuoluit solutionem; ac prior quidem statim sequitur ex valore $M = \sqrt{(aa - tt)} = 0$, qui dat $t = a$, vnde cum sit $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $p = \sqrt{(zz - aa)}$; ex quo perspicuum est in figura interuallum QR euanescere, et interuallum AQ esse constans, quae conditio satis clare curuam ex euolutione circuli, cuius radius = AQ, natam declarat, quod idem vero etiam analytice ex ipsa aequatione $p = \sqrt{(zz - aa)}$ ostendi potest.

Tab. I. §. 7. Hunc in finem accipiamus rectam quandam AC
Fig. 4. pro axe fixo, ac vocemus angulum CAM = Φ , et pro puncto curuae proximo erit $Am = z + \partial z$ et angulus MAM = $\partial \Phi$, sicque descripto centro A arcu M p erit $mp = \partial z$ et $Mp = z \partial \Phi$, vnde elementum curuae nascitur

$$Mm = \sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}.$$

Hinc iam similitudo triangulorum mMp et mA P praebet:

$$Mm : Mp = mA : AP = MA : AP, \text{ siue}$$

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)} : z \partial \Phi = z : p,$$

vnde fit $p = \frac{z z \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + z z \partial \Phi^2)}}$. Quoniam igitur inuenimus $p = \sqrt{(zz - aa)}$, sumtis quadratis. erit

$$zz - aa = \frac{z^2 \partial \Phi^2}{\partial z^2 + z z \partial \Phi^2}.$$

vnde fit $\partial \Phi = \frac{\partial z \sqrt{(zz - aa)}}{az}$, quae formula, ponendo

$$\sqrt{(zz - aa)} = v,$$

ob $zz = aa + vv$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{v \partial v}{aa + vv}$, ab irrationalitate

liberata praebet $\partial \Phi = \frac{v \partial v}{a(aa + vv)}$, siue $\partial \Phi = \frac{\partial v}{a} - \frac{a \partial v}{aa + vv}$

vnde integrando colligitur $\Phi = \frac{v}{a} - A \text{ tang. } \frac{v}{a}$.

§. 8. Denotet ω angulum cuius tangens est $\frac{v}{a}$, ita vt fit $v = a \text{ tang. } \omega$, ideoque $z = \frac{a}{\cos \omega}$, hincque porro angulus

lus $\Phi = \text{tang. } \omega - \omega$. Ad has formulas construendas centro A, radio AC = a, describamus circulum, in quo capiamus CR = a tang. ω , cui aequalem sumamus tangentem circuli RM, Tab. I. ita ut sit RM = a tang. ω , unde ducta recta AM, ob AR = a Fig. 5. euidens est fore angulum RAM = ω , hincque ipsam rectam AM = $\frac{a}{\text{cof } \omega}$, sicque haec recta AM aequatur nostrae lineae z. Praeterea vero cum sit angulus CAR = $\frac{CR}{CA} = \text{tang. } \omega$, si angulus MAR = ω ab eo subtrahatur, remanebit angulus CAM = tang. $\omega - \omega$, ideoque CAM = Φ , sicque punctum M reuera erit in curua quaesita, quam ergo ob MR = CR patet generari ex euolutione arcus circuli CR, quae est prior solutio initio commemorata.

§. 9. Altera vero solutio petenda est ex aequatione differentiali $\partial V = 0$, siue

$$\partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{aa - tt}} = 0,$$

cuius integrale dat $p + \sqrt{aa - tt} = c$. Quia vero est $t = \sqrt{zz - pp}$, erit $\sqrt{aa - tt} = \sqrt{aa - zz + pp}$, sicque aequatio nostra erit: $\sqrt{aa - zz + pp} = c - p$; sumtisque quadratis $aa - zz = cc - 2cp$, unde deducimus

$$p = \frac{cc - aa + zz}{2c}.$$

Modo ante autem vidimus, posito angulo CAM = Φ , esse

$$p = \frac{zz \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}};$$

quare si breuitatis gratia ponamus $cc - aa = bb$, erit

$$\frac{zczz \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}} = bb + zz,$$

ex qua aequatione elicitur:

$$\partial \Phi = \frac{(bb + zz) \partial z}{z \sqrt{(+cczz - (bb + zz)^2)}};$$

quae aequatio, quantumuis perplexa, tamen praeter circulos nullas

nullas alias curvas in se complectitur, quod quomodo eueniat nobis est ostendendum.

