DE CURVIS

QUARUM RADII OSCULI TENENT RATIONEM DUPLICATAM DISTANTIAE A PUNCTO FIXO, EARUMQUE MIRABILIBUS PROPRIETATIBUS.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 20. Aug. 1781.

§. 1. Quando curva AZ quaeritur, cujus radius osculi $ZR = r$ aequetur functioni cuicunque distantiae $CZ = z$ a puncto quodam fixo C, solutio facillime derivatur ex relatione inter ipsam distantiam $CZ = z$ et angulum $BCZ = \phi$, a directione fixa CB computatum. Tum enim ducta curvae tangente ZP, si in eam ex puncto fixo C demittatur perpendiculum $CP = p$, constat formulam $\frac{z\partial z}{\partial p}$ aequari radio osculi $ZR = r$, unde cum r sit functio data ipsius z, habebimus $\partial p = \frac{z\partial z}{r}$ et $p = \int \frac{z\partial z}{r} + C$, sicque erit etiam p functio cognita distantiae $CZ = z$, et quidem involvens constantem arbitrariam C. Hinc statim colligitur angulus $CZP = \psi$; cum sit $\sin.\psi = \frac{p}{z}$; quare cum sit $\text{tag.}\,\psi = \frac{z\partial\phi}{\partial z}$, ob $\text{tag.}\,\psi = \frac{p}{\sqrt{zz - pp}}$, habebimus $\partial\phi = \frac{p\,\partial z}{z\sqrt{(zz - pp)}}$, quae aequatio relationem inter distantiam $CZ = z$ et angulum $BCZ = \phi$ ita determinat, ut inde constructio curvae per quadraturas effici queat. Tab. III. Fig. 1.

§. 2. Jam pro casu quem hic evolvere constitui, ubi radius osculi proportionalis esse debet quadrato distantiae $CZ = z$, statuamus $r = \frac{zz}{a}$, unde fit $\partial p = a\frac{\partial z}{z}$, ideoque $p = al\frac{z}{c}$, ubi quidem c

denotat constantem quamcunque arbitrariam. Interim tamen e… loco unitatem tuto scribere licet.

§. 3. Cum igitur sit perpendiculum in tangentem $CP = p = a$… patet ejus valorem fore negativum, quamdiu $z < 1$, et crescente … stantia z continuo imminui, donec tandem evanescat casu $z =$ … quo tangens per ipsum punctum C transibit. Per totum ergo h… intervallum curva AZ convexitatem versus C vertet; deinde ve… quando distantia z ultra unitatem augebitur, curvae AZ concavit… centro C obvertetur, siquidem perpendicula in tangentem contin… crescent, in ratione scilicet ipsius lz.

§. 4. Hinc ergo ob $p = alz$, posito angulo $CZP = \psi$, e… $\sin.\, \psi = \frac{alz}{z}$ et aequatio inter distantiam z et angulum Φ e… $\partial\Phi = \frac{a\partial z lz}{2\sqrt{zz - a^2 lz^2}}$, ubi notandum lz^2 nobis hic semper designare quadrat… logarithmi. Hincque etiam ipse arcus curvae quaesitae $AZ = s$ co… mode definiri poterit, cum sit $\partial s = \frac{z\partial z}{\sqrt{zz - pp}}$ in genere, ideo… nostro casu $\partial s = \frac{z\partial z}{\sqrt{(zz - aa(lz)^2)}}$. Hic statim se offert egregia … fectio inter arcum curvae s et angulum $BCZ = \Phi$. Cum enim …

$$\partial s - a\partial\Phi = \frac{z\partial z - \frac{aa\partial z lz}{z}}{\sqrt{(zz - aa(lz)^2)}},$$

quae expressio pro numeratore habet differentiale ipsius denomin… toris, integrando erit

$$s - a\Phi = \sqrt{(zz - aa(lz)^2)} + C,$$

ubi notetur, formulam radicalem exprimere ipsam curvae tangent… ZP, ita ut semper sit $a\Phi = AZ - ZP$.

