

PROBLEMA GEOMETRICVM.

OB SINGVLARIA SYMTOMATA
IMPRIMIS MEMORABILE.

Auctore

L. E V L E R O.

Conuent. exhib. die 10 Febr. 1777.

§. 1.

Problema, quod hic tractandum fuscipio, et quod nobis plura phaenomena maxime notatu digna offeret, ita se habet:

Problema.

Circa punctum fixum C describere lineam curuam AZ Tab. II.
eius indolis, vt area sectoris ACZ proportionalis sit quadrato Fig. 1.
arcus AZ.

Scilicet si vocetur arcus $AZ = s$, area vero sectoris $ACZ = \Sigma$, requiritur vt vbique $\Sigma : ss$ eandem teneat rationem, quam ita designemus, vt fit $ss = 4n\Sigma$.

§. 2. Primo obseruo huic problemati omnes spirales logarithmicas, circa centrum C descriptas, fatisfacere. Sit enim ζ angulus, sub quo omnes radii CZ spiralem secant, ita vt sit angulus $CZA = \zeta$, voceturque ipse radius $CZ = z$, et ducto radio proximo $Cz = z + \partial z$, centroque C arcu-
lo

lo ZO erit elementum $Oz = dz$ et ob angulum $ZzO = \zeta$, erit $ZO = dz \operatorname{tang.} z$ et $Zz = dz \operatorname{sec.} z = \frac{dz}{\operatorname{cos.} \zeta}$. Hinc ergo erit elementum arcus $ds = \frac{dz}{\operatorname{cos.} \zeta}$, ideoque $s = \frac{z}{\operatorname{cos.} \zeta}$, quae formula totam spiralis longitudinem ab ipso centro C vsque ad Z protensam denotat. Deinde ob $ZO = dz \operatorname{tang.} \zeta$, erit area trianguli $CZz = \frac{1}{2} z dz \operatorname{tang.} \zeta$, quod cum sit differentiale areae Σ , erit integrando $\Sigma = \frac{1}{4} z z \operatorname{tang.} \zeta$, quae area iterum ab ipso centro C est desumpta. Vi igitur nostri problematis, cum esse debeat $ss = 4n \Sigma$, his valoribus substitutis habebimus $\frac{z z}{\operatorname{cos.} \zeta^2} = n z z \operatorname{tang.} \zeta$, siue $1 = n \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cos.} \zeta$, ita vt hic fit $n = \frac{1}{\operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cos.} \zeta}$, vnde patet his casibus n adeo binario maiorem esse debere, siquidem erit $n = \frac{2}{\operatorname{fin.} 2\zeta}$. Hinc igitur, si detur numerus $n > 2$, duo anguli pro ζ dabuntur quaesito satisfaciennes. Cum enim fit $\operatorname{fin.} 2\zeta = \frac{2}{n}$, si fuerit $\operatorname{fin.} \alpha = \frac{2}{n}$, quoniam etiam est $\operatorname{fin.} (180^\circ - \alpha) = \frac{2}{n}$, erit duplici modo vel $\zeta = \frac{1}{2} \alpha$, vel $\zeta = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$.

§. 3. Haec autem solutio hoc laborat incommodo: quod tam arcus quam area initium ab ipso centro C capiant, a quo spirales demum post infinitos gyros vsque ad Z porriguntur. Deinde etiam haec solutio locum habere nequit, nisi numerus n sit binario maior, vnde haec solutio pro maxime particulari haberi debet, siquidem nullo modo locum habere potest, quando initium A, a quo tam arcus quam areae sint computandae, extra centrum C situm proponitur, tum vero etiam pro n numerus quicumque, siue maior, siue minor quam 2 praescribitur. Quamobrem operam dabimus, vt solutionem generalem problematis propositi eruamus; quod negotium triplici modo expedire licebit.

Prima Solutio

problematis propositi.

§. 4. Sit igitur vt ante arcus $AZ = s$ et area sectoris $ACZ = \Sigma$, ita vt esse debeat $ss = 4n\Sigma$. Iam pro luto bitu accipiatur axis CB , quem normalis ad curuam ZR fecet in puncto N ; tum vero ex C in istam normalem perpendiculariter ducatur recta CP , ac vocata distantia CZ , vt ante, $= z$, ponantur insuper $CP = t$ et $ZP = p$, ita vt fit $zz = pp + tt$, ductaque ad punctum proximum z recta Cz , in eamque normali ZO , triangulum ZzO simile erit triangulo CZP ; vnde cum fit $zO = \partial z$ et $Zz = \partial s$, habebitur ista proportio:

$$CZ : Zz = CP : zO = ZP : ZO$$

$$z : \partial s = t : \partial z = p :$$

vnde primo colligitur $ZO = \frac{p\partial s}{z}$ et $t\partial s = z\partial z$. Hinc ex valore ZO prodit elementum areae sectoris:

$$CZz = \partial \Sigma = \frac{1}{2} p \partial s,$$

ideoque $\Sigma = \frac{1}{2} \int p \partial s$. Quare cum esse debeat $ss = 4n\Sigma$, erit differentiando:

$$s \partial s = 2n \partial \Sigma = n p \partial s,$$

vnde colligitur $s = np$. Hinc insignis proprietas curuae quaesitae statim innotescit, qua arcus curuae AZ se semper habet ad rectam $ZP = p$ in ratione data, scilicet vt $n : 1$.

§. 5. Ducatur iam ex puncto z pariter normalis ad curuam zR priori in R occurrens, eritque ZR radius osculi curuae quaesitae, quem nominemus $= r$. In hanc porro normalem zR ex centro C demittatur quoque perpendicularum $Cp = t + \partial t$, priorem secans in π , et cum iam fit $zp = p + \partial p$, erit quoque $Z\pi = p + \partial p$, vnde colligitur $P\pi = \partial p$ et

$\pi p = \partial t$, ob omnes angulos rectos. Hinc quoque patet, fore
 angulum $Z R z$ aequalem $P C \pi$; vnde sequitur triangulum
 $P C \pi \sim$ triang. $Z R z$, hincque colligitur $\partial p : t = \partial s : r$, ergo
 $r = \frac{t \partial s}{\partial p}$. Supra autem vidimus esse $s = n p$, ideoque $\partial s = n \partial p$,
 quo valore loco ∂s substituto erit $r = n t$, quae est altera in-
 signis proprietas huius curvae, scilicet vt eius radius osculi
 vbique ad rectam $O P = t$ datam teneat rationem, vt $n : 1$;
 vnde patet in hac curua vbique esse arcum $A Z = s$ ad ra-
 dium osculi $Z R = r$ vti $Z P : C P$.

