E702

DE NOVO GENERE QVAESTIONVM ARITHMETICARVM PRO QVIBVS SOLVENDIS CERTA METHODVS ADHVC DESIDERATVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 19 Maii 1777.

§. 1.

Occasionem de huiusmodi quaestionibus cogitandi mi suppeditavit problema Diophanteum, quo quaerunt omnes numeri integri pro N accipiendi, ut ambae istae f mulae: $A^2 + B^2$ et $A^2 + NB^2$, simul quadrata reddi qu ant. Satis enim constat infinitos numeros hinc exclud quibus conditioni praescriptae neutiquam satisfieri que Veluti si fuerit $N = -1$, demonstratio iam in vulgus nc est, quod hae duae formulae $A^2 + B^2$ et $A^2 - B^2$, nu modo simul quadrata evadere queant. Idem quoque ever si capiatur $N = 2$, vel $N = 3$, vel $N = 4$, vel $N =$ vel etiam $N = 6$. Post unitatem enim primus nume idoneus pro N accipiendus est $N = 7$; quandoquidem sum $A = 3$ et $B = 4$, ut $A^2 + B^2 = 25$, erit quoque A^2 N

N $B^2 = 121$. Praeterea vero infiniti alii exhiberi possunt
huiusmodi numeri idonei tam positivi quam negativi; sem-
per autem infiniti dantur alii, qui ex hoc ordine penitus
excluduntur. Quamobrem quaestio non parum est curiosa,
atque attentione satis digna: quemadmodum omnes numeros
idoneos pro N accipiendos indagari oporteat? Vbi imprimis
criteria desiderantur, quorum ope numeri idonei ab ineptis
distingui queant.

§. 2. Ante omnia autem evidens est ab hac quae-
tione penitus removeri debere casum, quo alterum quadra-
orum A^2 et B^2 evanesceret, siquidem si esset $B = 0$, am-
bae formulae ultro erunt quadrata; sumto autem $A = 0$,
omnes numeri quadrati pro N assumti satisfacerent. His
ergo casibus exclusis primo conditioni priori, qua formula
$A^2 + B^2$ quadratum reddi debet, est satisfaciendum; quod
t ponendo $A = xx - yy$ et $B = 2xy$, tum enim erit
$A^2 + B^2 = (xx + yy)^2$, ubi ambos numeros x et y pro lu-
itu accipere licet, si modo excludantur casus, quibus vel
alteruter horum numerorum evanescit, vel ambo inter se
aequales capiuntur; quandoquidem priori casu foret $B = 0$,
posteriori vero fieret $A = 0$, quos casus modo a nostra tra-
atione exclusimus.

§. 3. Substituamus nunc istos valores pro A et B
assignatos in formula $A^2 + N B^2$, et prodibit haec expressio:
$(xx - yy)^2 + 4 N xxyy$, quam ergo quadratum effici opor-
et. Potuisset illa quidem quadrato cuicunque aequalis
statui, indeque valor ipsius N definiri. Verum quia requiri-
ur, ut N prodeat numerus integer, in id erit incumben-
dum, cuiusmodi quadrato ista expressio aequalis statui de-
beat,

beat, ut inde pro N numerus integer resultet. Si enim quadratum illud statuatur $= zz$, ex aequatione $(xx - yy)^2 + 4Nxxyy = zz$, elicitur $N = \frac{zz - (xx - yy)^2}{4xxyy}$. Necesse igitur est, ut numerator huius fractionis per denominatorem divisibilis evadat.

§. 4. In genere autem hoc duplici modo fieri posse observavi, si sumatur vel $Z = xx + 2\alpha xxyy + yy$, vel $Z = xx + 2\alpha xxyy - yy$. Si enim pro α etiam numeri fracti tam positivi quam negativi admittantur, quemcunque valorem habuerit quantitas Z, ea semper in utraque harum formularum comprehendi poterit. Evolvamus igitur valores, qui hinc pro nostro numero N resultant, ac prior quidem forma nobis dabit

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx + \alpha yy + 1 = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1);$$

ex altera autem forma reperitur

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx - \alpha yy = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1.$$