§. 10. Quo hanc formulam simpliciore reddamus simulque litterarum numerum diminuamus, ponamus $z z = b b v$, vt fit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{2v}$, tum vero ponatur $4 c c = (2n + 2) b b$, vbi meminisse oportet esse $b b = c c - a a$, quo facto nostra aequatio fiet

$$\partial \Phi = \frac{(1+v) \partial v}{2v \sqrt{(2nv - vv - 1)}}$$

quae aequatio commode in duas partes resoluitur hoc modo:

$$2 \partial \Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} + \frac{\partial v}{v \sqrt{(2nv - vv - 1)}}$$

in qua posteriore parte si ponamus $v = \frac{1}{u}$, habebimus hanc aequationem integrandam:

$$2 \partial \Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} - \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu - uu - 1)}}$$

sicque sufficiet altervtram tantum partem integrasse.

§. 11. Pro priore parte introducamus quempiam angulum θ , ponendo $v = a + \beta \cos. \theta$, et quantitas $2nv - vv - 1$ induet hanc formam:

$$\begin{aligned} & 2n\alpha + 2n\beta \cos. \theta - \beta^2 \cos. \theta \\ & - \alpha\alpha - 2\alpha\beta \cos. \theta \\ & - 1 \end{aligned}$$

vbi primo termini $\cos. \theta$ inuoluentes tollantur, quod fit sumendo $\alpha = n$, tum vero statuatur $2\alpha n - \alpha\alpha - 1 = \beta\beta$, vt ista forma transeat in $\beta\beta \sin. \theta^2$. Quia vero est $\alpha = n$, altera littera β ex hac aequatione definietur:

$$2nn - nn - 1 = nn - 1 = \beta\beta,$$

ideoque est $\beta = \sqrt{(nn - 1)}$, atque hinc prior formula $\frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}$ transmutatur in hanc: $-\partial \theta$, cuius ergo integrale est $-\theta$. Cum igitur posuerimus $v = n + \cos. \theta \cdot \sqrt{(nn - 1)}$, erit $\cos. \theta = \frac{v - n}{\sqrt{(nn - 1)}}$
ideo-

ideoque $\theta = A \operatorname{cof.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$. Simili modo erit integrale posterioris partis

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu-uu-1)}} = -A \operatorname{cof.} \frac{u-n}{\sqrt{(nn-1)}} = -A \operatorname{cof.} \frac{1-nv}{\sqrt{(nn-1)}},$$

vnde conficitur integrale quaesitum:

$$2\Phi = -A \operatorname{cof.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} + A \operatorname{cof.} \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}} + C.$$

§. 12. Hinc igitur si priorem arcum, vti fecimus, per θ designemus, posteriorem vero per η , ita vt sit $2\Phi = \eta - \theta$, quoniam habemus:

$$\operatorname{cof.} \theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et } \operatorname{cof.} \eta = \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}}, \text{ erit}$$

$$\operatorname{fin.} \theta = \frac{\sqrt{(2nv-uv-1)}}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et } \operatorname{fin.} \eta = \frac{\sqrt{(2nv-uv-1)}}{v\sqrt{(nn-1)}}.$$

Hinc iam cum sit

$$\operatorname{fin.} 2\Phi = \operatorname{fin.} \eta \operatorname{cof.} \theta - \operatorname{cof.} \eta \operatorname{fin.} \theta \text{ et}$$

$$\operatorname{cof.} 2\Phi = \operatorname{cof.} \eta \operatorname{cof.} \theta + \operatorname{fin.} \eta \operatorname{fin.} \theta,$$

erit factis substitutionibus:

$$\operatorname{fin.} 2\Phi = \frac{(v-1)\sqrt{(2nv-uv-1)}}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$\operatorname{cof.} 2\Phi = \frac{(1+n)v-uv-1}{(n-1)v},$$

atque hinc porro habebimus:

$$1 + \operatorname{cof.} 2\Phi = 2 \operatorname{cof.} \Phi^2 = \frac{2nv-uv-1}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$1 - \operatorname{cof.} 2\Phi = 2 \operatorname{fin.} \Phi^2 = \frac{(v-1)^2}{(n-1)v}.$$