§. 6. Vocemus iam angulum $C N Z = \Phi$, qui angu-
 lus amplitudinem curvae metitur, et cum fit $C \pi z = \Phi + \partial \Phi$,
 erit angulus $Z R z = \partial \Phi = P C \pi$, vnde fit $P \pi = t \partial \Phi = \partial p$,
 ideoque $p = \int t \partial \Phi$. Porro quia $\pi p = \partial t$, erit

$$R p = \frac{\partial t}{\partial \Phi} = P R,$$

vnde componitur radius osculi

$$r = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi.$$

Quare cum esse debeat $r = n t$, habebimus istam aequationem,
 duas tantum variables continentem: $n t = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi$, quae
 tota solutio problematis nostri continetur; ex qua ergo quan-
 titatem t per angulum Φ investigari oportet. Inuenta autem
 hoc modo recta t , vltro se offert formula integralis:

$$\int t \partial \Phi = n t - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = p.$$

§. 7. Vt nunc aequationem inuentam a signo integra-
 li liberemus, ea differentiatam, sumto elemento $\partial \Phi$ constante,
 dabit hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$n \partial t = \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi} + t \partial \Phi, \text{ siue}$$

$$t - \frac{n \partial t}{\partial \Phi} + \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = 0,$$

quae forma ita est comparata, vt ei certo satisfaciat huiusmo-
 di

hi valor: $t = A e^{\alpha \Phi}$; hinc enim fit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} \text{ et } \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = A \alpha \alpha e^{\alpha \Phi},$$

quibus substitutis erit $1 - n\alpha + \alpha\alpha = 0$, ita ut α debeat esse radix istius aequationis quadraticae; unde duplici modo fit

$$\alpha = \frac{1}{2}n \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}nn - 1\right)},$$

hinc si altera radix indicetur per β , etiam satisfaciet formula $t = B e^{\beta \Phi}$. Manifestum autem est aequationi inuentae etiam satisfacturum esse valorem ex his duobus compositum, scilicet $t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}$, ubi litterae A et B sunt binae constantes per duplicem integrationem ingressae; unde patet, hanc aequationem continere integrale completum.

§. 8. Quodsi ergo propositus fuerit numerus n , ut fiat $ss = 4n\Sigma$, ex eo quaerantur ambo numeri α et β , ita ut sit

$$\alpha = \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}nn - 1\right)} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}nn - 1\right)},$$

ideoque $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, qui ergo erunt ambo reales, quando fuerit $n > 2$; contra vero imaginarii, quando $n < 2$; casu autem $n = 2$, ambo hi valores erunt inter se aequales, vterque scilicet $= 1$. Accommodemus autem solutionem nostram ad primum casum, quo $n > 2$, quandoquidem hinc bini reliqui casus facile deriuari poterunt. Cum igitur habeamus

$$t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi},$$

hinc statim innotescit radius osculi curuae:

$$r = nt = n(A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}).$$

Deinde cum fit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} + B \beta e^{\beta \Phi}, \text{ erit}$$

$$r \partial \Phi = nt - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = \beta A e^{\alpha \Phi} + \alpha B e^{\beta \Phi} = p;$$

ex quo statim patet, quia erat $s = np$, fore ipsum arcum curuae

$AZ = s = n(\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi})$,
 unde porro concluditur area sectoris $\Sigma = \frac{s s}{4n}$, hoc est

$$\Sigma = \frac{n}{4} (\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi})^2.$$

Denique cum fit $z z = p p + t t$, erit

$$z z = A^2 e^{2\alpha\Phi} (1 + \beta\beta) + B^2 e^{2\beta\Phi} (1 + \alpha\alpha) \\ + 2 A B e^{\alpha\Phi + \beta\Phi} (1 + \alpha\beta).$$

Quia autem $1 + \alpha\alpha = \alpha n$, $1 + \beta\beta = \beta n$ et $\alpha\beta = 1$, habebitur:

$$z z = \beta n A^2 e^{2\alpha\Phi} + \alpha n B^2 e^{2\beta\Phi} + 4 A B e^{\alpha\Phi + \beta\Phi},$$

§. 9. Quoniam constantes A et B ab arbitrio nostro pendent, eas ita sumamus, ut posito $\Phi = 0$ ipse arcus curvae AZ euanescat, hocque modo punctum Z in ipsum initium A incidat; posito autem $\Phi = 0$ fit $s = n(\beta A + \alpha B)$, ideoque statui oportet $\beta A = -\alpha B$. Quamobrem sumamus $A = C\alpha$ et $B = -C\beta$, quo facto nanciscimur hos valores:

$$t = C(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}) \text{ et } p = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

ex quibus porro habebimus:

$$s = n C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) \text{ et } r = n C(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}).$$

§. 10. Quo nunc ad coordinatas orthogonales calculum redigamus, quas ponamus $CX = x$ et $ZX = y$, vocemus tantisper intervallum $CN = u$, ut fiat $CP = t = u \sin.\Phi$ et $NP = u \cos.\Phi$, et quia $u = \frac{t}{\sin.\Phi}$, erit $NP = t \cos.\Phi$, hincque tota Normalis $ZN = p + t \cos.\Phi$, quam breuitatis gratia designemus per v , ita ut fit

$$v = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) + C \cos.\Phi (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}), \text{ siue}$$

$$v = C e^{\alpha\Phi} (1 + \alpha \cos.\Phi) - C e^{\beta\Phi} (1 + \beta \cos.\Phi).$$

Hinc iam primo deducimus applicatam $XZ = y = v \sin.\Phi$,
siue

sive $y = p \sin. \Phi + t \cos. \Phi$. Pro abscissa vero erit $CX = x = u - v \cos. \Phi$, ideoque

$$x = t \sin. \Phi - p \cos. \Phi.$$

Hinc ambe coordinatae x et y sequenti modo per angulum Φ exprimentur:

$$x = C e^{\alpha \Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) - C e^{\beta \Phi} (\beta \sin. \Phi - \cos. \Phi) \text{ et}$$

$$y = C e^{\alpha \Phi} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) - C e^{\beta \Phi} (\sin. \Phi + \beta \cos. \Phi).$$

Pro initio igitur, vbi $\Phi = 0$, sive pro puncto A, erit $x = 0$ et $y = C(\alpha - \beta)$; vnde patet punctum A puncto C perpendiculariter imminere, existente interuallo $CA = C(\alpha - \beta)$; vnde si statuamus hanc altitudinem $CA = a$, erit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$.

§. 11. Posito igitur pro curvae initio A interuallo $CA = a$, vt sit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$, consideremus reliqua symptomata curvae in hoc loco. Ac primo quidem, cum sit $s = 0$, erit quoque $p = 0$, ideoque recta CA tanget curuam in puncto A. Deinde pro hoc loco erit $t = a$; vnde cum sit radius osculi $r = nt$, in ipso initio A erit radius osculi curvae $= na$. Ante autem vidimus pro hoc puncto esse $x = 0$ et $y = a$, haecque symptomata semper locum habent, sive numerus n fuerit maior, sive minor quam Q; reliqua vero symptomata huius curvae plurimum pendent ab hoc valore, atque adeo maxime variantur, provti fuerit vel $n > 2$, vel $n = 2$, vel $n < 2$, quos ergo casus seorsim perpendamus.

Euolutio casus primi,

quo $n > 2$.

§. 12. Hic igitur ambae litterae α et β reales habebunt valores, eosque positivos, ergo posito $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$ pri-

modo habebimus:

$$Cp = t = \frac{a}{\alpha - \beta} (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}),$$

vbi erit $\alpha - \beta = \sqrt{(nn - 4)}$, hincque radius osculi $ZR = nt = r$. Pro initio autem modo vidimus esse $t = a$ et $r = na$. Quod si iam angulus Φ continuo augeatur, evidens est hanc quantitatem t , ideoque etiam radium osculi r continuo crescere, atque adeo in infinitum, quando angulus Φ in infinitum augetur; unde patet hanc curvam per infinitos gyros continuo maiores circa C reuolui, quod etiam elucet ex valore

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta} (e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}),$$

unde fit $s = np$. Quoniam enim aucto angulo Φ arcus s continuo increfcit, etiam interuallum ZP continuo augetur, atque adeo in infinitum vsque.