§. 5. At vero ipsae formulae differentiales ob lz ita s… comparatae, ut nullo modo ad quadraturas curvarum algebrai… rum, multo minus ad logarithmos vel arcus circulares, reduci quea… atque adeo tanquam penitus intractabiles spectari debeant. Qu… etiam satis difficile videtur, inde saltem formam curvarum cognosce…

§. 6. Circa hanc formulam autem hic observandum est ad nullam distantiam a centro C curvam realiter existere, nisi fuerit $zz > aa(lz)^2$; unde patet curvam non usque ad ipsum centrum C pertingere, quia posito $z = 0$ nostra formula radicalis manifesto fiat imaginaria. Interim tamen sumto $z = 1$ ejus valor jam est realis, quippe qui fit $= 1$; unde patet, inter hos limites $z = 0$ et $z = 1$ certo dari ejusmodi valorem pro z, quo fiat $zz - aa(lz)^2 = 0$, atque in hac distantia initium curvae erit constituendum, siquidem propius ad centrum C neutiquam accedere potest. Ponamus hoc evenire casu $z = f$, ita ut sit $ff = aa(lf)^2$, atque ab hac distantia $z = f$ usque ad $z = 1$ curva convexitatem centro C obvertet, ob lz negativum.

§. 7. Quicunque igitur valores litterae a tribuantur, semper dabitur pro z valor f unitate minor, quo fit $ff = aa(lf)^2$, ideoque $f = -alf$; interim tamen nulla adhuc patet via, ex hac aequatione valorem ipsius f accuratae determinandi, unde valoribus proxime veris acquiescere debemus. Ad hos inveniendos ponamus $f = \frac{1}{\zeta}$, ut sit $\zeta > 1$, cujus ergo valor ex hac aequatione: $\zeta l \zeta = \frac{1}{a}$ definiri debebit, id quod semper fieri potest, quantumvis magnus sive parvus fuerit valor ipsius a. At vero vicissim ex assumto valore ζ littera a facillime innotescit, atque adeo tabula confici posset pro omnibus valoribus ζ valores respondentes litterae a repraesentans.

§. 8. Manifestum autem est si a capiatur unitate major, numerum ζ parum unitatem esse superaturum: posito enim $\zeta = 1 + \theta$, existente θ valde parvo, ut sit proxime $l\zeta = \theta$, erit $\theta + \theta\theta = \frac{1}{a}$, ideoque proxime $\theta = \frac{1}{a+1}$. Cognito autem valore prope vero facile erit valores veritati propiores indagare. Ita si fuerit $a = 1$, satis prope erit $\zeta = \frac{7}{4}$, exactius vero $\zeta = \frac{62}{35}$ et adhuc exactius $\zeta = \frac{85}{48}$, qui valor tam prope accedit ad $\sqrt{\pi}$, ut hunc verum ejus valorem esse suspicari liceat. Tum igitur erit $f = \frac{48}{85}$.

§. 9. Ratio autem inter valores litterarum a et f cla
patebit, si sumamus $\zeta = e^n$, existente e numerum cujus logarith
hyperbolicus est unitas, ita ut sit $e = 2{,}718281828$; tum
erit $l\zeta = n$ et $ne^n = \frac{1}{a}$, ergo $a = \frac{1}{n} e^{-n}$, cui ergo valori
spondet $f = e^{-n}$. Evidens autem est, dum n a 0 usque in
nitum augetur, tum a ab infinito usque ad nihilum diminui, ita
haec formula omnes plane valores possibiles ipsius a complecta
Tum autem maximus valor ipsius f erit 1, sumto $n = 0$, quo c
fit $a = \infty$. At dum a evanescit, quod fit si $n = \infty$, etiam
evanescit.

§. 10. Cum formula $zz - aa(lz)^2$ duos habeat facto
$z - alz$ et $z + alz$, posterior evanescit casu $z = f$, neque vero
alio casu in nihilum abire potest. Videamus igitur quibusnam
sibus prior factor, quo $z > 1$, evanescere possit, sive quibus
$\frac{alz}{z} = 1$. Evidens autem est, quia fractio $\frac{lz}{z}$ tam casu $z = 1$ qu
casu $z = \infty$ evanescit, eam alicubi maximum habituram
valorem, qui valor incidit, ubi $lz = 1$, ideoque $z = e$,
ergo casu fit $\frac{lz}{z} = \frac{1}{e}$, ac tum erit $a = e$; unde intelligit
quamdiu fuerit $a < e$ factorem $z - alz$ nunquam evanescere p
se, sed semper fore $z - alz < 1$. His igitur casibus distan
$CZ = z$ a $z = f$ continuo crescent atque adeo tandem in infini
augebuntur; quamobrem tractum harum curvarum, quando $a < e$,
ligentius examinemus.

