DE RADICIBVS AEQVATIONIS INFINITAE

$$0 = 1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhibit. die 16 Ianuar. 1777.

§. 1.

In hac aequatione generali singulare phaenomenon se contemplandum offert, quod casibus, quibus est vel $n = 1$, vel $n = 2$, vel $n = 3$, ea habeat omnes suas radices infinitas reales, quas adeo assignare licet; statim autem ac numerus n ternarium superat, omnes eius radices fiant imaginariae. Si enim ponamus $n = 1$, vt prodeat ista aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \text{etc.}$$

quoniam huius seriei summa est cos. x, omnes eius radices sequenti modo progredientur:

$$\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \pm\frac{7\pi}{2},\ \pm\frac{9\pi}{2},\ \text{etc.}$$

quae ergo progressionem arithmeticam constituunt, cuius differentia $= \pi$, ita vt, si quaepiam radix fuerit $x = r$, etiam radix futura sit $x = r \pm \pi$.

§. 2. Conſideremus nunc etiam caſum quo $n = 2$, et aequatio propoſita:

$$0 = 1 - \frac{xx}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2 \ldots 7} + \frac{x^8}{2 \ldots 9} - \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in x exhibet valorem ſin. x, hincque vtique euaneſcet omnibus caſibus, quibus ſin. $x = 0$, excepto ſolo caſu $x = 0$, (nam quia ſeriei ſumma eſt $\frac{\sin. x}{x}$, caſu $x = 0$ eius ſumma erit $= 1$), vnde omnes radices huius aequationis erunt:

$$\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi, \text{etc.}$$

quae pariter progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuius differentia $= \pi$, ita vt, ſi quaepiam radix fuerit $x = r$, etiam radix futura ſit $x = r \pm \pi$, ſolo caſu excepto quo fieret $x = 0$.

§. 3. Statuamus nunc etiam $n = 3$, vt prodeat iſta aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{3.4} + \frac{x^4}{3.4.5.6} - \frac{x^6}{3 \ldots 8} + \text{etc.}$$

et quoniam eſt

$$\text{cof.}\, x = 1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1 \ldots 6} + \text{etc.}$$

euidens eſt ſeriei propoſitae ſummam eſſe $\frac{2(1 - \text{cof.}\, x)}{xx}$, quae ergo formula, quoties euaneſcit, praebebit radicem iſtius aequationis. Hoc autem euenit, quoties litterae x ſequentes valores tribuuntur:

$$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \pm 10\pi, \text{etc.}$$

ideoque in genere $\pm 2 i \pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, ſi modo excipiatur caſus $i = 0$, ſiquidem poſito $x = 0$ fit $\frac{2(1 - \text{cof.}\, x)}{xx} = 1$. Hoc igitur caſu radices ipſius x etiam progreſſionem arithmeticam conſtituunt, ſed cuius differentia non amplius eſt π, ſed 2π.

§. 4.

§. 4. Hinc igitur concludere licet, numerum omnium radicum huius postremae aequationis duplo esse minorem quam in binis casibus antecedentibus, ex quo statui posse videtur in hoc postremo casu binas radices in vnam coalescere. Nouimus autem ex Analysi perpetuo binas radices aequationum inter se euadere aequales in ipsis limitibus inter radices reales et imaginarias; vnde iam ratio intelligi potest, cur, si litterae n maiores valores quam 3 tribuantur, omnes radices subito fiant imaginariae.

§. 5. Quod quo clarius appareat, sumamus $n = 4$, vt iam aequatio habeatur

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4 \ldots 9} + \text{etc.}$$

et quoniam est

$$\text{sin.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1 \ldots 5} - \text{etc.}$$

manifestum est, istius seriei propositae summam fore $\frac{6(x - \text{sin.}\, x)}{x^3}$. Constat autem semper esse $x > \text{sin.}\, x$, ita vt ista expressio plane nunquam fieri possit $= 0$, ne casu quidem excepto $x = 0$. Interim tamen quia ista expressio reuera euanescit, sumto $x = \infty$, hinc vna saltem radix realis statui posse videtur, siquidem quantitates infinitas admittere velimus.

§. 6. Hinc iam pro certo affirmari posse videtur, aequationem generalem propositam semper habituram esse infinitas radices reales tam positiuas quam negatiuas, quando numerus n ternarium non superauerit; simul ac vero maior ternario accipiatur, tum subito omnes plane radices abituras esse in imaginarias. Interim tamen nulla methodus adhuc patet, cuius ope omnes illas radices reales assignare liceret, praeter casus iam memoratos, quibus est vel $n = 1$, vel

vel $n = 2$, vel $n = 3$. Quod ſi enim pro n accipiatur fractio quaecunque minor quam 3, formula ſummam ſeriei propoſitae exprimens tantopere ſit transcendens et intricata, vt nullo modo caſus, quibus euaneſcit, elici queant.