§. 13. Perpendamus autem etiam continuationem curvae in alteram partem ultra A , cui respondebunt anguli Φ negative sumti, et quoniam valor ipsius t in ipso puncto A erat $t = a$, curuam retro continuando huius lineae quantitas decrefcet, atque adeo alicubi euanescet, vbi scilicet erit $\alpha e^{\alpha \Phi} = \beta e^{\beta \Phi}$, unde sequitur $\Phi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\beta}{\alpha}$. Quia autem $l \beta = -l \alpha$, erit

$$\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-2l\alpha}{\sqrt{(nn - 4)}}$$

qui ergo valor ipsius Φ est negatiuus, ob $\alpha > \frac{1}{2}n$. Pro hoc porro puncto, vbi $t = 0$, manifesto radius CZ in curuam erit normalis, simulque radius osculi erit $= 0$. At vero pro eodem loco, vbi $\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta}$, erit

$$e^{\alpha \Phi} = \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} \text{ et } e^{\beta \Phi} = \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}},$$

hincque colligitur fore:

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta} (\alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} - \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} (1 - \alpha \alpha),$$

qui

qui ergo valor, ob $\alpha > 1$, est negativus, id quod necesse est, cum sit $p = \frac{s}{n}$, atque hoc casu arcus curvae s negativus accipiatur. Quod quo clarius appareat, sit iste arcus retro continuatus, in eoque E punctum, ubi $t = 0$, ideoque radius CE ad curvam normalis $= p$, ita ut sit ipse arcus $AE = n p = n CE$. In ipso autem hoc puncto E , quia radius osculi evanescit, satis tuto concludere licet curvam habere cuspidem, unde in partem contrariam reflectatur. Tum vero pro situ huius puncti E cognoscendo notetur esse angulum $BCE = -\Phi$, ita ut habeamus angulum $BCE = \frac{21\alpha}{\sqrt{(\pi n - 4)}}$, sicque hoc punctum E innotescit. Sin autem hunc angulum Φ negativum ultra istum terminum E augere velimus, quoniam, posito $\Phi = -\infty$, tam p quam s iterum evanescent, patet arcum AE non ultra terminum E progredi, sed in E necessario reflecti debere, eiusque valorem in contrarium sensum conuerti; atque haud difficulter intelligitur, nostrae curvae portionem ultra hunc terminum E in spiralem esse abituram, post infinitos gyros in ipso centro C terminandam. Quia enim, sumto $\Phi = \infty$, etiam arcus s evanescit, sequitur arcum ab E vsque ad centrum C porrectum praecise aequalem esse futurum arcui AE .

Tab. II.
Fig. 3.

§. 14. Haec autem omnia clariora reddentur, si praeter elementa haec usque usurpata insuper in computum introducamus angulum, quem curva in singulis punctis Z cum radio vectore CZ constituit. Ponamus igitur hunc angulum $CZA = \theta$, qui cum sit aequalis angulo ZCP , erit

$$\text{tang. } \theta = \frac{p}{r} = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}}$$

tum vero quia angulus $ACP = \text{ang. } CNZ = \Phi$, qui metitur amplitudinem arcus AZ , erit angulus $ACZ = \Phi - \theta$;
unde

vnde patet, translato puncto Z in A, seu sumto $\Phi = 0$, fore angulum $\theta = 0$, vnde manifesto fit pro hoc casu $CZA = 0$.

§. 15. Progrediamur nunc ab initio A per Z continuo ulterius in infinitum, et quia $\alpha > \beta$, evidens est angulum $AZC = \theta$ paulatim fieri continuo maiorem; statim enim ab initio, vbi Φ adhuc valde paruum, ob $e^{\alpha\Phi} = 1 + \alpha\Phi$ et $e^{\beta\Phi} = 1 + \beta\Phi$ erit

$$\text{tang. } \theta = \frac{\Phi(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta) + (\alpha\alpha - \beta\beta)\Phi} = \frac{\Phi}{1 + (\alpha + \beta)\Phi},$$

seu proxime $\theta = \Phi$. Vnde patet, quo longius progrediamur, istum angulum increfcere, neque vero ultra certum terminum augeri posse. Si enim amplitudo Φ statuatur infinita, ita vt curua iam per infinitos gyros a centro C recesserit, quia $\alpha > \beta$, terminus $e^{\beta\Phi}$ prae $e^{\alpha\Phi}$ euanescet, ficque tandem fiet $\text{tang. } \theta = \frac{1}{\alpha} = \beta$. Quare cum $\alpha\beta = 1$ et $\alpha > \beta$, semper erit $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, ideoque $\text{tang. } \theta < 1$; vnde patet limitem istum, ad quem angulus θ continuo magis propinquat, minorem esse quam 45° , ficque ista curua, postquam plures gyros perfecerit, tandem confundetur cum spirali logarithmica, quae a radiis secatur sub angulo, cuius tangens $= \beta$.

§. 16. Egrediamur nunc ab initio A continuo propius ad centrum C, quo casu amplitudo euadet negatiua. Statuamus igitur $\Phi = -\psi$, ita vt ψ sit amplitudo ab initio A retrorsum continuata, eritque

$$\text{tang. } \theta = \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi}},$$

vnde dum angulus ψ existit quam minimus, erit

$$\text{tang. } \theta = \frac{\psi(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = -\psi,$$

ita vt hic sit $\theta = -\psi$, quo indicatur, istum angulum in partem

tem contrariam conuerti, et continuo fieri maiorem. Mox autem iste angulus θ insignia capiet incrementa, atque adeo vsque ad angulum rectum increfcet, quod fit vbi tang. θ euadet infinita, siue vbi fit denominator $\alpha e^{\beta \psi} - \beta e^{\alpha \psi} = 0$; tum igitur erit sumtis logarithmis $l \alpha + \beta \psi = l \beta + \alpha \psi$, vnde colligitur amplitudo:

$$\psi = \frac{r}{\alpha - \beta} l \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2l\alpha}{\alpha - \beta},$$

siue $\psi = \frac{2l\alpha}{\sqrt{(n n - 4)}}$. Ponamus nunc hoc euenire in puncto E, ita vt radius CE hic ad curuam fit normalis, et quia $\theta = -90^\circ$, ob $\phi = -\psi$, erit angulus ACE $= 90^\circ - \psi$, sicque ψ dabit angulum BCE. Quoniam vero hic est $t = 0$ et ipsa distantia $z = \sqrt{(p p + t t)}$, erit haec distantia:

$$CE = p = \frac{a}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha \psi} - e^{-\beta \psi}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \frac{e^{\beta \psi} - e^{\alpha \psi}}{e^n \psi}$$

Cum igitur fit

$$\psi = \frac{2l\alpha}{\sqrt{(n n - 4)}} = \frac{2l\alpha}{\alpha - \beta}, \text{ erit}$$

$$e^{\alpha \psi} = \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha - \beta}}; e^{\beta \psi} = \alpha^{\frac{2\beta}{\alpha - \beta}} \text{ et}$$

$$e^{(\alpha + \beta)\psi} = \alpha^{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}}.$$

Vbi signum negatiuum tantum lineam p afficit, ipsa enim distantia z semper est positiuua.