§. 13. Cum nunc sit angulus $CAM = \Phi$ et $AM = z$, Tab. I. ob $zz = bbv$, erit $v = \frac{zz}{bb}$; tum vero ducta applicata MX , Fig. 4. si vocentur coordinatae $AX = x$ et $XM = y$, erit primo $zz = xx + yy$, tum vero $\operatorname{fin.} \Phi = \frac{y}{z}$; vnde si isti valores loco Φ et v substituantur, nanciscemur aequationem inter x et y pro curua quaesita: $\frac{2yy}{zz} = \frac{(zz-bb)^2}{bb(n-1)zz}$, siue reductione facta

by

$by \sqrt{(2n-2)} = zz - bb = xx + yy - bb,$
 quae manifesto est pro circulo. Sumimus autem

$$4cc = (2n+2)bb,$$

ficque erit $n = \frac{2cc-bb}{bb}$, ideoque $n-1 = \frac{2(cc-bb)}{bb}$. Porro
 autem posueramus $cc - aa = bb$, ita ut sit $cc = aa + bb$
 et $n-1 = \frac{2aa}{bb}$, consequenter $\sqrt{2(n-1)} = \frac{2a}{b}$, unde ae-
 quatio nostra finalis pro curva quaesita erit:

$$2ay = xx + yy - bb,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$xx + (y-a)^2 = bb + aa.$$

§. 14. Ad hanc aequationem construendam ex A ad
 Tab. I. axem CA erigatur perpendicularum AI = a, ductaque axi pa-
 Fig. 6. rallela IO erit OM = y - a et IO = x, unde ducta recta
 IM erit

$$IM^2 = xx + (y-a)^2 = aa + bb,$$

ideoque constans, et quidem pro lubitu accipienda, quia bb est
 constans arbitraria. Vnde patet, curvam quaesitam esse circu-
 lum, radio quocunque circa centrum I descriptum, existente
 intervallo AI = a, quae sola conditio hic est spectanda, ut
 sit AI = a, propterea quod positio axis AC arbitrio nostro
 relinquatur, id quod etiam calculus ostenderet, si in vltima ae-
 quatione integrali $2\phi = \eta - \theta$ constantem adiecissemus, quip-
 pe qua ratione vbique angulus MAC quantitate data fuisset
 auctus vel minutus, atque hinc discimus, praeter binas solu-
 tiones, quas nobis synthesis exhibuit, nullas alias dari curvas
 quaesito satisfaciens.

Alia Solutio concinnior eiusdem problematis.

§. 15. Si quis immediate ex binis coordinatis x et y solutionem huius problematis tentare vellet, is in formulas prorsus inextricabiles incideret, in quibus non solum quadrata differentialium secundorum occurrerent, sed etiam haec differentialia cum ipsis coordinatis ac differentialibus primis ita forent permixta, vt nullo modo solutio sperari posset. Sequenti autem modo solutio multo elegantior quam praecedens obtineri poterit, si statim ab initio amplitudo curvae rite in computum ducatur.

§. 16. Ducto igitur, per datum punctum A , axe fixo AB , Tab. I. radium osculi MR secante in N ; vocetur angulus $ANM = \Phi$, Fig. 7. qui amplitudinem arcus AM metietur, siquidem axis AB ad curvam in A fuerit normalis, quae tamen conditio ad solutionem non est necessaria. Vocetur porro intervallum $AN = u$, sic demisso ex A in radium osculi MR perpendicularo AP , erit $AP = u \sin. \Phi$ et $NP = u \cos. \Phi$. Ponatur autem breuitatis gratia $AP = v = u \sin. \Phi$. Eaedem denominationes porro transferantur in radium osculi proximum mr ; et quia angulus $Anm = \Phi + \partial \Phi$, erit angulus $MRm = \partial \Phi$, pariter ac angulus PAp ; vnde si recta Ap secet radium osculi MR in q , ob $Ap = v + \partial v$, erit $pq = \partial v$ et $Pq = v \partial \Phi$. Hinc igitur primo erit $Rq = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = Rp$. Quodsi insuper vocetur $MP = p$, vt sit $mp = p + \partial p = Mq$, erit manifesto $\partial p = v \partial \Phi$, ideoque $p = \int v \partial \Phi = MP$.

§. 17. Cum nunc nostrum problema postulet vt intervallum AR habeat magnitudinem constantem $= a$, triangulum rectangulum APR statim nobis dat hanc aequationem:

$$a a = v v + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2},$$

vnde colligimus istam:

Nova Acta Acad. Imp. Sc. T. VIII.

L

$\partial \Phi$

$$\partial \Phi \sqrt{(a a - v v)} = \partial v,$$

quae cum forma generali $M \partial V = 0$ comparata dat

$$M = \sqrt{(a a - v v)} \text{ et } \partial V = \partial \Phi - \frac{\partial v}{\sqrt{(a a - v v)}},$$

vnde manifesto duplex solutio deducitur: Prior scilicet $M = 0$ dat $v = a$, posterior vero $V = C$ praebet $\Phi - A \text{ fin. } \frac{v}{a} = C$; neque iam difficile erit hinc ambas solutiones initio commemoratas deducere.