§. 7. Quae difficultates quo clarius perſpiciantur, inueſtigemus generatim ſummam ſeriei propoſitae, quam ſtatuamus $= \frac{s}{x^{n-1}}$, vt fiat

$$s = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}$$

cuius valorem quo facilius indagare queamus, ſtatuamus porro $s = x^{n-1} - z$, vt ſit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n\ldots(n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n\ldots(n+5)} - \text{etc.}$$

quae aequatio bis differentiata, ſumto elemento ∂x conſtante, praebet

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n\ldots(n+3)} - \text{etc.} = s,$$

quamobrem habebimus $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + z = x^{n-1}$, ſicque totum negotium huc redit, vt iſta aequatio differentialis ſecundi gradus reſoluatur.

§. 8. Hanc iam aequationem attentius conſideranti facile patebit eam integrabilem duplici modo reddi, ſi ſcilicet vel per $\partial x \cos. x$ vel per $\partial x \sin. x$ multiplicetur. Cum enim per reductiones conſuetas ſit

$$\frac{\int \partial\partial z \cos. x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos. x + \int \partial z \sin. x,$$

tum vero $\int \partial z \sin. x = z \sin. x - \int z\, \partial x \cos. x$, manifeſtum eſt

fore

fore

$$\frac{\int \partial \partial z \operatorname{cof.} x}{\partial x} - \int z \partial x \operatorname{cof.} x = \frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{cof.} x + z \operatorname{fin.} x.$$

Ex quo perſpicuum eſt, ſi noſtra aequatio in $\partial x \operatorname{cof.} x$ ducatur et integretur, prodire hanc aequationem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{cof.} x + z \operatorname{fin.} x = \int x^{n-1} \partial x \operatorname{cof.} x,$$

huius enim differentiatio manifeſto ad aequationem propoſitam deducit.

§. 9. Eodem modo cum ſit:

$$\frac{\int \partial \partial z \operatorname{fin.} x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{fin.} x - \int \partial z \operatorname{cof.} x,$$

tum vero $\int \partial z \operatorname{cof.} x = z \operatorname{cof.} x + \int z \partial x \operatorname{fin.} x$, hinc colligitur

$$\frac{\int \partial \partial z}{\partial x} \operatorname{fin.} x + \int z \partial x \operatorname{fin.} x = \frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{fin.} x - z \operatorname{cof.} x;$$

ita vt aequatio noſtra in $\partial x \operatorname{fin.} x$ ducta et integrata fiat

$$\frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{fin.} x - z \operatorname{cof.} x = \int x^{n-1} \partial x \operatorname{fin.} x,$$

huius enim differentiatio itidem ad aequationem propoſitam perducit.

§. 10. Quanquam autem hae aequationes tantum ſint differentiales primi gradus, tamen, quoniam duas ſumus aſſecuti, ex earum combinatione, ſine vlteriori integratione, valorem ipſius z elicere poterimus. Si enim a priore aequatione per $\operatorname{fin.} x$ multiplicata, ſubtrahamus poſteriorem in $\operatorname{cof.} x$ ductam, ſtatim colligitur fore

$$z = \operatorname{fin.} x \int x^{n-1} \partial x \operatorname{cof.} x - \operatorname{cof.} x \int x^{n-1} \partial x \operatorname{fin.} x,$$

ſicque z per binas formulas integrales determinatur, in quibus binae conſtantes arbitrariae per integrationes ingreſſae contineri ſunt cenſendae; vnde ſi ambo integralia ita accipiamus, vt euaneſcant poſito $x = 0$, integrale completum ita

ex-

exhibebitur:

$$z = \sin. x \int x^{n-1} \partial x \cos. x + A \sin. x - \cos. x \int x^{n-1} \partial x \sin. x - B \cos. x.$$

Cum iam ſit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \ldots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \ldots (n+5)} - \text{etc.}$$

euidens eſt ſumto $x = 0$ fieri $z = 0$, ſi modo fuerit $n+1 > 0$, id quod ſemper ſupponere licet, quandoquidem etiam ipſe numerus n nihilo maior aſſumi debet. Ponamus igitur, ad conſtantes determinandas, $x = 0$, et quia etiam fit $z = 0$, prodibit $0 = -B$, ideoque $B = 0$. Pro altera autem conſtante A definienda contemplemur ſeriem valorem ipſius $\frac{\partial z}{\partial x}$ exprimentem, quae eſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+2}}{n \ldots (n+2)} + \frac{x^{n+4}}{n \ldots (n+4)} - \text{etc.}$$

quae pariter euaneſcit poſito $x = 0$, ſi modo fuerit $n > 0$. At ſi aequatio integralis completa differentietur, ob $B = 0$ reperietur:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \cos. x + \cos. x \int x^{n-1} \partial x \cos. x + \sin. x \int x^{n-1} \partial x \sin. x.$$

Quare cum ambae formulae integrales euaneſcant poſito $x = 0$, ob $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, hinc fiet $0 = A$, ideoque etiam conſtans $A = 0$. Sicque formula integralis ad noſtrum caſum accommodata erit

$$z = \sin. x \int x^{n-1} \partial x \cos. x - \cos. x \int x^{n-1} \partial x \sin. x,$$

ſi modo ambo integralia ita capiantur, vt euaneſcant poſito $x = 0$. Tum vero pro ipſa ſeriei propoſitae ſumma erit $s = x^{n-1} - z$, quae per x^{n-1} diuiſa dabit ipſam ſummam ſeriei propoſitae.

