unde concludimus

$$(2,\theta) = \frac{(1,\theta)\,(1+\theta,1)}{(1,1)},$$

quae formula jam omnes casus exclusos suppeditat, in quibus alter terminus erat 2.

IX. Deinde sumamus $a = 2$, $b = \varkappa$ et $c = 1$, ut aequatio prodeat $(2,\varkappa)\,(2+\varkappa,1) = (2,1)\,(3,\varkappa)$, unde fit

$$(3,\varkappa) = \frac{(2,\varkappa)\,(2+\varkappa,1)}{(2,1)},$$

ubi cum $(2,\varkappa)$ per praecedentem N^{rum} detur, nunc etiam ii casus innotescunt, ubi alter terminus erat 3.

X. Sumatur porro $a = 3$, $b = \varkappa$, $c = 1$, eritque $(3,\varkappa)$ $(3+\varkappa,1) = (3,1)\,(4,\varkappa)$, unde fit

$$(4,\varkappa) = \frac{(3,\varkappa)\,(3+\varkappa,1)}{(3,1)},$$

unde igitur ii casus eliciuntur, ubi alter terminus erat 4. Eodem modo pro reliquis proceditur; sicque omnes plane casus in formula proposita contenti plene sunt determinati.

---

4) De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum. *M. S. Academiae exhib. d.* 30 *Aprilis* 1781.

§. 124. Talium formularum, quae a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extensae finitum sortiuntur valorem, simplicissima est circularis $\int \frac{\partial x}{1+xx}$, cujus valor est $\frac{\pi}{2}$ denotante π peripheriam pro diametro $= 1$. Deinde etiam methodo prorsus singulari inveni esse

$$\int \frac{x^{m-1}\,\partial x}{(1+x)^n} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Praeterea vero hoc modo plures alias formulas hujus generis expedivi, in quarum differentialia non solum functiones algebraicae ipsius x sed etiam lx ingrediatur.

§. 125. Obtulerunt se mihi autem quondam aliae hujusmodi formulae etiam functiones transcendentes involventes, quarum valores desiderati omnes methodos adhuc cognitas respuere videantur. Quaesiveram scilicet eam lineam curvam in qua radius osculi ubique reciproce esset proportionalis arcui curvae, ita ut posito arcu $= s$ et radio osculi $= r$, esset $rs = aa$. Hinc enim haud difficile est, figuram curvae libero quasi manus ductu describere, quandoquidem ea talem habere
Fig. 2. debet figuram. Initio nimirum curvae in A constituto inde curva continuo magis incurvabitur et tandem post infinitas spiras in certum punctum O glomerabitur, quod polum hujus curvae appellare licebit. Propositum igitur mihi fuerat locum hujus poli accuratius investigare, pro eoque quantitatem coordinatarum AC et CO perscrutari.

§. 126. Hunc in finem, introducta in calculum portionis cujusvis AM $= s$ amplitudine $= \Phi$, ut sit $r = \frac{\partial s}{\partial \Phi}$, fit $s\partial s = aa\partial\Phi$, hincque

$$ss = 2aa\Phi, \text{ et } s = a\sqrt{2\Phi} = 2c\sqrt{\Phi}.$$

Hinc jam prodit $\partial s = \frac{c\partial\Phi}{\sqrt{\Phi}}$, unde posita abscissa pro hoc arcu AP $= x$ et applicata PM $= y$, colligitur fore

$$x = c\int\frac{\partial\Phi \cos.\Phi}{\sqrt{\Phi}} \text{ et } y = c\int\frac{\partial\Phi \sin.\Phi}{\sqrt{\Phi}}.$$

§. 127. Hinc ergo pro polo O determinando requiruntur valores harum duarum formularum integralium, postquam a termino $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \infty$ fuerint extensae. Initio quidem sum arbitratus, hos valores aliter obtineri non posse nisi approximando, dum utraque formula successive per partes evolvatur; primo scilicet a $\phi = 0$ usque ad $\phi = \pi$; deinde a $\phi = \pi$ usque ad $\phi = 2\pi$; porro a $\phi = 2\pi$ usque ad $\phi = 3\pi$; etc. quippe quo pacto series prodibunt satis prompte convergentes. Verum evidens est hanc operationem longos calculos satis taediosos requirere, quos quidem evolvere non sum ausus. Nuper autem forte fortuna per methodum prorsus singularem perspexi esse tam

$$\int \frac{\partial\phi \cos.\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\ \phi = 0 \\ ad\ \phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \text{ quam}$$

$$\int \frac{\partial\phi \sin.\phi}{\sqrt{\phi}} \left[\begin{smallmatrix} a\ \phi = 0 \\ ad\ \phi = \infty \end{smallmatrix}\right] = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}};$$

ita ut pro loco poli quaesito O sit

$$AC = c\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \text{ et } CO = c\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}.$$