§. 5. Certum igitur est omnes plane valores idoneos ipsius N in his formulis contineri debere, si modo pro littera α non solum numeri integri, sed etiam fracti quicunque admittantur; dum pro binis litteris x et y sufficit solos numeros integros assumsisse, propterea quod numeri illi primitivi A et B semper tanquam integri spectari possunt, sine ulla quaestionis restrictione. Quin etiam quilibet valor ipsius N in utraque formula contineri debet, quoniam altera ex altera deduci potest. Si enim in priori ponamus $\alpha xx + 1 = \beta xx$, id quod semper fieri licet, quoniam pro α et β etiam fractiones admittuntur, ob $\alpha = \frac{\beta xx - 1}{xx}$, prior forma evadet $= \beta xxyy - \beta yy + \beta xx$, quae est ipsa forma

forma pofterior, fi fcilicet ibi loco α fcribatur β. Interim tamen, quia haec reductio per fractiones eft facta, praeftabit utraque forma primo inventa in fequentibus uti; quandoquidem eae effentialiter a fe invicem diftinguuntur, dum prior, utpote productum ex duobus factoribus, femper numeros compofitos producit, pofterior vero etiam numeros primos fuppeditare poteft. Veluti ponendo $\alpha = 1$; $x = 2$ et $y = 1$, prodit $N = 7$.

§. 6. Quin etiam in genere litteram α negative accipere licet, hincque quatuor formulas generales pro N nancifcemur, quae erunt:

$$\text{I. } N = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1),$$
$$\text{II. } N = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1,$$
$$\text{III. } N = (\alpha xx - 1)(\alpha yy - 1),$$
$$\text{IV. } N = (\alpha xx + 1)(\alpha yy - 1) + 1,$$

evidens autem eft quartam formam a fecunda non effe diverfam, quia tantum numeri x et y permutantur, qui vero ex fua natura funt permutabiles.

§. 7. Cum igitur totum negotium eo redeat, ut hinc numeri integri pro N eliciantur, manifeftum eft hoc femper ufu venire, quando litterae α valores integri tribuuntur. Hos igitur cafus primum confideremus, indeque actu omnes valores ipfius N usque ad 100 eliciamus. Vbi probe meminiffe oportet, amborum numerorum x et y neutrum nihilo aequalem ftatui poffe; neque vero etiam inter fe aequales capi debere. Sumamus igitur primo $\alpha = 1$, ac prima forma erit $N = (xx + 1)(yy + 1)$. Quia igitur nu-

 meri

meri in forma $zz+1$ contenti, sunt: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101; producta ex binis horum numerorum valores idoneos pro N exhibebunt, si modo quadrata horum numerorum excludantur. Hoc observato numeri idonei centenario non maiores erunt 10, 20, 34, 50, 52, 74, 85, 100.

§. 8. Manente $\alpha = 1$ forma tertia dabit

$$N = (xx - 1)(yy - 1).$$

Hinc cum numeri formae $zz - 1$ sint 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, producta ex binis horum numerorum diversis, quoque valores idoneos pro N praebebunt, qui ad 100 usque erunt 24, 45, 72. Secunda autem forma, casu $\alpha = 1$, erit $N = (xx - 1)(yy + 1) + 1$, quae forma duplicis generis numeros involvit, qui sunt

$$zz - 1 = 0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,$$

$$zz + 1 = 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,$$

et singuli numeri superioris seriei per singulos inferioris multiplicati, si ad productum unitas adiiciatur, dabunt valores idoneos pro N, si modo nullus superiorum per subscriptum multiplicetur. Hinc ergo valores idonei pro N ad 100 usque erunt: 7, 17, 31, 41, 49, 52, 71, 76, 79, 97.

§. 9. Sumamus nunc $\alpha = 2$, et ex forma prima habebimus $N = (2xx + 1)(2yy + 1)$; unde cum numeri formae $2zz + 1$ sint 3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, quorum producta ex binis diversis sunt sumenda, hinc prodeunt pro N sequentes numeri: 27, 57, 99. Forma autem tertia dat $N = (2xx - 1)(2yy - 1)$. Hinc cum numeri formae $2zz - 1$ sint 1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, producta ex binis diversis praebent sequentes valores idoneos pro N: 7, 17, 17, 31, 49, 71, 79. Forma autem secunda praebet $N = (2xx - 1)(2xx + 1) + 1$, ubi duplicis generis factores erunt:

$$2zz - 1 = 1, 7, 17, 49, 71, 97,$$
$$2zz + 1 = 3, 9, 19, 51, 73, 100.$$

Hinc exclusis numeris subscriptis producta ex superioribus per inferiores unitate aucta dabunt valores pro N idoneos, qui ad 100 usque sunt hi: 10, 20, 22, 52, 74, 94, 101.