§. 17. Nunc a puncto modo inuento E, vbi $\theta = -90^\circ$, vterius retro progrediamur, augendo scilicet amplitudinem ψ ultra terminum inuentum, atque denominator fractionis pro tang. θ inuentus euadet negatiuus, sicque angulus θ , qui hactenus fuerat negatiuus, hic subito signum mutabit, et curua ex puncto E in plagam contrariam inflectetur, ita vt in E cuspidem formauerit, et quo longius progrediamur, tang. θ

continuo magis diminuetur, neque tamen ultra certum terminum, quem cognoscemus statuendo amplitudinem $\psi = \infty$; tum autem fiet $\text{tang. } \theta = \frac{r}{p} = a$. Postquam igitur curua infinitos gyros continuo minores peregerit, tandem cum spirali logarithmica conueniet, cum radiis angulum faciente, cuius tangens $= a$, ideoque maior unitate, sicque iste angulus semper maior erit semirecto. Per se autem perspicuum est distantias s continuo magis imminui, atque adeo euanescere ob $e^{-\alpha\psi} = 0$ et $e^{-\beta\psi} = 0$.

Euolutio casus secundi,

quo $n = 2$.

§. 18. Hunc casum facile ex praecedente deriuabimus, ponendo $\alpha = \beta = 1$. Quoniam autem hoc casu in superioribus formulis tam numeratores quam denominatores euanescent, statuemus inter α et β infinite paruam differentiam, ponamusque $\alpha = 1 + \omega$ et $\beta = 1 - \omega$, sicque erit $\alpha - \beta = 2\omega$; praeterea vero

$$e^{\alpha\Phi} = e^{(1+\omega)\Phi} = e^{\Phi} (1 + \omega\Phi) \text{ et}$$

$$e^{\beta\Phi} = e^{(1-\omega)\Phi} = e^{\Phi} (1 - \omega\Phi).$$

His autem valoribus substitutis vbique tam numeratorem quam denominatorem per ω diuidere licebit, ita vt hoc pacto littera infinite parua introducta ω ex calculo excedat.

§. 19. Hoc igitur modo singulas formulas percurramus, ac primo quidem reperiemus $ZP = p = a\Phi e^{\Phi}$; hinc quia erat arcus $AZ = s = np$, hoc casu habebimus arcum $AZ = 2a\Phi e^{\Phi}$. Deinde prodibit simili modo interuallum $ZP = t = a(1 + \Phi)e^{\Phi}$, vnde simul radius osculi innotescet, scilicet $r = nt = 2a(1 + \Phi)e^{\Phi}$. Ex his autem coniunctis colligitur $\text{tang. } \theta = \frac{p}{t} = \frac{\Phi}{1 + \Phi}$, tum vero hinc etiam facile definiri poterit ipsa distantia:

CZ

$$CZ = ae^{\Phi} \sqrt{(1 + 2\Phi + 2\Phi\Phi)}.$$

Denique hic manet vt ante angulus $ACZ = \Phi - \theta$.

§. 20. Incipiamus hic quoque a puncto A, vbi $\Phi = 0$, ideoque $p = 0$ et $s = 0$, tum vero $t = a$, $r = 2a$ et angulus $\theta = 0$. Hinc autem, amplitudinem Φ progrediendo continuo magis augeamus, atque etiam angulus θ continuo magis increset, attamen nunquam certum terminum excedet; posito enim $\Phi = \infty$, erit tang. $\theta = 1$, ideoque $\theta = 45^\circ$, sicque ista curua in infinito confundetur cum spirali logarithmica semirectangula; multo tamen magis diuerget, quandoquidem pro spirali foret $z = ae^{\Phi}$; vnde patet hic distantias z esse infinites maiores pro paribus amplitudinibus. Ex quo perspicuum est hanc curuam prorsus vt casu praecedenti per spiras infinitas continuo longius a centro C recedere.

§. 21. Consideremus nunc etiam istam curuam retro continuatam, ac ponamus ψ loco $-\Phi$. Cum igitur sit $z = \frac{a}{e^{\psi}} \sqrt{(1 - 2\psi + 2\psi\psi)}$, euidentis est aucta amplitudine ψ denominatorem e^{ψ} multo magis increfcere quam numeratorem; vnde distantiae continuo euadent minores, et mox fere euanescent. Deinde cum iam ipse arcus negatiue sumtus sit $s = +\frac{2a\psi}{\psi}$, quam diu amplitudo ψ valde est parua, erit $s = \frac{2a\psi}{1+\psi}$; interim tamen, sumto $\psi = \infty$, etiam iste arcus iterum euanescit; ex quo perspicuum est longitudinem arcus tantum vsque ad certum terminum augeri, eoque superato rursus imminui: Alicubi igitur maximum nanciscetur valorem, quem differentiale huius formulae, nihilo aequatum, ostendet, vnde reperitur $\psi = 1$, hoc est, vbi amplitudo aequatur sinui toto, vnde iste valor maximus respondet amplitudini:

$$\psi = 57^\circ, 17', 45''$$

longitudo autem maxima huius arcus erit $= \frac{2a}{e}$, existente $e = 2,71828$; tum vero, ob $\psi = 1$, erit distantia a centro $z = \frac{a}{e}$, angulus autem θ hoc loco euadet rectus, angulusque ad centrum $\Phi - \theta = 90^\circ - \psi$, ideoque angulus

$$BCE = \psi = 57^\circ, 17', 45'';$$

vbi obseruetur casu praecedente, quo erat $n > 2$, angulum BCE semper fuisse minorem.

§. 22. Consideremus nunc rursus istam curuam ab A antrorsum continuatam, et cum vi problematis sit $ss = 8\Sigma$, denotante s arcum et Σ aream sectoris, ob $s = 2a\Phi e$, erit $\Sigma = \frac{1}{2}a^2\Phi^2 e^{2\Phi}$, ficque omnes areae, a puncto fixo A sumtae, quadratis arcuum ab eodem termino sumtorum vtique sunt proportionales; id quod etiam tenendum est de altera curuae portione a puncto A retrorsum versus centrum C procedente, vbi pro loco cuspidis E, quoniam inuenimus arcum $AE = \frac{2a}{e}$, erit area sectoris $AEC = \frac{aa}{2ee}$. Quando autem ultra centrum C versus E progredimur, arcus iterum diminuantur, et etiam areae sectorum iterum imminui sunt censendae; propterea quod in plagam contrariam vergunt. At vbi vsque ad centrum C fuerit peruentum, tam longitudo arcus quam area euanescent, id quod eueniet post infinitos gyros, qui tandem etiam cum spirali logarithmica semirectangula confundentur; propterea quod $\text{tang. } \theta = \frac{\psi^2}{\psi-1}$, qui valor sumto $\psi = \infty$ abit in vnitatem, fietque $\theta = 45^\circ$; ficque ista curua ita est comparata, vt tam in infinitum a centro recedens, quam proxime ad centrum accedens cum tali spirali conueniat.