§. 11.

§. 11. Cum igitur quaestio nostra in eo versetur, vt pro quouis numero n valores ipsius x assignentur, quibus nostra series

$$1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n\ldots(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

euanescat, id quod euenit, quoties fuerit $s = 0$, resolutio huius aequationis:

$$x^{n-1} = \sin. x \int x^{n-1} \partial x \cos. x - \cos. x \int x^{n-1} \partial x \sin. x$$

omnes dabit radices quaesitas x.

§. 12. Euidens autem est, resolutionem huius aequationis vires Analyseos aeque superare atque ipsam quaestionem propositam, exceptis iis solis casibus, quos iam supra euoluimus, qui sunt $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$; vnde operae pretium erit solutionem modo inuentam ad hos casus applicare. Sit igitur primo $n = 1$, ideoque $x^{n-1} = 1$, et formula integralis prior dabit $\int \partial x \cos. x = \sin. x$, posterior vero $\int \partial x \sin. x = 1 - \cos. x$, quibus valoribus substitutis aequatio nostra erit

$$1 = \sin. x^2 - \cos. x + \cos. x^2 = 1 - \cos. x,$$

ideoque $\cos. x = 0$, vti per se est manifestum.

§. 13. Pro casu secundo fit $n = 2$, ideoque $x^{n-1} = x$, et formula integralis prior dabit

$$\int x \partial x \cos. x = x \sin. x - \int \partial x \cos. x = x \sin. x + \cos. x - 1,$$

posterior vero

$$\int x \partial x \sin. x = -x \cos. x + \int \partial x \cos. x = -x \cos. x + \sin. x,$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra fit

$$x = x \sin. x^2 + x \cos. x^2 - \sin. x = x - \sin. x,$$

ideoque $\sin. x = 0$, prorsus vti supra habuimus.

§. 14. Pro casu tertio faciamus $n=3$, vt fit $x^{n-1}=xx$, et formula integralis prior dabit

$$\int xx\,\partial x\,\text{cos.}\,x = xx\,\text{fin.}\,x + 2\,x\,\text{cos.}\,x - 2\,\text{fin.}\,x,$$

posterior vero praebet

$$\int xx\,\partial x\,\text{fin.}\,x = -xx\,\text{cos.}\,x + 2\,x\,\text{fin.}\,x + 2\,\text{cos.}\,x - 2,$$

quibus inuentis aequatio nostra pro hoc casu erit

$$xx = xx\,\text{fin.}\,x^2 + 2\,x\,\text{fin.}\,x\,\text{cos.}\,x - 2\,\text{fin.}\,x^2 + 2\,\text{cos.}\,x$$
$$+ xx\,\text{cos.}\,x^2 - 2\,x\,\text{fin.}\,x\,\text{cos.}\,x - 2\,\text{cos.}\,x^2,$$

fiue $xx = xx - 2 + 2\,\text{cof.}\,x$, ficque effe oportet $1 - \text{cof.}\,x = 0$, prorfus vti fupra iam notauimus.

§. 15. Talis reductio autem fuccedit, quoties n fuerit numerus integer pofitiuus, ad quod oftendendum fit adhuc $n=4$ et $x^{n-1}=x^3$, ac prior formula integralis dabit

$$\int x^3\,\partial x\,\text{cof.}\,x = x^3\,\text{fin.}\,x - 3\int xx\,\partial x\,\text{fin.}\,x, \text{ fiue}$$
$$\int x^3\,\partial x\,\text{cof.}\,x = x^3\,\text{fin.}\,x + 3\,xx\,\text{cof.}\,x - 6\,x\,\text{fin.}\,x - 6\,\text{cof.}\,x + 6,$$

pofterior vero

$$\int x^3\,\partial x\,\text{fin.}\,x = -x^3\,\text{cof.}\,x + 3\int xx\,\partial x\,\text{cof.}\,x, \text{ fiue}$$
$$\int x^3\,\partial x\,\text{fin.}\,x = -x^3\,\text{cof.}\,x + 3\,xx\,\text{fin.}\,x + 6\,x\,\text{cof.}\,x - 6\,\text{fin.}\,x,$$

ex quibus conficitur

$$x^3 = x^3\,\text{fin.}\,x^2 + 3\,xx\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x - 6\,x\,\text{fin.}\,x^2 - 6\,x\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x + 6\,\text{fin.}\,x$$
$$+ x^3\,\text{cof.}\,x^2 - 3\,xx\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x - 6\,x\,\text{cof.}\,x^2 + 6\,x\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x,$$

fiue $x^3 = x^3 - 6\,x + 6\,\text{fin.}\,x$, ita vt effe debeat $x - \text{fin.}\,x = 0$ prorfus vt fupra. Huiusmodi autem expreffiones pro cafibus quibus n eft numerus integer, facillime ex notiffimis feriebus ipfius fin. x et cof. x deriuare licet.