§. 18. Pro priore solutione, qua inuenimus $v = a$, erit interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = 0$, ita vt iam ipsa recta MP futura sit radius osculi, cuius ergo quantitas erit

$$MP = \int v \partial \Phi = a \Phi.$$

Vnde patet, quia punctum P perpetuo eandem distantiam a puncto A seruat, scilicet $AP = a$, euolutam curuae quaesitae esse circulum, centro A , radio $AP = a$ descriptum, atque ipsam rectam $MP = a \Phi$ aequari arcui huius circuli iam euoluto.

§. 19. Pro altera solutione, quae dedit $\Phi - A \text{ fin. } \frac{v}{a} = C$, erit $\frac{v}{a} = \text{fin.} (\Phi - C)$; vbi euidentis est constantem C tuto negligi posse, propterea quod positio axis assumpti AB ab arbitrio nostro pendet, ita vt habeamus $v = a \text{ fin. } \Phi$; vnde colligitur primo interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \text{ cos. } \Phi$, deinde interuallum $MP = -a \text{ cos. } \Phi + b$. Hinc ipse radius osculi concluditur $MR = b$, ideoque constans; vnde manifestum est curuam quaesitam hoc casu fore circulum, radio arbitrario $= b$ descriptum, pro cuius positione cum sit $AP = v = u \text{ fin. } \Phi = a \text{ fin. } \Phi$, hinc fit $u = AN = a$, ita vt punctum N sit fixum adeoque centrum circuli inuenti. Quia enim interuallum

lum $NP = a \cos. \Phi$ et $MP = -a \cos. \Phi + b$, erit ipsa recta $NM = b$, ideoque punctum R in N incidet.

§. 20. Sin autem constantem illam C praetermittere nolimus, ponamusque $C = \alpha$, habebimus $v = a \sin. (\Phi - \alpha)$, hincque interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \cos. (\Phi - \alpha)$ et interuallum $MP = -a \cos. (\Phi - \alpha) + b$, vnde ipse radius osculi prodit $MR = b$, vt ante. Quoniam porro erat $v = u \sin. \Phi$, hinc colligitur $AN = u = \frac{a \sin. (\Phi - \alpha)}{\sin. \Phi}$, hincque porro

$$NP = u \cos. \Phi = \frac{a \sin. (\Phi - \alpha) \cos. \Phi}{\sin. \Phi},$$

cui si addatur $MP = -a \cos. (\Phi - \alpha) + b$, erit interuallum

$$NM = -\frac{a \sin. \alpha}{\sin. \Phi} + b.$$

Quoniam igitur inuenimus $MR = b$, erit $NR = \frac{a \sin. \alpha}{\sin. \Phi}$.

§. 21. Quo haec clariora euadant, ex R in axem AB ducatur normalis RS , et ob angulum $RNS = \Phi$, erit

$$RS = a \sin. \alpha \text{ et } NS = \frac{a \sin. \alpha \cos. \Phi}{\sin. \Phi};$$

ante vero inuenimus

$$AN = u = \frac{a \sin. (\Phi - \alpha)}{\sin. \Phi},$$

quibus coniunctis prodit interuallum

$$AS = \frac{a \sin. \alpha \cos. \Phi + a \sin. (\Phi - \alpha)}{\sin. \Phi}.$$

Quia vero

$$\sin. (\Phi - \alpha) = \sin. \Phi \cos. \alpha - \cos. \Phi \sin. \alpha,$$

erit hoc interuallum $AS = a \cos. \alpha$; vnde patet punctum R esse fixum, eiusque distantiam $AR = a$, simulque angulum $SAR = \alpha$, quae solutio perfecte conuenit cum praecedente.

Applicatio principii
quo Illustris de la Grange geminas huiusmodi Problema-
tum solutiones inter se conciliare est adortus.

§. 22. Quando solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem: $M \partial V = 0$, ita ut factor finitus M non pro lubitu, sed ex ipsa indole problematis accesserit; tum manifestum est tale problema admittere duas solutiones, alteram aequatione finita $M = 0$, alteram vero aequatione differentiali $\partial V = 0$ contentam. His igitur casibus nulla plane ratio adest, cur prior harum solutionum in posteriore inuoluta esse debeat, aequae parum ac si problema algebraicum ad aequationem pluribus factoribus constantem perducit, ubi singuli factores seorsim solutiones praebere solent nullo modo a se inuicem dependentes. Neque ergo his casibus principium Ill. de la Grange in usum vocari poterit.