§. 23. Cum igitur, si vicissim a centro C per infinitas spiras vsque ad punctum fixum A progrediamur, tota arcus.

cus longitudo evanescat, ideoque etiam area descripta: non solum punctum fixum A problemati nostro satisfaciet, sed etiam ipsum centrum C , ita ut omnes areae a centro C computatae proportionales sint quadratis arcuum ab eodem puncto C sumtorum. Namque si ut ante arcus quicumque AZ vocetur $= s$ et area sectoris $ACZ = \Sigma$, erit quoque totus arcus a centro C ad punctum indefinitum Z porrectus $= s$, eodemque modo area a centro C usque ad Z sumta $= \Sigma$, sicque etiam pro centro C erit $ss = 8\Sigma$, quae observatio etiam locum habet pro casu primo, quo $n > 2$, ubi ergo proprietates praescripta non solum ad punctum A sed etiam ad centrum C pertinere est censenda.

Euolutio casus tertii,
quo $n < 2$.

§. 24. Quo istum casum facilius in calculo tractari queamus, statuamus $n = 2 \cos. \gamma$, siquidem hoc modo omnes numeri binario minores exprimi possunt, et conditio praescripta nunc postulabit, ut sit $ss = 8\Sigma \cos. \gamma$; tum autem ambae litterae α et β nunc ita per imaginaria exprimentur, ut sit

$$\alpha = \cos. \gamma + \sqrt{-1} \sin. \gamma \quad \text{et} \quad \beta = \cos. \gamma - \sqrt{-1} \sin. \gamma.$$

Ponamus autem brevitatis gratia $\cos. \gamma = \mu$ et $\sin. \gamma = \nu$, ut sit

$$\alpha = \mu + \nu \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \beta = \mu - \nu \sqrt{-1},$$

sicque erit $\alpha - \beta = 2\nu \sqrt{-1}$.

§. 25. Euoluamus nunc ambas formulas exponentiales $e^{\alpha\Phi}$ et $e^{\beta\Phi}$, et quoniam ex computo Imaginariorum constat esse:

$$e^{\omega \sqrt{-1}} = \cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega \quad \text{et}$$

$$e^{-\omega \sqrt{-1}} = \cos. \omega - \sqrt{-1} \sin. \omega,$$

habemus primo: $e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} \cdot e^{\nu\Phi\sqrt{-1}}$, vnde facta reductione erit:

$$e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} (\cos. \nu\Phi + \sqrt{-1} \sin. \nu\Phi),$$

similique modo erit

$$e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi} (\cos. \nu\Phi - \sqrt{-1} \sin. \nu\Phi).$$

In formulis autem supra inuentis in casu primo occurrit expressio $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}$, cuius ergo valor per istam reductionem euadit $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi} = 2 e^{\mu\Phi} \cdot \sqrt{-1} \sin. \nu\Phi$. Deinde quoque occurrit formula $\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}$, quae reducta dabit:

$$1^{\circ}. \alpha e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} (\mu \cos. \nu\Phi - \nu \sin. \nu\Phi + \mu \sqrt{-1} \sin. \nu\Phi + \nu \sqrt{-1} \cos. \nu\Phi),$$

$$2^{\circ}. \beta e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi} (\mu \cos. \nu\Phi - \nu \sin. \nu\Phi - \mu \sqrt{-1} \sin. \nu\Phi - \nu \sqrt{-1} \cos. \nu\Phi),$$

vnde conficitur:

$$\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi} = 2 e^{\mu\Phi} \sqrt{-1} (\mu \sin. \nu\Phi + \nu \cos. \nu\Phi).$$

§. 26. His iam factis reductionibus, ob

$$\alpha - \beta = 2 \nu \sqrt{-1},$$

formulae in casu primo inuentae ad casum praesentem accommodari poterunt. Primo enim, quia supra habuimus

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta} (e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

pro casu praesente habebimus:

$$p = \frac{a e^{\mu\Phi} \sin. \nu\Phi}{\nu}, \text{ hinc porro}$$

$$s = \frac{2 \mu a e^{\mu\Phi} \sin. \nu\Phi}{\nu}.$$

Deinde erat

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta} (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}),$$

vnde pro casu praesenti erit:

t =

$$r = \frac{a}{v} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi),$$

Unde deductus est radius osculi:

$$r = nt = \frac{2\mu a}{v} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi).$$

Praeterea considerauimus angulum $ACT = \theta$, vidimusque esse tang. $\theta = \frac{p}{t}$, quamobrem nunc habebimus:

$$\text{tang. } \theta = \frac{\sin. \nu \Phi}{\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi} = \frac{1}{\mu + \nu \cos. \nu \Phi}.$$

Inuento autem angulo θ ostendimus esse angulum $ACZ = \Phi - \theta$. Denique posita ipsa distantia $CZ = z$, quoniam erat $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit nunc

$$z = \frac{a}{v} \cdot e^{\mu \Phi} \sqrt{[(\mu\mu + 1) \sin. \nu \Phi^2 + 2\mu\nu \sin. \nu \Phi \cos. \nu \Phi + \nu\nu \cos. \nu \Phi^2]}$$

quae expressio reducitur ad sequentem:

$$z = \frac{a}{v} e^{\mu \Phi} \sqrt{(1 + \mu\nu \sin. 2\nu\Phi - \mu\mu \cos. 2\nu\Phi)}.$$

§. 27. His praeparatis contemplemur attentius singula symptomata harum curuarum. Ac primo quidem sumta amplitudine $\Phi = 0$, pro termino initiali A habebimus $p = 0$, ideoque etiam $s = 0$; tum vero erit $t = a$, ideoque radius osculi in $A = 2\mu a$; porro habebimus $z = t = a$, ita vt prodeat, vti assumimus, interuallum $CA = a$, quae recta simul curuam in A tanget, siquidem fit tang. $\theta = 0$. Ab hoc autem termino A antrorsum progrediemur, dum amplitudinem Φ continuo augebimus; tum autem arcus s non perpetuo crescet, vt casu primo, quoniam sumto $\nu\Phi = \pi$ denuo fit $s = 0$, vnde interea valorem maximum acquisiuerit necesse est, quem indicat haec aequatio differentialis:

$$\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi = 0,$$

his casibus nempe, quibus tam t , quam r euanescent; vnde in his locis angulus θ fiet rectus, ita vt radius CZ ibi
in

in curuam sit normalis. Quoniam igitur ultra hunc terminum arcus s iterum decrefcit, necesse est vt curua quasi reflectatur et in partes contrarias vergat; ex quo patet, in omnibus his punctis curuam cuspidibus esse praeditam atque adeo curvaturam infinitae paruum esse habituram. Talia autem puncta adeo infinita dabuntur, ex aequatione:

$$\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi = 0$$

definienda; vnde cum sit $\mu = \cos. \gamma$ et $\nu = \sin. \gamma$, haec aequatio dabit:

$$\cos. \gamma \sin. \nu \Phi + \sin. \gamma \cos. \nu \Phi = 0,$$

ideoque $\sin. (\gamma + \nu \Phi) = 0$, quod manifesto euenit infinitis casibus, quibus est $\gamma + \nu \Phi$ vel $\pm \pi$, vel $\pm 2\pi$, vel $\pm 3\pi$, vel in genere $\pm i\pi$, vnde consequimur pro his curuis amplitudinem $\Phi = \frac{\pm i\pi - \gamma}{\nu}$. Ex quo intelligitur, hanc curuam antrorsum progrediendo infinitas habituram esse cuspides his amplitudinibus ordine respondentes:

$$1^{\circ}. \Phi = \frac{\pi - \gamma}{\nu},$$

$$2^{\circ}. \Phi = \frac{2\pi - \gamma}{\nu},$$

$$3^{\circ}. \Phi = \frac{3\pi - \gamma}{\nu},$$

$$4^{\circ}. \Phi = \frac{4\pi - \gamma}{\nu},$$

etc.