§. 16. Quoniam igitur fatis certi fumus, cafibus quibus $n < 3$ aequationem propofitam infinitas habere radices rea-

reales, maxime optandum esset, vt etiam istae radices, quando n non est numerus integer, assignari possent; verum in hoc negotio vires Analyseos deficiunt, atque nos contentos esse oportet, si modo has radices vero proxime exhibere valeamus. Consideremus igitur casum $n = \frac{1}{2}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$0 = 1 - \frac{4xx}{1 \cdot 3} + \frac{16x^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{64x^6}{1 \ldots 11} + \text{etc.}$$

siue posito breuitatis gratia $4xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1 \cdot 3} + \frac{zz}{1 \ldots 7} - \frac{z^3}{1 \ldots 11} + \frac{z^4}{1 \ldots 15} - \text{etc.}$$

vbi ii ipsius z valores requiruntur, qui summam huius seriei nihilo aequalem reddant.

§. 17. Hic primum notasse iuuabit, quoties fuerit $z < 3$, summam seriei semper esse positiuam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{2}$, minorem vero quam $\frac{3}{4}$. Nam si series habeatur $1 - a + b - c + d - e +$ etc. cuius omnes termini 1, a, b, c, d, etc. continuo decrescant, notum est, si ponatur $1 - a = \alpha$; $1 - 2a + b = \beta$; $1 - 3a + 3b - c = \gamma$; etc. tum summam fore $= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} + \frac{\gamma}{16} +$ etc. Vnde si tantum duo primi termini sumantur, summa maior erit quam $\frac{1}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{3-a}{4}$. Ex quo perspicuum est, nostram seriem nihilo aequalem fieri non posse, nisi sit $z > 3$. Hanc ob rem aequatio nostra ita repraesentetur:

$$0 = 1 - \frac{z}{3}\left(1 - \frac{z}{5 \cdot 7} + \frac{zz}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{z^3}{5 \ldots 11} + \text{etc.}\right)$$

§. 18. Quod si iam fuerit $z < 5 \cdot 7$, in hac postrema serie omnes termini continuo decrescunt, ideoque eius summa proxime erit $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{5 \cdot 7}$. Ponamus igitur, vt fractiones euitentur, $\frac{z}{5 \cdot 7} = v$, et habebimus hanc aequationem:

$1 =$

$$1 = \frac{z}{3} \cdot \frac{3 - v}{4} = \frac{35\, v\, (3 - v)}{12},$$

hinc ergo erit $\frac{12}{35} = 3\, v - v\, v$, siue $-\frac{12}{35} = v\, v - 3\, v$. Addamus vtrinque $\frac{9}{4}$ et habebimus $\frac{9}{4} - \frac{12}{35} = (v - \frac{3}{2})^2$, vnde extracta radice in fractionibus decimalibus erit $v - \frac{3}{2} = \pm 1,380$, cuius minor valor praebet $v = 0,120$. Hinc ergo erit $z = 4,20 = 4xx$, vnde porro erit $2x = 2,05$, ideoque $x = 1,025$. Hunc autem valorem a vero multum aberrare mox videbimus, si rem accuratius definire velimus.

§. 19. In hunc finem autem commode adhiberi poterit methodus Celeb. *Bernoullii*, radicem minimam huiusmodi aequationum per seriem recurrentem definiendi. Si enim in genere habeatur huiusmodi aequatio:

$$1 = \alpha z - \beta z z + \gamma z^3 - \text{etc.}$$

indeque formetur series recurrens ex scala relationis $\alpha, -\beta, +\gamma, -\delta$, etc. quae sit $1, A, B, C, D, E$, etc. ita vt sit

$$A = \alpha;$$
$$B = \alpha A - \beta;$$
$$C = \alpha B - \beta A + \gamma;$$
$$D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta;$$
$$\text{etc.}$$

tum sequentes fractiones $\frac{1}{A}, \frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, etc. continuo propius ad verum valorem ipsius z accedunt, vnde patet hac methodo nostram aequationem in genere resolui posse.

§. 20. Cum igitur pro nostro casu, quo $n = \frac{1}{2}$ et $4xx = z$, fit

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{1}{3.5.7},\ \gamma = \frac{1}{3.5.7.9.11},\ \delta = \frac{1}{3 \ldots 15},\ \text{etc.}$$

in fractionibus decimalibus erit.

$$A = 0,33333,$$

B =

$B = 0,11111 - 0,00952 = 0,10159,$

$C = 0,03386 - 0,00317 + 0,00010 = 0,03079,$

vlterius progredi foret fuperfluum. Hinc fractiones continuo propius ad z accedentes erunt:

I. $z = 3,000,$ II. $z = 3,281,$ III. $z = 3,291.$

§. 21. Sin autem vlterius progredi velimus, reperiemus

$D = 0,01029 - 0,00097 = 0,00932,$

hinc ergo quartus valor pro z erit $\frac{C}{D} = 3,304$; vnde fatis tuto concludere poffumus, verum valorem ipfius z effe tantillo maiorem, quamobrem fumamus $z = 3,31$, et cum fit $z = 4xx$, extracta radice erit $2x = 1,819$, ideoque $x = 0,909$.