§. 128. Quoniam igitur methodus, qua huc sum perductus, non parum polliceri videtur, Geometris haud ingratum fore arbitror, si eam omni cura hic exposuero. Et quia multo latius quam ad istas formulas patet, eam etiam omni extensione sum propositurus, quae omnia ex consideratione hujus formulae satis simplicis $\int x^{n-1}\partial x\, e^{-x}$ deduxi, cujus ergo integrale pro variis valoribus exponentis n investigare convenit.

§. 129. Ac primo quidem, pro casu $n = 1$ hujus formulae $\int \partial x\, e^{-x}$ integrale manifestum est $1 - e^{-x}$, quod casu $x = 0$ evanescit, facto autem $x = \infty$ abit in unitatem. Praeterea, cum hujus formulae $x^\lambda . e^{-x}$ differentiale sit

$$\lambda x^{\lambda-1}\partial x . e^{-x} - x^\lambda \partial x . e^{-x},$$

erit vicissim

$$\int x^\lambda \partial x . e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1}\partial x . e^{-x} - x^\lambda . e^{-x},$$

quod postremum membrum tam pro casu $x = 0$ quam $x = \infty$ evanescit, si modo fuerit $\lambda > 0$. Tum igitur pro nostris terminis integrationis erit

$$\int x^\lambda \partial x \,.\, e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1} \partial x \,.\, e^{-x},$$

cujus formulae ope, ob $\int \partial x e^{-x} = 1$, sequentes integralium valores deducuntur

$$\int x \partial x e^{-x} = 1$$

$$\int x^2 \partial x \,.\, e^{-x} = 1 . 2$$

$$\int x^3 \partial x \,.\, e^{-x} = 1 . 3 . 3$$

$$\int x^4 \partial x \,.\, e^{-x} = 1 . 2 . 3 . 4$$

sicque in genere

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-x} = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots\ldots (n-1),$$

cujus producti valores quoties n fuerit numerus integer positivus sponte se produnt; quando autem n est numerus fractus olim ostendi, quomodo valores per quadraturas curvarum algebraicarum exhiberi queant. Sic pro casu $n = \frac{1}{2}$ constat, istum valorem esse $= \sqrt{\pi}$.

§. 130. Cum igitur omnes valores hujus producti infiniti $1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots (n-1)$ tanquam cogniti spectari queant, eos littera Δ designabo, ita ut sit $\Delta = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots (n-1)$, sicque jam adepti sumus hanc insignem formulam integralem

$$\int x^{n-1} \partial x \,.\, e^{-x} = \Delta,$$

integrali scilicet ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extenso; atque ex hac ipsa formula omnia deduxi, quae ad casum ante memoratum pertinent, ubi quidem ratiocinia penitus singularia adhiberi debent, quae igitur hic diligentius sum expositurus.

§. 131. Posui autem primo $x = ky$, et quoniam ambo termini integralis iidem manent, erit etiam

$$k^n \int y^{n-1} \partial y \,.\, e^{-ky} = \Delta,$$

quandoquidem haec formula etiam ab $y = 0$ ad $y = \infty$ usque extenditur; quamobrem per k^n dividendo habebimus

$$\int y^{n-1}\partial y \cdot e^{-ky} = \frac{\Delta}{k^n},$$

ubi autem notari oportet, pro k nullos numeros negativos accipi posse, quia alioquin formula e^{-ky} non amplius evanesceret casu $x = 0$, atque hic isti soli valores sunt excludendi, ita ut etiam valores imaginarii loco k adhiberi queant, atque hinc illas arduas integrationes sum assecutus.