Pro his autem punctis longitudo arcus a termino A sumpta erit

$$1^{\circ}. s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)} \sin. (\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)},$$

$$2^{\circ}. s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)} \sin. (2\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}.$$

3^o.

$$3^{\circ}. s = \frac{2\mu a}{v} e^{\frac{\mu}{v}} (3\pi - \gamma) \sin.(3\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{v}} (3\pi - \gamma),$$

$$4^{\circ}. s = \frac{2\mu a}{v} e^{\frac{\mu}{v}} (4\pi - \gamma) \sin.(4\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{v}} (4\pi - \gamma),$$

etc.

etc.

§. 28. Iam obseruauimus in omnibus his punctis fore $t = 0$, ideoque $\text{tang. } \theta = \infty$, id quod etiam nostra formula indicat, quae ad hanc reduci potest: $\text{tang. } \theta = \frac{\sin. v \Phi}{\sin. (\gamma + v \Phi)}$. Hinc igitur quia angulus $ACZ = \Phi - \theta$, erit pro casibus modo memoratis:

$$1^{\circ}. \text{Ang. } ACZ = \frac{\pi(2-v)}{2v} - \frac{\gamma}{v},$$

$$2^{\circ}. \text{Ang. } ACZ = \frac{\pi(4-v)}{2v} - \frac{\gamma}{v},$$

$$3^{\circ}. \text{Ang. } ACZ = \frac{\pi(6-v)}{2v} - \frac{\gamma}{v},$$

$$4^{\circ}. \text{Ang. } ACZ = \frac{\pi(8-v)}{2v} - \frac{\gamma}{v},$$

etc.

Succinctius autem horum angulorum complementa, siue anguli BCZ exprimentur, hoc scilicet modo:

$$1^{\circ}. \text{Ang. } BCZ = \frac{\gamma}{v} - \frac{(1-v)\pi}{v},$$

$$2^{\circ}. \text{Ang. } BCZ = \frac{\gamma}{v} - \frac{(2-v)\pi}{v},$$

$$3^{\circ}. \text{Ang. } BCZ = \frac{\gamma}{v} - \frac{(3-v)\pi}{v},$$

$$4^{\circ}. \text{Ang. } BCZ = \frac{\gamma}{v} - \frac{(4-v)\pi}{v},$$

Denique ipsae distantiae $CZ = z$, quia ob $t = 0$ est $z = p$, erunt pro iis locis:

$$1^{\circ}. CZ = a e^{\frac{\mu}{v}} (\pi - \gamma),$$

$$2^{\circ}. CZ = a e^{\frac{\mu}{v}} (2\pi - \gamma),$$

$$3^{\circ}. CZ = a e^{\frac{\mu}{\nu}} (3\pi - \gamma),$$

$$4^{\circ}. CZ = a e^{\frac{\mu}{\nu}} (4\pi - \gamma),$$

etc.

§. 29. Eodem prorsus modo a termino A ad centrum C accedendo innumerabiles dabuntur cuspides, quae respondebunt sequentibus amplitudinibus negatiuis:

$$1^{\circ}. \Phi = \frac{-\gamma}{\nu}, \text{ (quae puncto E supra considerato responder),}$$

$$2^{\circ}. \Phi = \frac{-\pi - \gamma}{\nu},$$

$$3^{\circ}. \Phi = \frac{-2\pi - \gamma}{\nu},$$

$$4^{\circ}. \Phi = \frac{-3\pi - \gamma}{\nu},$$

etc. etc.

quae puncta continuo propius ad centrum C accedent, et per infinitas spiras, cuspidibus permixtas, tandem in centro C eualescent.

§. 30. Denique istae curuae a praecedentibus etiam in hoc discrepabunt, quod in infinitis locis longitudo arcus s euanescat. Cum enim sit $s = \frac{2\mu a e^{\mu\Phi}}{\nu} \sin.\nu\Phi$, hoc euenit, vbi fuerit Φ vel $\frac{\pi}{\nu}$, vel $\frac{2\pi}{\nu}$, vel $\frac{3\pi}{\nu}$, etc. vel etiam negatiue $\Phi = \frac{-\pi}{\nu}$, vel $\frac{-2\pi}{\nu}$, vel $\frac{-3\pi}{\nu}$, etc. Quare cum in omnibus istis locis sit longitudo arcus $s = 0$, ibidem quoque area Σ euanescet, id quod etiam in ipso centro C eueniet. Vnde concludimus praeter duo puncta A et C innumerabilia insuper alia dari puncta eiusdem indolis, vt areae a quolibet eorum computatae pariter proportionales sint quadratis arcuum ab iisdem punctis sumtorum. Postremo hic non est praeterendum, in omnibus istis punctis curuam a radiis CZ tangi, veluti

veluti euenit in puncto A; et quoniam est $\theta = 0$, pro singulis erit etiam angulus $ACZ = \Phi$, scilicet ipsi amplitudini aequalis, ex quo forma harum curuarum haud difficulter colligi potest.

Alia solutio problematis,
ex radio vectore $CZ = z$ et angulo descripto $ACZ = \omega$,
deriuata.

§. 31. Ex his binis variabilibus z et ω primo area $ACZ = \Sigma$ ita exprimitur, vt sit $\Sigma = \frac{1}{2} \int z z \partial \omega$; deinde vero pro arcu curuae $AZ = s$ habebimus:

$$s = \int \sqrt{(\partial z^2 + z z \partial \omega^2)},$$

quibus formulis inuentis nostrum problema postulat vt fit

$$s s = 4 n \Sigma = 2 n \int z z \partial \omega,$$

quae aequatio quo euolui queat, statuamus $z \partial \omega = q \partial z$, vt fit $\partial \omega = \frac{q \partial z}{z}$, sicque loco anguli ω nouam variabilem q introducimus, eritque $\int z z \partial \omega = \int q z \partial z$; tum vero fiet

$$\sqrt{(\partial z^2 + z z \partial \omega^2)} = \partial z \sqrt{(1 + q q)}.$$

Differentiemus nunc nostram aequationem, prodibitque $2 s \partial s = 2 n q z \partial z$, ideoque $s = \frac{n q z}{\sqrt{(1 + q q)}}$, quae denuo differentia-
ta praebet

$$\partial z \sqrt{(1 + q q)} = \frac{n q \partial z}{\sqrt{(1 + q q)}} + \frac{n z \partial q}{(1 + q q)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ducta in $(1 + q q)^{\frac{3}{2}}$ dat hanc aequationem rationalem:

$$\partial z (1 + q q)^2 = n q \partial z (1 + q q) + n z \partial q.$$

§. 32. Ista aequatio porro insigne hoc commodum praestat, vt binae variables a se inuicem separari queant; inde

enim deducitur $\frac{\partial z}{z} = \frac{+n \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, vnde quantitas z per q definiri poterit. Tum autem, cum fit $\partial \omega = \frac{q \partial z}{z}$, erit