§. 22. Satis audacter igitur affirmare poffumus, cafu quo $n = \frac{1}{2}$ minimam noftrae aequationis radicem effe $x = 0,909$, quae ergo notabiliter minor eft quam pro cafu $n = 1$, vbi erat minima radix $x = \frac{\pi}{2} = 1,571$; attamen maior eft quam huius femiffis. Videamus igitur, quamnam rationem hi duo numeri $0,909$ et $1,571$ inter fe proxime teneant. Diuidamus ergo maiorem per minorem, et continuo per refiduum praecedentem diuiforem, et quoti refultantes erunt ordine $1, 1, 2, 1, 2, 8$, vnde fractiones continuo propius ad verum accedentes funt $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}$. Hinc colligimus numerum inuentum $0,909$ fe habere ad $\frac{\pi}{2}$ vti $11 : 19$, fiue fatis prope vt 4 ad 7, quae ratio cum fatis exacte accedat ad rationem $1 : \sqrt{3}$, hinc fuspicari merito licet, verum valorem ipfius x effe $x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

§. 23. Quo autem certiores reddamur circa hanc fufpicionem, euoluamus fimili modo alium cafum, quo $n = \frac{1}{4}$, examinaturi, num minimus valor ipfius x etiam ad tam fim-

 plicem

plicem formam reduci queat. Tum autem, posito breuitatis gratia $16\,xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$1 - \frac{z}{1.5} + \frac{zz}{1.5.9.13} - \frac{z^4}{1.\ldots.21} + \text{etc.}$$

cuius radix minima vt methodo Bernoulliana inuestigetur, erit $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{5.9.13}$, $\gamma = \frac{1}{5.9.13.17.21}$, vnde series recurrens in fractionibus decimalibus erit

$A = 0,2000000,$

$B = 0,0400000 - 0,0017094 = 0,0382906,$

$C = 0,0076581 - 0,0003419 + 0,0000048 = 0,0073210,$

$D = 0,0014642 - 0,0000655 + 0,0000010 = 0,0013997.$

Hinc ergo fractiones continuo propius ad fractionem z appropinquantes erunt

I. $z = 5,0000$; II. $z = 5,2232$; III. $z = 5,2302$;
IV. $z = 4,2304$.

Vnde patet satis tuto concludi posse $z = 5,2305 = 16\,xx$, hinc extracta radice fit $4\,x = 2,2870$, ideoque $x = 0,5717$.

§. 25. Vt iam exploremus, vtrum iste valor pro x inuentus simplicem quandam teneat rationem ad π, id commodius in quadratis dispicietur, quaerendo valorem $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,4798764$, cui respondet numerus $30,191$; vnde suspicari licet verum valorem fortasse esse $= 30$, ita vt sit $xx = \frac{\pi\pi}{30}$, ideoque $x = \frac{\pi}{\sqrt{30}}$. At vero numerus 30 satis est notatu dignus et suspicionem nostram ideo augere videtur, quod in omnibus huiusmodi casibus radices x satis commode per peripheriam circuli π repraesentare liceat. Operae pretium igitur erit adhuc alios casus huius generis examinasse.

§. 26.

§. 26. Sumamus igitur $n = \frac{1}{3}$, et posito $9xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1 \cdot 4} + \frac{zz}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} - \frac{z^3}{1 \ldots 16} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10},\ \gamma = \frac{\beta}{13 \cdot 16},\ \delta = \frac{\gamma}{19 \cdot 22},\ \text{etc.}$$

Hinc termini seriei recurrentis erunt

$A = 0,2500000$,

$B = 0,0625000 - 0,0035714 = 0,0589286$,

$C = 0,0147321 - 0,0008928 + 0,0000172 = 0,0138565$

$D = 0,0034641 - 0,0002105 + 0,0000043 = 0,0032579$.

Hinc igitur pro z oriuntur sequentes valores:

I. $z = 4,0000$;

II. $z = 4,2424$;

III. $z = 4,2528$;

IV. $z = 4,2532$;

vnde tuto statuere licet $z = 4,2534$.

§. 27. Cum igitur sit $z = 9xx$, erit $3x = 2,0624$, ideoque $x = 0,6875$. At pro ratione huius numeri ad peripheriam circuli π detegenda consideretur fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,3198060$, ideoque $\frac{\pi\pi}{xx} = 20,883$ qui numerus ita est comparatus, vt omnem spem euertat, quempiam ordinem in his valoribus detegendi, qui ergo ad quantitates magis transcendentes erunt referendi.

§. 28. Ex his exemplis patet, quo minor fractio pro n accipiatur, eo promptius seriem recurrentem dare verum valorem ipsius z, ita vt sufficiat statuisse $z = \frac{A}{B}$, si

modo

modo fuerit $n < \frac{1}{3}$. Statuamus igitur in genere $n = \frac{1}{\nu}$, et posito $\nu\nu xx = z$ aequatio nostra erit

$$1 - \frac{z}{1+\nu} + \frac{zz}{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)} - \frac{z^3}{(1+\nu)\ldots(1+5\nu)},$$

vnde fit $\alpha = \frac{1}{1+\nu}$, $\beta = \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, hincque

$$A = \alpha = \frac{1}{1+\nu} \text{ et}$$
$$B = \alpha A - \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}.$$