§. 132. Ponamus ergo $k = p + q\sqrt{-1}$, et cum sit

$$e^{-qy\sqrt{-1}} = \cos. qy - \sqrt{-1}\sin. qy, \text{ et}$$
$$e^{+qy\sqrt{-1}} = \cos. qy + \sqrt{-1}\sin. qy,$$

nostra formula nunc induet hanc formam

$$\int y^{n-1}\partial y \;.\; e^{-py}(\cos. qy - \sqrt{-1}\sin. qy) = \frac{\Delta}{(p+q\sqrt{-1})^n}.$$

Quamobrem si formulae imaginariae signum mutemus, erit simili modo

$$\int y^{n-1}\partial y \;.\; e^{-py}(\cos. qy + \sqrt{-1}\sin. qy) = \frac{\Delta}{(p-q\sqrt{-1})^n}.$$

§. 133. Quo valores inventos commodius exprimere liceat, ponamus $p = f\cos.\theta$ et $q = f\sin.\theta$, eritque

$$(p + q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos. n\theta + \sqrt{-1}\sin. n\theta) \text{ et}$$
$$(p - q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos. n\theta - \sqrt{-1}\sin. n\theta);$$

ubi notasse juvabit fore tang. $\theta = \frac{q}{p}$, unde ex valoribus p et q assumtis erit etiam $f = \sqrt{(pp + qq)}$. Hoc ergo modo fit priore casu

$$\frac{\Delta}{(p+q\sqrt{-1})^n} = \frac{\Delta}{f^n(\cos. n\theta + \sqrt{-1}\sin. n\theta)},$$

pro altero

$$\frac{\Delta}{(p-q\sqrt{-1})^n} = \frac{\Delta}{f^n\,(\cos.\, n\theta - \sqrt{-1}\,\sin.\, n\theta)}.$$

Quamobrem si hae duae formulae addantur prodibit

$$\frac{2\,\Delta\cos.\, n\theta}{f^n}.$$

Differentia autem harum formularum dat

$$\frac{2\,\Delta\sqrt{-1}\,\sin.\, n\theta}{f^n}.$$

§. 134. Addamus igitur quoque ipsas formulas integrales, et habebimus

$$\int y^{n-1}\partial y\,.\,e^{-py}\cos.\, qy = \frac{\Delta\cos.\, n\theta}{f^n}.$$

Sin autem subtrahamus et per $2\sqrt{-1}$ dividamus, oritur

$$\int y^{n-1}\partial y\,.\,e^{-py}\sin.\, qy = \frac{\Delta\sin.\, n\theta}{f^n}.$$

quae jam duae formulae integrales latissime patent, cum numeri p et q prorsus arbitrio nostro relinquuntur, id tantum observando, ne pro p numeri negativi accipiantur. Operae igitur pretium erit, has duas formulas integrales sequentibus binis theorematibus complecti.

Theorema I.

Posito $\Delta = 1.2.2 \ldots (n-1)$, et pro litteris p et q numeros quoscunque positivos accipiendo, fiat inde $\sqrt{(pp+qq)} = f$, et quaeratur angulus θ, ut fit tang. $\theta = \frac{q}{p}$, et habebitur ista integratio memorabilis

$$\int x^{n-1}\partial x\,.\,e^{-px}\cos.\, qx \begin{bmatrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = \infty\end{bmatrix} = \frac{\Delta\cos.\, n\theta}{f^n}.$$

Theorema II.

Posito $\Delta = 1.2.3 \ldots\ldots (n-1)$, et pro litteris p et q numeros quoscunque positivos accipiendo, fiat inde $\sqrt{(pp+qq)} = f$, et quaeratur angulus θ, ut sit tang. $\theta = \frac{q}{p}$, atque habebitur ista integratio memorabilis

$$\int x^{n-1}\partial x \,.\, e^{-px}\sin. qx \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\Delta \sin. n\theta}{f^n}.$$

§. 135. Cum igitur pro casu curvae supra consideratae pervenerimus ad has formulas integrales

$$\int \frac{\partial \phi \cos. \phi}{\sqrt{\phi}} \text{ et } \int \frac{\partial \phi \sin. \phi}{\sqrt{\phi}},$$

facta applicatione erit $n = \frac{1}{2}$, ideoque $\Delta = \sqrt{\pi}$, tum vero erit $p = 0$ et $q = 1$, unde fit $f = 1$ et tang. $\theta = \frac{q}{p} = \infty$, ideoque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ergo cos. $n\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin. n\theta$. Hinc igitur fiet

$$\int \frac{\partial \phi \cos. \phi}{\sqrt{\phi}} \begin{bmatrix} a\ \phi = 0 \\ ad\ \phi = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \text{ simulque}$$

$$\int \frac{\partial \phi \sin. \phi}{\sqrt{\phi}} \begin{bmatrix} a\ \phi = 0 \\ ad\ \phi = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}.$$