$$\partial \omega = \frac{nq \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)},$$

ficque etiam angulus ω per eandem variabilem q determinabitur. His autem inuentis binae coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, sponte se produnt, ac pariter per solam variabilem q exprimentur: erit enim $x = z \sin. \omega$ et $y = z \cos. \omega$, id quod ad solutionem sufficere possit. Verum hic maxime ostendi conveniet, quomodo haec solutio cum praecedente consentiat. Hunc in finem magis evoluamus formulas inuentas, ac quoniam denominator duobus constat factoribus, formula pro $\frac{\partial z}{z}$ inuenta discerpatur in has partes:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{q \partial q}{1+qq} + \frac{(n-q) \partial q}{1-nq+qq},$$

vnde integrando colligitur:

$$lz = l\sqrt{(1+qq)} + \int \frac{(n-q) \partial q}{1-nq+qq}.$$

Hic iam pro parte posteriore ponamus denominatoris $1-nq+qq$ factores esse $(q-\alpha)(q-\beta)$, eritque $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, quo facto resolvetur fractio $\frac{n-q}{(q-\alpha)(q-\beta)}$, in has duas: $\frac{A}{q-\alpha} + \frac{B}{q-\beta}$, existente $A = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$, ficque habebitur:

$$\int \frac{(n-q) \partial q}{1-nq+qq} = A l(q-\alpha) + B l(q-\beta),$$

consequenter per meros logarithmos habebimus

$$lz = l\sqrt{(1+qq)} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} l(q-\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} l(q-\beta),$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$z = \frac{\alpha \sqrt{(1+qq)} (q-\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}},$$

quae ergo expressio adeo est algebraica, si modo litterae α et β

β fi
cuer
cula

vent
tes

vbi
post
litte
iuua
que
fit

Fac
amp
fit

nen
sup.

Cu
tro

Ad
ter:

β sint numeri rationales; sin autem fiunt imaginarii, quod evenit quando $n < 2$, tum posterior integratio ad arcus circulares reuocetur.

§. 33. Tractemus simili modo alteram formulam inventam $\partial \omega = \frac{nq \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, quae vt supra in duas partes diuellatur, scilicet:

$$\partial \omega = \frac{-\partial q}{1+qq} + \frac{\partial q}{1-nq+qq};$$

vbi pars prior praebet arcum circulem, cuius tangens = q ; posterior vero, vt ante, per logarithmos exprimetur, siquidem litterae α et β fuerint reales. Hic autem plurimum notasse iuuabit, cum sit $\partial \omega = \frac{q \partial z}{z}$, q fore tangentem anguli CZA , quem in solutione praecedente littera θ designauimus, ita vt sit $\int \frac{\partial q}{1+qq} = \theta$, vnde aequatio nostra erit

$$\omega + \theta = \int \frac{\partial q}{1-nq+qq}.$$

Facile autem perspicitur summam horum angulorum exhibere amplitudinem arcus AZ , quam ante vocauimus = Φ , ita vt sit $\theta + \omega = \Phi = \int \frac{\partial q}{1-nq+qq}$.

§. 34. Videamus igitur, vtrum hinc eandem relationem inter binos angulos θ et Φ elicere queamus, quam in superiore solutione sumus adepti, quae erat

$$\text{tang. } \theta = \frac{e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}}{\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}}.$$

Cum igit sit $q = \text{tang. } \theta$, erit $\partial q = \frac{\partial \theta}{\cos^2 \theta}$, quibus valoribus introductis erit

$$\Phi = \int \frac{\partial \theta}{1-n \sin \theta \cos \theta} = \int \frac{2 \partial \theta}{2-n \sin 2\theta}.$$

Ad hanc conuenientiam ostendendam retineamus in calculo litteram $q = \text{tang. } \theta$, vt sit $\partial \Phi = \frac{\partial q}{1-nq+qq}$, atque denomina-

torem per hos factores repraesentemus: $(q - \alpha)(q - \beta)$, existente $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, eritque

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{1}{(q - \alpha)(q - \beta)} = \frac{1}{(\alpha - \beta)(q - \alpha)} - \frac{1}{(\alpha - \beta)(q - \beta)}$$

Nunc igitur erit

$$(\alpha - \beta) \partial \Phi = \frac{\partial q}{q - \alpha} - \frac{\partial q}{q - \beta},$$

vnde integrando fit $(\alpha - \beta) \Phi = l \frac{q - \alpha}{q - \beta}$, hincque ad numeros progrediendo erit $C e^{(\alpha - \beta)\Phi} = \frac{q - \alpha}{q - \beta}$, ex qua aequatione eli-

$$) \text{ citur } q = \frac{\beta C e^{(\alpha - \beta)\Phi} - \alpha}{C e^{(\alpha - \beta)\Phi} - 1}.$$

§. 35. Haec porro formula supra et infra multiplicata per $e^{\beta\Phi}$ transit in hanc: $q = \frac{\beta C e^{\alpha\Phi} - \alpha e^{\beta\Phi}}{C e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}$, vbi si capiatur $C = \frac{\alpha}{\beta}$, prodibit

$$q = \frac{\alpha e^{\alpha\Phi} - \alpha e^{\beta\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}} = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}},$$

quae est ea ipsa expressio quam ante inuenimus. Quod autem constanti C hic ipse valor $\frac{\alpha}{\beta}$ tribui debeat, ex prima aequatione inuenta $C e^{(\alpha - \beta)\Phi} = \frac{q - \alpha}{q - \beta}$ colligitur, ad ipsum curvae initium A regrediendo, vbi quia recta CA curuam tangit, hic erit $\Phi = 0$ et $\theta = 0$, ideoque etiam $q = 0$, vnde prodit $C = \frac{\alpha}{\beta}$, ficque conformitas huius solutionis cum praecedente perfecte est euicta.

Solutio tertia eiusdem problematis,
ex binis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$ immediate
deducta.

§. 36. Cum igitur hic fit area $CAZX = \int y \partial x$, Tab. II.
area vero trianguli $CXZ = \frac{1}{2}xy$, erit area sectoris Fig. 2.

$$ACZ = \Sigma = \frac{1}{2} \int (y \partial x - x \partial y).$$

Nunc autem porro ponamus $\partial y = p \partial x$, eritque

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int \partial x (y - px),$$

hinc vero erit elementum curvae $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, qua-
re cum problema nostrum postulet ut fit $ss = 4n\Sigma$, prima
differentiatio statim dat:

$$s \sqrt{(1 + pp)} = n(y - px), \text{ ideoque}$$

$$s = \frac{n(y - px)}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

§. 37. Ante autem quam denuo differentiemus, ponamus
 $y = ux$, unde, quia fit

$$\partial y = u \partial x + x \partial u = p \partial x,$$

habebimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Nunc igitur erit

$$y - px = -x(p - u),$$

at vero differentiando commode fit

$$\partial.(y - px) = -x \partial p.$$

His praeparatis differentiatio repetita dabit:

$$\partial x \sqrt{(1 + pp)} = -\frac{nx \partial p}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{nx(p - u) p \partial p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio ducta in $(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$ nobis largitur:

$$\partial x (1 + pp)^2 = -nx \partial p (1 + pp) + nx(p - u) p \partial p,$$

ex

ex qua statim elicimus:

$$\frac{\partial x}{x} = - \frac{n \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2}.$$