Quia igitur $\alpha = A$, erit $B = \alpha A - \frac{A}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, vnde statim elicitur

$$z = \frac{A}{B} = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{(1+2\nu)(1+3\nu)-(1+\nu)}, \text{ siue}$$
$$z = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{4\nu+6\nu\nu}.$$

§. 29. Cum igitur sit $z = \nu\nu xx$, erit

$$xx = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{2\nu^3(2+3\nu)}$$

ex quo valore manifestum est fieri non posse vt fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$ praebeat numerum integrum, quemadmodum sumus suspicati, sed potius valores ipsius x ad altiora genera quantitatum transcendentium esse referendos; quemadmodum etiam valores ipsius seriei, casibus quibus n est numerus fractus, quantitates transcendentes altioris ordinis inuoluunt.

§. 30. Quando autem numerus n non est fractio tam parua, vti hic assumsimus, atque adeo si n superet vnitatem, seriem recurrentem ad multo plures terminos continuari necesse erit. Quod quo clarius perspiciatur, euoluamus casum quo $n = 3$, qui est extremus, qui adhuc radices reales implicat, quarum minimam nouimus esse $x = 2\pi$. Cum igitur aequatio nostra, posito $xx = z$, fit

$$0 = 1 - \frac{z}{3.4} + \frac{zz}{3.4.5.6} - \frac{z^3}{3.\ldots.8} + \text{etc.}$$

ideoque habebimus

$$\alpha = \frac{1}{3.4}, \ \beta = \frac{\alpha}{5.6}, \ \gamma = \frac{\beta}{7.8}, \ \delta = \frac{\gamma}{9.10}, \ \text{etc.}$$

vnde in fractionibus decimalibus termini feriei recurrentis poft primum, qui eft $= 1$, erunt

$$A = 0{,}0833333,$$

$$B = 0{,}0069444 - 0{,}0027777 = 0{,}0041667,$$

$$C = 0{,}0003472 - 0{,}0002315 + 0{,}0000496 = 0{,}0001653$$

$$D = \left.\begin{matrix} 0{,}0000138 - 0{,}0000116 \\ + 0{,}0000041 - 0{,}0000005 \end{matrix}\right\} = 0{,}0000058$$

$$E = \left.\begin{matrix} 0{,}0000005 - 0{,}0000004 \\ + 0{,}0000002 - 0{,}0000000 \end{matrix}\right\} = 0{,}0000003.$$

§. 31. His terminis inuentis fractiones pro numero z erunt fequentes:

I. $z = \frac{1}{A} = 12{,}000$	IV. $z = \frac{C}{D} = 28{,}400,$
II. $z = \frac{A}{B} = 20{,}000$	V. $z = \frac{D}{E} = 19{,}333,$
III. $z = \frac{B}{C} = 25{,}206$	maxime incerta.

Quoniam autem conftat reuera effe $z = xx = 4\pi\pi$, verus valor erit $z = 39{,}478$. Valores igitur inuenti nimis lente ad veritatem accedunt, ita vt hoc modo, etiamfi calculus ad plures terminos continuetur, nunquam fatis prope verum valorem inuenire licuiffet.

§. 32. Quoniam autem cafus $n = 3$ eft extremus eorum qui radicem realem admittunt, neceffe eft vt pro omnibus cafibus, quibus $n > 3$, valores ex ferie recurrente formati non folum non conuergant, fed adeo diuergant. Interim tamen, quoniam casibus, quibus n erat numerus integer, omnes radices tam concinne per quadraturam circuli exhibere licuit, suspicari poterimus, si modo n fuerit numerus integer, etiam radices imaginarias per circulum fortasse exhiberi posse, id quod vnico casu examinasse non erit alienum, propterea quod nulla via patet factores trinomiales inuestigandi.

§. 33. Euoluamus igitur casum quo $n = 4$ et aequatio euoluenda haec:

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4.\ldots.9} + \text{etc.}$$

quam ad hanc simpliciorem formam reuocari supra vidimus: $x = \text{sin.}\, x$, cui aequationi cum manifesto nulla radix realis satisfaciat, omnes autem quantitates imaginariae in forma $a + b\sqrt{-1}$ comprehendi queant, statuamus $x = a + b\sqrt{-1}$, et quaestio huc redit, quomodo etiam sin. x per talem formam exprimi possit. Ad hoc praestandum confugiamus ad formulas exponentiales, quibus est

$$\text{sin.}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cum igitur sit

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}} \cdot e^{-b} \text{ et}$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = e^{-a\sqrt{-1}} \cdot e^{+b}.$$

viciſsim erit

$$e^{a\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, a + \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, a \text{ et}$$
$$e^{-a\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, a - \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, a,$$

quibus valoribus substitutis colligimus fore

$$\text{sin.}\, x = \frac{\text{cos.}\, a\,(e^{-b} - e^{+b}) + \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, a\,(e^{-b} + e^{+b})}{2\sqrt{-1}}.$$

§. 34.