§. 10. Sit nunc $\alpha = 3$, ac prima forma dat

$$N = (3xx + 1)(3yy + 1),$$

unde numeri huius formae $3zz + 1$ sunt 4, 13, 28, 49, 76. Hinc igitur producta ex binis diversis sumendo, unicus tantum oritur numerus idoneus pro N infra 100, scilicet 52. At ex forma tertia fit $N = (3xx - 1)(3yy - 1)$; unde quia numeri formae $3zz - 1$ sunt 2, 11, 26, 47, 74, producta ex binis diversis dant 22, 52, 94. Ex forma autem secunda

$$N = (3xx - 1)(3yy + 1) + 1,$$

prodeunt sequentes pro N valores: 27, 45, 57, 99.

§. 11. Superfluum foret pro α sumere 4. Nam quia $4xx$ et $4yy$ sunt quadrata, casus eodem rediret, ac $\alpha = 1$. Sit igitur $\alpha = 5$, ac prima forma dat

$$N = (5xx + 1)(5yy + 1),$$

unde infra 100 nullus numerus idoneus prodit. Ex forma autem tertia

$$N = (5xx - 1)(5yy - 1),$$

prodit

prodit 76. At fecunda forma

$$N = (5xx - 1)(5yy + 1) + 1,$$

praebet 85.

§. 12. Si porro ftatuere velimus $\alpha = 6$, nullus numerus infra centenarium inde nafcitur. Quamobrem fi omnes numeros inventos colligamus, valores integri pro α affumti pro N fequentes numeros idoneos in ordine difpofitos praebent: 7, 10, 17, 20, 22, 24, 27, 31, 34, 41, 45, 49, 50, 52, 57, 71, 72, 74, 76, 79, 85, 94, 97, 99, 100.

§. 13. Plurimum autem falleretur, fi quis putaret plures valores idoneos usque ad centenarium non dari. Nullum enim eft dubium, quin etiam valores fracti pro α affumti quosdam quoque centenario minores numeros pro N producant, quos cafus ut perfcrutemur, neceffe eft in eas fractiones pro α accipiendas inquirere, unde valores integri pro N oriri queant, id quod in fequente problemate expediemus.

Problema

Inveftigare eas fractiones pro α accipiendas, unde ifta formula generalis: $(\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$ valores integros adipifci poffit.

Solutio.

§. 14. Ifta inveftigatio potiffimum pendet ab indole binorum numerorum x et y, quos non folum femper tanquam integros, fed etiam primos inter fe fpectare licet. Res autem nunc praecipue huc redit, vtrum ambo hi numeri x et y factores habeant, nec ne? quandoquidem ab his factoribus

ribus fractiones per α introductae tolli debent. Statuamus igitur in genere $x = pq$ et $y = rs$, quippe qua positione defectus factorum non excluditur, quia nihil impedit, quo minus pro p et s unitas accipiatur. Caeterum quia x et y sunt primi inter se, p, q, r, s ut primi inter se spectari poterunt; hoc modo formula proposita erit

$$N = (\alpha ppqq \pm 1)(\alpha rrss \pm 1).$$

§. 15. Statuamus nunc pro α hanc fractionem: $\alpha = \frac{a}{qqss}$, ubi iam littera a numeros integros quoscunque designet; atque formula proposita sequentem induet formam:

$$\left(\frac{app}{ss} \pm 1\right)\left(\frac{arr}{qq} \pm 1\right) = \left(\frac{app \pm ss}{ss}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{qq}\right).$$

Vbi observasse iuvabit, quia tam numeri p et s quam q et r sunt primi inter se, neutram harum duarum fractionum in numerum integrum abire posse, propterea quod ex numero a tam factor qq quam ss excluditur; verum permutentur ambo denominatores, ut obtineatur ista forma:

$$\left(\frac{app \pm ss}{qq}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{ss}\right),$$

ubi iam nihil impedit, quo minus utraque haec fractio numero integro aequari possit, quandoquidem fieri potest, ut tam $app \pm ss$ divisibile fiat per qq, quam $arr \pm qq$ divisibile per ss.