Cum igitur modo inuenerimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$, nunc habebimus aequationem differentialem primi gradus inter binas tantum variables p et u , quae ita se habet:

$$\frac{\partial u}{p - u} = - \frac{n \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2}, \text{ siue}$$

$$\partial u = - \frac{n \partial p (p - u)(1 + p u)}{(1 + p p)^2},$$

vbi autem ambae variables p et u tantopere inter se sunt permixtae, vt vix vlla via patere videatur ad eam resoluendam; at vero simplex substitutio totum negotium facile conficiet. Statuamus enim $u = \frac{p + q}{1 + p q}$, tum enim statim satis concinne prodibit:

$$p - u = \frac{q(p p + 1)}{1 + p q} \text{ et } 1 + p u = \frac{1 + p p}{1 + p q},$$

qua ergo substitutione denominator ille $(1 + p p)^2$ feliciter tolletur, erit enim

$$\frac{(p - u)(1 + p u)}{(1 + p p)^2} = \frac{q}{(1 + p q)^2}.$$

§. 38. Deinde vero differentiando reperiemus:

$$\partial u = \frac{\partial p (1 + q q)}{(1 + p q)^2} - \frac{\partial q (1 + p p)}{(1 + p q)^2},$$

quibus igitur valoribus aequatis, quia denominatores $(1 + p q)^2$ vtrinque se pulcherrime destruunt, aequatio resultans erit:

$$\partial p (1 + q q) - \partial q (1 + p p) = - n q \partial p,$$

vnde erit $\frac{\partial p}{1 + p p} = \frac{\partial q}{1 + n q + q q}$. Ponamus iam

$$1 + n q + q q = (q + \alpha)(q + \beta),$$

vt fit $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \beta = 1$, ac si statuatur

$$\frac{1}{1 + n q + q q} = \frac{A}{q + \alpha} + \frac{B}{q + \beta},$$

erit $A = \frac{-1}{\alpha - \beta}$ et $B = \frac{1}{\alpha - \beta}$, hincque integrando:

$$\text{Arc. tang. } p = \frac{x}{a-\beta} \log \frac{q+\beta}{q+\alpha} + C.$$

Iam notetur p esse Cotangentem anguli $A Z X$, qui metitur amplitudinem arcus $A Z$, quam supra posuimus $= \Phi$, ita ut sit $p = \cot. \Phi$, ideoque $\text{Arc. tang. } p = 90^\circ - \Phi$, sicque mutata constante erit

$$\Phi = l c + \frac{x}{a-\beta} \log \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$C e^{(\alpha-\beta)\Phi} = \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde colligimus:

$$q = \frac{\alpha - \beta C e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{C e^{(\alpha-\beta)\Phi} - 1},$$

hinc autem porro, ob $p = \cot. \Phi$, elicitur valor

$$u = \frac{p-q}{x+p q} = \frac{y}{x}.$$

In ipso igitur initio, seu puncto A , debet esse $\Phi = 0$, ideoque $p = \infty$, atque etiam $u = \infty$; vnde perspicuum est esse debere $q = 0$. In valore igitur pro q inuento faciamus $\Phi = 0$, et quia esse debet $q = 0$, pro constante definienda habebimus: $C = \frac{\alpha}{\beta}$, sicque nunc habemus determinate:

$$q = \frac{\alpha - \alpha e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta} e^{(\alpha-\beta)\Phi} - 1} = \frac{1 - e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{\alpha e^{(\alpha-\beta)\Phi} - \beta}, \text{ siue}$$

$$q = \frac{e^{\beta\Phi} - e^{\alpha\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}},$$

ex quo intelligitur per angulum, quem supra posuimus θ , fore $q = -\text{tang. } \theta$.

§. 39. Quoniam igitur per p , siue per angulum Φ , non solum q , sed etiam u expressum inuenimus, postrema formula euoluta dabit:

$$u = \frac{e^{\alpha \Phi} (1 + \alpha \cot. \Phi) - e^{\beta \Phi} (1 + \beta \cot. \Phi)}{e^{\alpha \Phi} (\alpha - \cot. \Phi) - e^{\beta \Phi} (\beta - \cot. \Phi)} = \frac{y}{x}.$$

Tantum igitur superest, vt aequatio $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$ integretur.
 Utamur autem potius posteriore aequatione:

$$\frac{\partial x}{x} = - \frac{n \cdot \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2},$$

quae ob $1 + p u = \frac{1 + p p}{1 + p q}$ transmutatur in hanc:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-n \partial \Phi}{(1 + p p)(1 + p q)},$$

quae porro, ob $p = \cot. \Phi$, transfit in hanc: $\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi}{1 + q \cot. \Phi}$. Nunc igitur loco q scribatur valor inuentus, ac reperietur:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi})}{e^{\alpha \Phi} (\alpha - \cot. \Phi) - e^{\beta \Phi} (\beta - \cot. \Phi)}, \text{ siue}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi})}{e^{\alpha \Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) - e^{\beta \Phi} (\beta \sin. \Phi - \cos. \Phi)}.$$

Haec autem formula nimis complicata videtur, quam vt eius integrationem expectare liceat; verum si denominatorem differentiemus,prehendemus fore:

$$e^{\alpha \Phi} \partial \Phi (\alpha \alpha + 1) \sin. \Phi - e^{\beta \Phi} \partial \Phi (\beta \beta + 1) \sin. \Phi.$$

Quia vero est $\alpha \alpha + 1 = n \alpha$ et $\beta \beta + 1 = n \beta$, istud differentiale erit:

$$n \alpha e^{\alpha \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi - n \beta e^{\beta \Phi} \partial \Phi \sin. \Phi = n \partial \Phi \sin. \Phi (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}),$$

cui ipse numerator praecise est aequalis, ex quo statim adipiscimur

$$l x = l [e^{\alpha \Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) - e^{\beta \Phi} (\beta \sin. \Phi - \cos. \Phi)] + l a,$$

vnde concludimus

$$x = a e^{\alpha \Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) - a e^{\beta \Phi} (\beta \sin. \Phi - \cos. \Phi).$$

Quodsi nunc fractionem pro $\frac{y}{x}$ inuentam supra et infra in $\sin. \Phi$ ducamus, habebimus:

y

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{\alpha\Phi} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) - e^{\beta\Phi} (\sin. \Phi + \beta \cos. \Phi)}{e^{\alpha\Phi} (\alpha \sin. \Phi - \cos. \Phi) - e^{\beta\Phi} (\beta \sin. \Phi - \cos. \Phi)},$$

ita vt denominator praebeat valorem ipsius x , hincque adeo sponte se offert y ; erit enim:

$$y = a e^{\alpha\Phi} (\sin. \Phi + \alpha \cos. \Phi) - a e^{\beta\Phi} (\sin. \Phi + \beta \cos. \Phi).$$

§. 40. Ex his igitur manifestum est, etiam hanc potestremam solutionem cum ea, quam primo inuenimus, ad amussim conuenire, propterea quod §. 10. eadem plane formulae pro coordinatis x et y sunt exhibitae. Interim tamen haec tertia solutio multo difficiliore integrationes atque artificia multo magis abstrusa postulauit, ob quam ipsam rationem ista solutio imprimis notatu digna est visa.