§. 34. Cum igitur per hypotheſin eſſe debeat ſin. x $= x = a + b\sqrt{-1}$, erit $2\sqrt{-1}$ ſin. $x = 2a\sqrt{-1} - 2b$, quae ergo expreſſio ſuperiori debet eſſe aequalis, id quod fieri nequit, niſi partes reales et imaginariae ſeorſim inter ſe aequentur, vnde ſequentes duae aequationes emergunt:

$$2a \text{ ſin. } a\,(e^{-b} + e^{+b}) \text{ et } 2b = \text{coſ. } a\,(e^{+b} - e^{-b}),$$

vnde concludimus

$$\text{coſ. } a = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \text{ et ſin. } a = \frac{2a}{e^b + e^{-b}}.$$

Hinc autem primo eliminare poterimus ſin. a et coſ. a: additis enim quadratis prodit

$$1 = \frac{4bb}{(e^b - e^{-b})^2} + \frac{4aa}{(e^b + e^{-b})^2}.$$

Deinde etiam quantitates exponentiales eliminari poſſunt. Cum enim fit

$$e^b + e^{-b} = \frac{2a}{\text{ſin. } a} \text{ et } e^b - e^{-b} = \frac{2b}{\text{coſ. } a},$$

ſubtrahatur quadratum poſterioris aequationis a quadrato prioris, ac remanebit $1 = \frac{aa}{\text{ſin. } a^2} - \frac{bb}{\text{coſ. } a^2}$, vnde fit $bb = aa \cot. a^2 - \text{coſ. } a^2$; ex priore autem quantitas a per alteram b definiri poſſet hoc modo:

$$4aa = (e^b + e^{-b})^2 - \frac{4bb\,(e^b + e^{-b})^2}{(e^b - e^{-b})^2}.$$

§. 35. Ex binis autem formulis primo inuentis, quae erant: coſ. $a = \frac{2b}{e^b - e^{-b}}$ et ſin. $a = \frac{aa}{e^b + e^{-b}}$, intelligitur, eas non mutari, etiamſi loco b ſcribatur $-b$; deinde vero etiam nulla variatio oritur, etiamſi loco a ſcribatur $-a$; vnde ſi fuerit $x = a + b\sqrt{-1}$, ſimul tres alii valo-

valores imaginarii locum habebunt, qui omnes in hac forma dupliciter ambigua continentur: $x = \pm a \pm b \sqrt{-1}$.

§. 36. Sufficiet igitur solos valores positiuos pro a consideraſſe, ac primo quidem patet, hinc omnes angulos excludi, quorum vel sinus vel cosinus est negatiuus; vnde nulli alii relinquuntur, nisi qui continentur in hac forma: $2 i \pi + \alpha$, existente $\alpha < 90^0$, denotante i numerum integrum quemcunque. Ex casu quidem $i = 0$ statim se prodit casus $a = 0$ et $b = 0$, qui autem instituto nostro est alienus, vnde nobis a casu $i = 1$ erit inchoandum, ponendo $a = 2\pi + \alpha$, sicque aequationes nostrae erunt

$$\text{cos. } \alpha = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \text{ et sin. } \alpha = \frac{4\pi + 2\alpha}{e^b + e^{-b}},$$

vbi cum sit $4\pi + 2\alpha > 12$, multo magis formula $e^b + e^{-b}$ superare debet numerum 12, vnde b notabiliter maius esse debet quam [illegible], ac fortasse non multum a ternario differt. Tum autem ob $e^b > 12$ ex priori formula certe erit cos. $\alpha < \frac{2b}{12} < \frac{1}{2}$; vnde sequitur angulum α excedere debere 60^0; quamobrem ponamus $\alpha = 90^0 - \omega$, siue $a = \frac{5}{2}\pi - \omega$, et iam nostrae aequationes erunt sin. $\omega = \frac{2b}{e^b - e^{-b}}$ et cos. $\omega = \frac{5\pi - 2\omega}{e^b + e^{-b}}$. Quaeruntur igitur valores litterarum ω et b, vt his ambabus aequationibus satisfiat; verum ad hoc nulla alia via patet, nisi vt tentando continuo propius ad earum valores progrediamur.

§. 37. Ne autem formulae exponentiales nobis calculum perturbent, statuamus $e^b = n$, vt sit $e^{-b} = \frac{1}{n}$; tum autem, logarithmis hyperbolicis sumendis, erit $b = l\,n$. Quo igitur

igitur logarithmis vulgaribus vti queamus, fiet

$$b = 2,30258509\, l\, n,$$

quippe qui numerus est logarithmus hyperbolicus denarii, vnde ex numero n facile colligitur b per logarithmos, cum fit $l\,b = l\,l\,n + 0,3622156$. Hinc vero fimul patet, fi numerus n exiguum capiat incrementum ∂n, tum incrementum litterae b futurum esse $= \frac{\partial n}{n}$, et fi accuratius defideremus hoc incrementum, erit

$$= \frac{\partial n}{n} - \frac{\partial n^2}{2nn} + \frac{\partial n^3}{3n^3} - \text{etc.}$$

§. 38. Quod autem ad angulum ω attinet, fi eum in minutis fecundis expreffum habeamus, quorum numerus fit N, tum idem angulus ω in partibus radii expreffus reperietur, fi ad l N addatur ifte logarithmus conftans 4,6855749; numerus enim refpondens dabit quaefitum.