§. 16. Vt autem prius eveniat, ex proprietatibus numerorum iam satis cognitis oportet ut q sit numerus formae $aff + gg$; tum enim semper pro p numeros integros tales invenire licebit, ut forma $app + ss$ fiat divisibilis per qq. Simili modo etiam requiritur, ut sit s formae $aff \pm gg$; tum

tum enim pariter femper numeri integri pro r affignari poterunt, quibus forma $arr \pm qq$ divifionem per ss admittat.

§. 17. Hoc problemate foluto, fi ftatuamus $x = pq$ et $y = rs$, fumto $\alpha = \frac{a}{qqss}$, tres noftrae formae generales pro N inventae fequenti modo repraefentabuntur:

$$\text{I. } N = \left(\frac{app + ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right),$$

$$\text{II. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right) + 1,$$

$$\text{III. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr - qq}{ss}\right),$$

ubi pro litteris p, q, r, s, eiusmodi valores accipi debent, ut binae illae fractiones ad numeros integros revocentur; ex quo intelligitur, has formas infinities effe generaliores quam praecedentes.

§. 18. Maximum autem difcrimen hinc ftatim elucet, quod cum priores formae nunquam ad numeros negativos pro N perducant, hic tam forma fecunda quam tertia innumerabiles alios numeros negativos exhibere queat, quando fcilicet vel $app < ss$, vel $arr \lessgtr qq$, ex quo folo iam certo fequitur, has formulas pofteriores innumerabiles praebere poffe valores idoneos pro N, qui in formulis primo inventis plane non contineantur.

§. 19. Hae autem formulae ita latiffime patent, ut difficillimum fit omnes cafus in iis contentos repraefentare; quamobrem cafus faltem quosdam maxime fpeciales evolvamus. Ac primo quidem fumamus $a = 1$ et $s = 1$, et forma noftra prima dabit $N = \left(\frac{pp + 1}{qq}\right)(rr + qq)$, ubi ergo tan-

tantum opus eſt, ut qq fiat diviſor formulae $pp+1$, id quod ſtatim evenit ſumendo $p=7$ et $q=5$, ſicque enim fiet $N=2(rr+25)=2rr+50$. Hinc autem pro N infra 100 ſequentes novi prodeunt valores: 58, 68, 82.

§. 20. Quoniam ſecunda forma etiam hoc modo referri poteſt: $(\frac{app+ss}{qq})(\frac{arr-qq}{ss})+1$, ſumto $a=1$ et $s=1$ erit $N=(\frac{pp+1}{qq})(rr-qq)+1$. Hinc ſumto $p=7$ & $q=5$, erit $N=2rr-49$, unde primum pro N iſti numeri negativi prodeunt: -17, -31, -41, -47, poſitivi autem infra 100 hinc oriundi ſunt: 23, 49, 19. Deinde vero formula $pp+1$ per numerum quadratum dividi nequit, usque ad $p=18$ et $q=5$, unde prodit $\frac{pp+1}{qq}=13$, ideoque ex forma prima fit

$$N=13(rr+25)=13rr+325,$$

ex ſecunda autem forma fit $N=13rr-324$. Hinc autem nulli numeri infra 100 oriuntur.

§. 21. Maneat $a=1$ et $s=1$, ac forma tertia dabit

$$N=(\frac{pp-1}{qq})(rr-qq),$$

ſecunda vero dabit

$$N=(\frac{pp-1}{qq})(rr+qq)+1,$$

quae formulae ſatis ſunt foecundae in numeris idoneis pro N exhibendis, quoniam pluribus modis $\frac{pp-1}{qq}$ poteſt eſſe numerus integer. Primo ſcilicet ſumto $p=3$ capi poterit $q=2$, unde prior forma erit $N=2rr-8$, poſterior vero $N=2rr+9$; illa igitur praebet hunc numerum negativum: $N=-6$, hos vero poſitivos: 10, 24, 42, 64, 90; ex poſteriore vero oriuntur hi poſitivi: 11, 17, 27, 41, 59, 81.

§. 22.

§. 22. Sit nunc $p=5$ et $q=2$, et ambae formulae erunt $N=6rr-24$ et $N=6rr+25$. Ex illa prodit numerus negativus -18; positivi vero 30, 72. Ex altera vero oriuntur hi numeri: 31, 49, 79. Sumatur nunc $p=7$ et $q=4$, et ambae formulae erunt $N=3rr-48$ et $N=3rr+49$. Prior dat hos negativos: -45, -36, -21; positivos vero hos: 27, 60, 99. Altera forma dat hos positivos: 52, 61, 76, 97.