§. 23. Plerumque autem usu venire solet, ut factor ille finitus M non aperte in aequationem finalem ingrediatur, sed demum, dum aequatio integrabilis redditur, in subsidium vocari solet, quo casu utique iste factor arcto vinculo cum ipsa aequatione differentiali cohaeret. Veluti si peruentum fuerit ad huiusmodi aequationem differentialem: $p \partial x + q \partial y = 0$, quae sponte integrationem non admittat, sed demum per formulam M diuisa integrabilis euadat, tum istam aequationem hoc modo repraesentari conueniet: $M \cdot \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ita ut hic sit $\partial V = \frac{p \partial x + q \partial y}{M}$, tum utique duae habebuntur solutiones: altera finita $M = 0$, altera differentialis $\frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ex qua integrando elicitur: $\int \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = \text{Const.}$ Hoc ergo casu prior ille factor M ab indole functionum p et q pendet, atque principium memoratum eum in finem excogitatum videtur,

dētur, quemadmodum ex aequatione integrali:

$$\int \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = C,$$

altera solutio finita $M = 0$ elici queat.

§. 24. Ad hoc praestandum vir Ill. iubet aequationem integratam, postquam certo modo in ordinem fuerit reducta, denuo differentiare, ita ut etiam constans per integrationem ingressa tanquam variabilis tractetur, quo pacto ad talem aequationem $P \partial x + Q \partial y + Q \partial C = 0$, peruenietur; tum vero coefficientem ipsius ∂C nihilo aequalem statuit et ex aequatione $R = 0$ valorem ipsius constantis C per ambas variables x et y definit, atque affirmat, si iste valor loco C in ipsa aequatione integrali substituatur, tum prodituram esse aequationem illam finitam $M = 0$, ficque hanc aequationem finitam certo modo in aequatione integrali contineri esse censendam; quanquam equidem hanc conclusionem minus perspicio, propterea quod si in aequatione integrata constans ut variabilis tractetur, haec aequatio non amplius pro integrali haberi potest.

§. 25. Applicemus autem hoc principium ad solutionem §. 5. inuentam: $\partial p \sqrt{aa - tt} - t \partial t = 0$, quae ad hanc formam:

$$\partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{aa - tt}} = 0,$$

reducta et integrata praebet $p + \sqrt{aa - tt} = c$, unde irrationalitatem tollendo prodit: $aa - tt = cc - 2cp + pp$, quae differentiata, spectando etiam c ut variabile, praebet:

$$- 2t \partial t = 2c \partial c - 2c \partial p - 2p \partial c + 2p \partial p,$$

vbi coefficientis ipsius ∂c est $2(c - p)$, qui nihilo aequatus dat $c = p$. Hic iam valor in aequatione integrata loco c , substitutus dat $p + \sqrt{aa - tt} = p$, siue $\sqrt{aa - tt} = 0$, quae

vtique est prior nostra solutio ex factore finito conclusa, scilicet $t = a$. Quia autem naturae rei repugnat, constanti per integrationem ingressae c valorem variabilem p tribui, neuti-
quam video, quomodo dici queat, solutionem illam finitam $t = a$ in aequatione integrali contineri.

§. 26. Deinde etiam nullam rationem perspicio, cur aequatio integralis, antequam constanti c variabilitas tribuitur, ab irrationalitate liberari debeat. Si enim hoc principium immediate applicare vellemus, ipsamque aequationem integram primo inuentam differentiari, coëfficiens ipsius ∂c foret vni-
tas, vnde nihil plane sequeretur. Praetermissa autem reduc-
tione ad rationalitatem hac ratione quicquid lubuerit concludi
posset. Si enim aequatio integrata hac forma repraesentetur:

$$p + q + \sqrt{(aa - tt)} = c + q,$$

sumtisque vtrinque quadratis differentiatio instituatur, coëffi-
ciens ipsius ∂c erit $2(c + q)$, vnde deducitur $c = -q$, qui
valor in ipsa aequatione integrali substitutus daret

$$p + \sqrt{(aa - tt)} = -q,$$

vbi q denotare posset functionem quamcunque variarum p
et t . Nemini autem in mentem venire poterit talem solutio-
nem problematis admittere.

§. 27. Nullum autem est dubium, quia vir Ill. men-
tem suam non satis clare exposuerit, aut quasdam rationes ad
intelligendum necessarias reticuerit, quas equidem supplere
non valeo, vnde vberior explicatio super hoc nouo principio,
in quo Ill. Auctor adeo insigne supplementum vniuersi Calculi
integralis constituit, maxime foret optanda.