§. 39. Nunc tentamen incipiamus, ponendo $n = 20$, vnde primo quaeramus b hoc modo:

$$\begin{aligned} l\,n &= 1,30103, \\ l\,l\,n &= 0,1142873, \\ \text{add.}\ & 0,3622156, \\ l\,b &= 0,4765029, \\ \text{ergo}\ b &= 2,9957. \end{aligned}$$

Cum iam prior aequatio fit fin. $\omega = \frac{2\,b}{n - \frac{1}{n}}$, altera vero cof. $\omega = \frac{5\,\pi - 2\,\omega}{n + \frac{1}{n}}$, pro priore erit $n - \frac{1}{n} = 19,950$, eiusque femiffis $= 9,9750$, vnde colligimus l fin. $\omega = 9,4775900$, ergo

ergo angulus $\omega = 17^0.\ 28'$, ideoque in minutis fecundis $\omega = 62880''$, confequenter in partibus radii $\omega = 0,30485$. Hinc pro altera aequatione habebitur $l\,\mathrm{cof.}\,\omega = 9,9794991$. Pro parte dextra vero eft primo numerator $5\pi - 2.\omega = 15,098216$, eiusque logarithmus $= 1,1789256$, at denominator erit $n + \frac{1}{n} = 20,050$, vnde logarithmus partis dextrae erit $9,8763112$, qui minis eft paruus; vnde concludimus denominatorem minorem effe debere, ideoque $n < 20$.

§. 40. Tribuamus igitur numero n minorem valorem, puta 18, atque totum calculum in fequenti fchemate adiiciamus:

	$n = 18$	$n = 16$	$n = 15,9333$
$l\,n$	1,2552725	1,2041200	1,2022985
$l\,l\,n$	0,0987379	0,0806699	0,0800125
add.	0,3622156	0,3622156	0,3622156
$l\,b$	0,4609535	0,442885:	0,4422281
$\frac{1}{n}$	0,05555	0,06250	0,06276
$n - \frac{1}{n}$	17,94444	15,93750	15,87057
$n + \frac{1}{n}$	18,05555	16,06250	15,99609
$l\,2\,b$	0,7619835	0,7439155	0,7432581
$l\,n - \frac{1}{n}$	1,2539300	1,2024202	1,2005925
l fin. ω	1,5080535	9,5414953	9,5426656
ω	$18^0, 47'$	$20^0.\ 22'$	$20^0.\ 25'.\ 6''$.
N	67620	73320	73506
l N	4,8300752	4,8652225	4,8663228
add.	4,6855749	4,6855759	4,6855749
$l\,\omega$	9,5156501	9,5507974	9,5518977

ω

ω	0, 32783	0, 35547	0, 35637
2ω	0, 65566	0, 71094	0, 71274
2ω	0, 65566	0, 71094	0, 71274
5π	15, 70796	15, 70796	15, 70796
$5\pi - 2\omega$	15, 05230	14, 99702	14, 99522
$l(5\pi - 2\omega)$	1, 1776029	1, 1760050	1, 1759529
$l(n + \frac{1}{n})$	1, 2565975	1, 2058131	1, 2040138
. . . . .	9, 9210054	9, 9701919	9, 9719391
l coſ. ω	9, 9762321	9, 9719642	9, 9718186
error	0, 0552267	0, 0017723	0, 0001205
	—	—	+

§. 41. In prima ergo columna error prodiit $-0,0552267$, qui caſu $n = 20$ erat $-0,1026879$, vnde concluſimus valorem ipſius n adhuc eſſe nimis magnum, ideoque ſecundam columnam adiunximus, ponendo $n = 16$. At ex ſecunda columna prodiit error $-0,0017723$; quare cum prima columna dediſſet errorem $-0,0552267$, et differentia $0,0534544$ orta ſit ex differentia hypotheſium 2, fiat vt $5345 : 2 = 177 : 0,066$, et tanta fractione numerus $n = 16$ diminui debebit. Ponatur ergo pro tertia columna $n = 15,9333$, fiatque calculus vt in prioribus, atque error inde reſultans reuera pro nihilo haberi poteſt, ita vt iam certi ſimus eſſe $a = 7,49761$ et $b = 2,76840$.

§. 42. Inuentis igitur litteris a et b nulla ratio ſimplex inter eas deprehenditur, neque vero etiam ad peripheriam π notabilem rationem tenent. Conſideremus autem

tem ipſum factorem trinomialem, ex quo haec radix imaginaria eſt nata, qui eſt

$$yy \pm 2ay + aa + bb,$$

et ex valoribus inuentis reperitur

$$aa + bb = 63,87821,$$

qui numerus cum neque inſigni proprietate gaudeat, neque etiam ad $\pi\pi$ rationem teneat ſimplicem, omnis ſpes euaneſcit, factores trinomiales aequationis propoſitae ſimplici modo exprimendi, qui ergo etiam ſine dubio altiores quantitates tranſcendentes inuoluunt. Interim tamen confido, tractationem huius argumenti, in quo nonnulla egregia artificia occurrunt, Geometris non eſſe diſplicituram.