§. 23. Sumamus nunc $p=8$ et 3, et formulae nostrae erunt $N=7rr-63$ et $N=7rr+64$. Ex priore oriuntur hi negativi: -56, -35; et positivus 49. Secunda vero forma praebet hos positivos: 71, 92.

§. 24. Sumto porro $p=9$, capi poterit $q=4$, unde formulae nostrae fiunt $N=5rr-80$ et $N=5rr+81$. Prima praebet hos negativos: -75, -60, -35; positivos vero hos: 45, 100. Altera vero praebet 86.

§. 25. Sumto porro $p=10$, erit $q=3$, et formulae erunt $N=11rr-99$ et $N=11rr+100$. Prima forma dat hos negativos numeros: -88, -55; positivum vero 77. Si hoc modo ulterius progredi velimus, unicus novus numerus infra 100 reperitur, scilicet -90.

§. 26. Hactenus igitur sequentes numeros negativos pro N sumus adepti: -6, -17, -18, -21, -31, -35, -36, -41, -45, -47, -55, -56, -60, -75, -88, -90; at vero numeri positivi hactenus inventi et in ordinem redacti sunt: 7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42, 45, 49, 50, 52, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

§. 27.

§. 27. Hic ordo numerorum negativorum adhuc fatis est magnus, dum ex casibus magis complicatis insuper plures alii oriuntur; at vero ordo positivorum ex talibus casibus vix uno vel altero augebitur, uti mox docebimus. Maneat adhuc $a = 1$, at ponatur $s = 2$, atque forma prima dabit $N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr+qq}{4})$, quae autem, quoniam summa duorum quadratorum nunquam per 4 est divisibilis, praetermitti debet; hinc autem forma secunda praebet

$$N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}) + 1.$$

Hic iam sumatur $p = 11$ et $q = 5$, fietque $N = 5(\frac{rr-25}{4}) + 1$. Statuatur porro $r = 2t + 1$, eritque $N = 5(tt + t) - 29$ unde nascuntur isti numeri negativi: -19, -29; ad positivos vero hinc nullus accedit.

§. 28. Manente $s = 2$ et $a = 1$, forma tertia praebet

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}),$$

secunda vero

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr+qq}{4}) + 1;$$

quae autem, ob rationem ante memoratam, est omittenda. Sumatur nunc primo $p = 7$ et $q = 3$, eritque $N = 5(\frac{rr-9}{4})$, quae forma, posito $r = 2t + 1$, abit in $N = 5(tt + t) - 10$, unde oritur numerus negativus -10, positivus vero nullus novus hinc oritur. Sumto autem $p = 11$, erit

$$N = 13(\frac{rr-9}{4}) = 13(tt + t - 2),$$

unde nascitur iste numerus negativus: -26, positivorum autem nullus novus accedit.

§. 29. Casu autem postremo si sumamus $p = 1$ et $q = 1$, erit $N = -3\left(\frac{rr-1}{4}\right)$, quae posito $r = 2t + 1$ abit in hanc: $N = -3(tt + t)$, unde oriuntur sequentes numeri negativi: -6, -18, -36, -60, -90, qui autem omnes iam sunt inventi. Sumatur vero $s = 3$ et $p = 1$ et $q = 2$, orietur hinc forma $N = -2\left(\frac{rr-4}{9}\right)$. Ponatur hic $r = 9t + 2$ fietque $N = -2(9tt + 4t)$, unde sumto $t = -1$, prodit $N = -10$. Ex $t = 1$ fit $N = -26$. At $t = -2$ praebet -56.

§. 30. Nimis longum autem foret omnes huiusmodi casus prosequi; praesertim cum nunquam certi esse possemus omnes valores idoneos pro N invenisse, siquidem terminus ultra 100 extenderetur; hanc ob rem tantum aliquos casus speciales subiungamus, unde saltem novi numeri positivi deduci queant. Pro forma autem prima, manente $a = 1$, erit $N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr+qq}{ss}\right)$, ubi iam notavimus hos factores integros fieri non posse, nisi numeri q et s sint summae duorum quadratorum. Sin autem pro forma secunda fit

$$N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr-qq}{ss}\right) + 1,$$

sufficiet ut tantum q sit summa duorum quadratorum. Hic ergo sumamus $p = 4$ et $s = 3$, at vero $q = 5$, ut prodeat

$$N = \frac{rr-25}{9} + 1 = \frac{rr-16}{9}.$$

Posito ergo hic $r = 9t + 4$, prodit $N = 9tt + 8t$, unde autem nulli novi numeri deducuntur.

