E732

SOLUTIO FACILIOR PROBLEMATIS DIOPHANTEI

CIRCA TRIANGULUM, IN QUO RECTAE EX ANGULIS LATERA OPPOSITA BISECANTES RATIONALITER EXPRIMANTUR.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 12. Aug. 1779.

§. 1. Positis trianguli lateribus $AB = 2c$, $AC = 2b$ et $BC = 2a$, si rectae bisecantes vocentur $AX = x$, $BY = y$ et $CZ = z$, ex Geometria constat quadrata harum trium rectarum sequenti modo exprimi:

$$xx = 2bb + 2cc - aa$$
$$yy = 2cc + 2aa - bb$$
$$zz = 2aa + 2bb - cc$$

quas ergo aequationes per numeros rationales resolvi oportet.

§. 2. Ex his tribus aequationibus formentur tres sequentes:

$$\text{I. } xx - yy = 3(bb - aa)$$
$$\text{II. } xx + yy = 4cc + aa + bb$$
$$\text{III. } zz = 2aa + 2bb - cc,$$

quas aequationes sequenti modo tractemus.

§. 3. Incipiamus ab harum aequationum prima, atque ut fractiones evitemus, statuamus $xx-yy=3(bb-aa)$ $=12fg(pp-qq)$; unde cum sit $bb-aa=4fg(pp-qq)$, faciamus $b+a=2f(p+q)$ et $b-a=2g(p-q)$, unde erit $b=(f+g)p+(f-g)q$ et $a=(f-g)p+(f+g)q$. Porro vero pro aequatione $xx-yy=12fg(pp-qq)$ statuamus $x+y=6g(p+q)$ et $x-y=2f(p-q)$; unde fiet $x=(3g+f)p+(3g-f)q$ et $y=(3g-f)p+(3g+f)q$.

§. 4. Jam aggrediamur aequationem secundam

$$xx+yy=4cc+aa+bb$$

atque ex valoribus modo inventis reperietur

$$xx+yy=2(9gg+ff)(pp+qq)+4(9gg-ff)pq.$$

Deinde vero erit

$$bb+aa=2(ff+gg)(pp+qq)+4(ff-gg)pq.$$

Cum igitur sit $4cc=xx+yy-(bb+aa)$, erit

$$4cc=16gg(pp+qq)+(40gg-8ff)pq$$

quocirca habebimus $cc=4gg(pp+qq)+(10gg-2ff)pq$, quam ergo formulam quadratum reddi oportet.

§. 5. Hinc jam ad tertiam aequationem progrediamur, quae est $zz=2(aa+bb)-cc$; unde cum sit

$2(aa+bb)=4(ff+gg)(pp+qq)+8(ff-gg)pq$ et
$cc=4gg(pp+qq)+(10gg-2ff)pq$, erit
$zz=4ff(pp+qq)+(10ff-18gg)pq$,

quae ergo est altera formula quam ad quadratum reducere debemus.

§. 6. Priorem harum duarum aequationum dividamus per $4gg$, posteriorem vero per $4ff$, ut habeamus sequentes formulas ad quadratum redigendas:

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2pq\left(\frac{5gg - ff}{4gg}\right)$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2pq\left(\frac{5ff - 9gg}{4ff}\right).$$

§. 7. Ponamus jam brevitatis ergo $\frac{5gg - ff}{4gg} = m$ et $\frac{5ff - 9gg}{4f} = n$, ita ut tota quaestio ad resolutionem istarum duarum formularum sit perducta:

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2mpq = tt$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2npq = uu$$

atque habebimus $c = 2gt$ et $z = 2fu$. Jam ut hae duae formulae ad quadratum reducantur, notetur esse $tt - uu = 2(m-n)pq$, quam aequationem commode ita tractare licet, ut statuatur $t + u = (m - n)p$ et $t - u = 2q$, unde colligitur $t = \frac{1}{2}(m - n)p + q$ et $u = \frac{1}{2}(m - n)p - q$.

§. 8. Quodsi nunc hi valores loco t et u substituantur, sumtis quadratis utrinque eadem aequatio emergit

$$pp\left(1 - \tfrac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)pq = 0,$$

quae aequatio per p divisa fit

$$p\left(1 - \tfrac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)q = 0,$$

unde sponte fluit ista ratio inter litteras p et q: $\frac{p}{q} = \frac{4(m+n)}{(m-n)^2 - 4}$.

quocirca sumi poterit $p = 4(m+n)$ et $q = (m-n)^2 - 4$ sive aeque multipla, puta in genere $p = 4(m+n)M$ et $q = ((m-n)^2 - 4)N$, hocque modo omnibus conditionibus plene est satisfactum.

§. 9. Inventis nunc litteris p et q erit $t = 2(m+n)(m-n) + (m-n)^2 - 4 = (m-n)(3m+n) - 4$ et $u = (m-n)(m+3n) + 4$, unde porro has determinationes deducimus:

$$c = 2g(m-n)(3m+n) - 8g \text{ et}$$
$$z = 2f(m-n)(m+3n) + 8f.$$

Juvabit autem loco t et u eorum valores ex §. 7. sumsisse, ita ut sit $c = g(m-n)p + 2gq$ et $z = f(m-n)p - 2fq$.