§. 136. Operae autem pretium erit, hunc casum quo $n = \frac{1}{2}$ et $\Delta = \sqrt{\pi}$ in genere evolvere, et cum posuerimus

$$\sqrt{(pp+qq)} = f \text{ et } \frac{q}{p} = \text{tang. } \theta, \text{ erit}$$

$$\sin. \theta = \frac{q}{f} \text{ et } \cos. \theta = \frac{p}{f}.$$

Hinc ergo primo

$$\sin. \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos.\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f-p}{2f}} \text{ et}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos.\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f+p}{2f}};$$

unde fit pro valoribus integralibus

$$\frac{\Delta \sin. \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f}\sqrt{\frac{f-p}{2}} \text{ et}$$

$$\frac{\Delta \cos. \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

Quamobrem habebimus binas sequentes formulas integrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\, e^{-px} \sin. qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f-p}{2}}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\, e^{-px} \cos. qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

§. 137. Casus autem, quibus pro n sumitur numerus integer positivus, ideoque Δ absolute per numeros integros exhiberi potest, ita sunt comparati, ut etiam per methodos cognitas, ope scilicet formularum integralium reductionis satis notae expediri queant, atque adeo integralia in genere exhiberi. Haec autem operatio postulat calculos non parum prolixos, quamobrem formulae nostrae satis simplices pro casu scilicet $x = \infty$ nihilo minus omni attentione sunt dignae. Quando autem exponenti n valores negativos tribuere voluerimus, hi casus statim in initio integrationis additionem constantis infinitae postulant, ut scilicet integralia evanescant casu $x = 0$, sicque adeo valores integralium, quae hic quaerimus, manebunt infiniti, ideoque ad institutum nostrum non sunt referendi.

§. 138. Casus autem maxime memorabilis hic occurrit, quo $n = 0$, et qui prorsus singularem sollertiam postulat, quem igitur accuratius evolvamus. Quoniam posuimus

$$\Delta = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (n-1),$$

statuamus simili modo

$$\Delta' = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n, \text{ et } \Delta'' = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n+1),$$

eritque manifesto

$$\Delta = \frac{\Delta'}{n}, \text{ et } \Delta' = \frac{\Delta''}{n+1}, \text{ ideoque } \Delta = \frac{\Delta''}{n(n+1)}.$$

Sumamus nunc $n = \omega$, existente ω infinite parvo, et cum sit

$\Delta'' = 1$, inde fit $\Delta = \frac{1}{\omega}$, ideoque ejus valor erit infinitus. Cum autem pro formula integrali priore sit sin. $n\theta = \omega\theta$, evidens est fore Δ sin. $n\theta = \theta$; quamobrem ista prior formula integralis erit $\int\frac{\partial x}{x} e^{-px}$ sin. $q x = \theta$, dum nempe integrale a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extenditur. Alterius autem formulae nostrae integralis $\int\frac{\partial x}{x} e^{-px}$ cos. $q x$ valor erit infinite magnus. Ille autem casus omnino meretur ut eum singulari theoremate complectamur.

Theorema III.

§. 139. Si litterae p et q denotent numeros positivos quoscunque, atque hinc quaeratur angulus θ, ut sit tang. $\theta = \frac{q}{p}$, habebitur sequens integratio maxime memorabilis

$$\int\frac{\partial x}{x} e^{-px} \text{ sin. } q x \begin{bmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = \infty \end{bmatrix} = \theta$$

cujus theorematis demonstratio dubito quin alio modo quam per approximationes investigari queat.

§. 140. Casus autem simplicissimus quo $p = 0$ et $q = 1$ jam omnia calculi artificia adhuc cognita superare videtur, quia autem hoc casu fit tang. $\theta = \frac{1}{0} = \infty$, erit $\theta = \frac{\pi}{2}$, unde oritur haec integratio $\int\frac{\partial x}{x}$ sin. $x = \frac{\pi}{2}$. Interim tamen de ejus veritate eo minus dubitare licet, quod approximationes adhibitae ad eundem valorem propemodum perducant. Quodsi hunc casum cum initio memorato $\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}$ sin. $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ comparemus, ingens similitudo summam attentionem meretur, cum hujus integrale sit praecise radix quadrata illius.