§. 31. Consideremus casum, quo $\frac{pp+ss}{qq} = 1$, simul vero ambo numeri q et s sint summae duorum quadratorum, ut prima forma locum habere possit, id quod eveniet fiet fumendo $p = 12$, $s = 5$ et $q = 13$, fietque $N = \frac{rr + 169}{25}$, quae fractio fi evadat integra cafu $r = f$, etiam numeros integros dabit ponendo $r = 25t \pm f$; tum enim prodibit

$$N = 25tt \pm 2tf + \frac{ff + 169}{25},$$

haec conditio autem adimplebitur, fumendo $r = 25t \pm 9$, hinc enim fiet $N = 25tt \pm 18t + 10$, unde oriuntur fequentes valores: 10, 17, 53, 74, quorum 53 plane eft novus. Si forma fecunda pro iisdem pofitionibus uti vellemus, haberetur

$$N = \frac{rr - 169}{25} + 1 = \frac{rr - 144}{25},$$

quae fi ponatur $r = 25t \pm 13$, tranfit in hanc formam:

$$N = 25tt \pm 26t + 1, \text{ five } N = (t \pm 1)(25t \pm 1),$$

unde patet hanc formam iam in principali, quae erat

$$N = (\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$$

contineri, fumendo $\alpha = t$; $x = 1$ et $y = 5$, unde novi numeri non funt expectandi.

§. 32. Ex iis igitur, quae hactenus funt tradita, patet valores idoneos pofitivos pro numero N usque ad 100 hoc ordine procedere:

7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42
45, 49, 50, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72
74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

Sequentes autem ex hoc ordine exclufi funt putandi:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21,
25, 26, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44
46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70
73, 75, 78, 80, 83, 84, 87, 88, 89, 91, 93, 95, 96, 98.

Quomodocunque autem hos binos ordines contemplemur, nullum plane patefcit criterium, quo numeri idonei et inepti a fe invicem diftinguantur; unde affirmare haud dubito, certam methodum huiusmodi quaeftiones refolvendi in Analyfi etiamnunc effe incognitam.

§. 33. Cum autem quaeftio, quam hactenus tractavimus, fit quodammodo complicata, aliquas quaeftiones fimpliciores, fpeciminis loco, hic fubiungam, quas, quam diu methodus memorata latuerit, pariter refolvere non licet.

Quaeftio I.

§. 34. *Si litterae x et y denotent numeros quoscunque rationales, tam fractos, quam integros, inveftigare omnes numeros integros N, qui in hac formula: $N=(xx+1)(yy+1)$ contineantur.* Hic quidem primo patet, fumto $x=0$ fequentes numeros occurrere:

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, etc.

Praeterea vero manifeftum eft in ifta forma non folum quadrata fingulorum horum numerorum, fed etiam producta ex binis quibusque occurrere, quae funt

4, 10, 20, 25, 34, 50, 52, 74, 100.

Hi fcilicet numeri ex valoribus integris litterarum x et y nafcuntur; verum innumerabiles alii oriri poffunt ex valoribus fractis. Si enim ponamus $x=\frac{p}{q}$ et $y=\frac{r}{s}$, fiet

$$N=\left(\frac{pp+qq}{qq}\right)\left(\frac{rr+ss}{ss}\right), \text{ five } N=\left(\frac{pp+qq}{ss}\right)\left(\frac{rr+ss}{qq}\right),$$

ubi manifeftum eft infinitis modis fieri poffe, ut tam $pp+qq$ per ss quam $rr+ss$ per qq divifionem admittat. Hic igitur potiffimum certa methodus defideratur, quae omnes plane ne valores idoneos pro N, usque ad terminum quemcunque, assignare valeat.

Quaestio II.

§. 35. *Si x et y denotent omnes numeros rationales, tam fractos, quam integros, investigare omnes numeros integros, qui in hac formula:* $N = (xx - 1)(yy - 1)$ *contineantur.* Hic autem ex valoribus integris ipsarum x et y numeri resultantes facile assignantur, ac describi possunt; at vero ex fractionibus $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$ innumerabiles alii resultare possunt, quorum indolem et nexum cum prioribus perscrutari — hoc opus hic labor est!

METHO-