§. 10. Nunc igitur solutio nostri problematis sequenti modo concinnari potest:

1.) Ambae litterae f et g penitus arbitrio nostro permittuntur, ex quibus definiantur litterae m et n ope harum formularum: $m = \frac{5gg - ff}{4gg}$ et $n = \frac{5ff - 9gg}{4ff}$.

2.) Hinc porro quaerantur litterae p et q ope harum formularum: $p = 4(m+n)$ et $q = (m-n)^2 - 4$, quibus inventis tam latera trianguli quam rectae bisecantes sequenti modo exprimentur.

3.) Pro lateribus scilicet inventae sunt hae formulae:

$$a = (f - g)\,p + (f + g)\,q$$
$$b = (f + g)\,p + (f - g)\,q$$
$$c = 2g\,(m - n)(3m + n) - 8g = g\,(m - n)\,p + 2gq$$

4.) Denique rectae bisecantes ita se habebunt:

$$x = (3g + f)\,p + (3g - f)\,q$$
$$y = (3g - f)\,p + (3g + f)\,q$$
$$z = 2f\,(m - n)(m + 3n) + 8f = f\,(m - n)\,p - 2fg.$$

§. 11. Ut rem exemplo illustremus, sumamus $f = 2$ et $g = 1$, fietque hinc $m = \frac{1}{4}$ et $n = \frac{11}{16}$; unde porro colligitur $p = \frac{15}{4}$ et $q = -\frac{275}{256}$, qui valores, ad numeros integros minimos reducti, dant $p = 64$ et $q = -65$. Hinc jam nostrum triangulum hoc modo determinabitur:

$a = 131$; $b = 127$; $c = 158$; tum vero
$x = 255$; $y = 261$; $z = 204$.

§. 12. Occasione hujus exempli notasse juvabit etiam litteras x, y, z pro lateribus accipi posse, cum in genere sit

$$2xx - 2yy - zz = 9cc$$
$$2yy + 2zz - xx = 9aa$$
$$2zz + 2xx - yy = 9bb$$

unde sequitur, cum numeros pro x, y, z inventos per 3 deprimere liceat, hinc simplicissimum triangulum formari posse, cujus latera sint 136, 170, 174.

§. 13. Cum hic sit $m = \frac{5gg - ff}{4gg}$ et $n = \frac{5ff - 9gg}{4ff}$, erit primo $m + n = \frac{10ffgg - f^4 - 9g^4}{4ffgg} = -\frac{(gg - ff)(9gg - ff)}{4ffgg}$. Deinde vero habebitur $m - n = \frac{9g^4 - f^4}{4ffgg} = \frac{(3gg + ff)(3gg - ff)}{4ffgg}$, unde colligitur $m - n + 2 = \frac{9g^4 + 8ffgg - f^4}{4ffgg} = \frac{(gg + ff)(9gg - ff)}{4ffgg}$ et

$$m - n - 2 = \frac{9g^4 - 8ffgg - f^4}{4ffgg} = \frac{(gg - ff)(9gg + ff)}{4ffgg}.$$

Quare cum invenerimus $p = 4(m + n)\mathrm{M}$, erit jam

$$p = -\frac{(gg - ff)(9gg - ff)\mathrm{M}}{4ffgg} \text{ et}$$

$$q = ((m - n)^2 - 4)\mathrm{M} = \frac{(g^4 - f^4)(81g^4 - f^4)}{16f^4g^4}\mathrm{M}.$$

§. 14. Quo nunc rationem litterarum p et q ad minimos terminos revocemus, sumamus $\mathrm{M} = \frac{16f^4g^4}{(gg - ff)(9gg - ff)}$, sicque prodibit $p = -16ffgg$ et $q = (gg + ff)(9gg + ff)$. Ex his jam, quia erat $t = \frac{1}{2}(m - n)p + q$, prodit nunc

$$t = (gg + ff)(9gg + ff) - 2(3gg + ff)(3gg - ff).$$

Simili modo erit $u = \frac{1}{2}(m - n)p - q$, unde colligitur

$$u = -(gg + ff)(9gg + ff) - 2(3gg + ff)(3gg - ff).$$

Atque ex his fiet $c = 2gt$ et $z = 2fu$.

§. 15. Pro reliquis litteris erit primo $a + b = 2f(p + q)$ et $b - a = 2g(p - q)$; deinde vero erit $x + y = 6g(p + q)$ et $x - y = 2f(p - q)$. Harum formularum ope quotquot lubuerit exempla satis expedite resolvi, idque adeo in integris, licebit, quandoquidem omnia pendent a ratione inter numeros f et g, quos ergo semper integros assumere licet.

§. 16. Sit $f = 1$ et $g = 2$, eritque $p = -64$ et $q = 185$. Hinc jam colligitur $t = -101$ et $u = -471$; tum vero $c = -404$ et $z = -942$. Porro vero erit $b - a = -996$ et $b + a = +242$; $x + y = 1452$ et $x - y = -498$. Erit igitur

$$a = 619;\ b = 377;\ c = 404$$
$$x = 477;\ y = 975;\ z = 942.$$

Hic observetur, cum numeri x, y, z etiam pro a, b, c usurpari queant, iis per 3 divisis, oriri:

$a = 159$; $b = 325$; $c = 314$, tum autem erit
$x = 619$; $y = 377$; $z = 404$.