§. 11. Cum igitur sit $\partial\Phi = \frac{a\partial z lz}{z\sqrt{(zz - aa(lz)^2)}}$ et $\sin.\psi =$
denotante ψ angulum quo curva ad distantiam $CZ = z$ inclina
ipso initio, quo $z = f$, quia $f < 1$, ideoque logarithmus negati
Tab. III. elementum $\partial\Phi$ negativum habet valorem et in plagam contrariam
Fig. 2. get. Ita si CB fuerit axis, ad quem curva referatur, in eoque
piatur intervallum $CF = f$, curva hoc loco ad axem erit norma
ob $\sin.\psi = 1$. Hinc autem non sursum sed deorsum deflectet,

distantia $CZ = 1$, ubi cum angulus ψ evanescat, curva rectam CZ in Z tanget, hincque demum versus axem deflectet, ita ut ejus radius osculi continuo crescat secundum formulam $r = \frac{zz}{a}$, angulus vero ψ, qui in Z erat 0, non ultra certum limitem crescet, quem attinget ubi fit $z = e$, quo loco erit $\sin. \psi = \frac{a}{e}$. Ab hoc vero loco ulterius a centro C recedendo iste angulus continuo decrescet atque adeo in distantia infinita prorsus evanescet.

§. 12. Cum igitur forma hujus curvae pro quovis valore $a < e$, sive ex radio osculi, sive ex angulo ψ, haud difficulter, proxime saltem, assignari queat, videamus quomodo ad distantias maximas comparata sit futura. Sit igitur CZ' distantia valde magna, existente angulo $BCZ' = \theta$, ita ut sit angulus ψ valde exiguus, et quia alz prae z ut valde parvum spectari potest, pro ulteriori portione curvae erit $\partial\Phi = \frac{a\partial z lz}{zz}$, cujus integrale est $\Phi = C - \frac{a(1+lz)}{z}$, ubi constantem C ita definiri oportet, ut pro situ CZ', a quo quasi ulterius proficiscimur, fiat $\Phi = 0$.

§. 13. Statuamus ergo pro hoc situ $CK = k$, sitque pro quovis alio situ sequente $CZ = z$ et angulus $KCZ = \Phi$, et quia invenimus $\Phi = C - \frac{a(1+lz)}{z}$, sumi debebit $C = \frac{a(1+lk)}{k}$, eritque jam angulus $KCZ = \Phi = \frac{a(1+lk)}{k} - \frac{a(1+lz)}{z}$. Quamobrem ubi distantia z in infinitum augetur, membrum posterius evanescet, fietque $\Phi = \frac{a(1+lk)}{k}$, ita ut curva nunquam ultra hunc angulum, qui sit KCV, digredi possit, unde primo intuitu videtur istam rectam CV, quae respondet distantiae $z = \infty$, futuram esse curvae assymptotam, quod tamen maxime foret absurdum, quia curva isti rectae CV concavitatem obvertit, neque usquam punctum flexus contrarii admittit, quandoquidem radius osculi est $r = \frac{zz}{a}$, ideoque in infinitum usque positivus, quod ergo utique insigne est paradoxon. Quia enim invenimus distantiam infinite magnam in directionem CV cadere, hoc nullo modo

Tab. III. Fig. 3.

evenire posse videtur, nisi curva revera ad hanc rectam CV pert-
gat. Insigne igitur istud paradoxon operae pretium erit omni cu-
eluere.

§. 14. Cum igitur sit angulus KCV $= \frac{a(1+lk)}{k}$, erit angu-
lus VCZ $= \frac{a(1+lz)}{z}$, unde distantia CZ $= z$, in sinum hujus an-
guli vel etiam in angulum quam minimum ducta, dabit distantiam
puncti Z a recta CV, quae ergo erit $= a(1+lz)$; unde pat-
hanc distantiam continuo crescere, atque adeo tandem fieri infinitam
ita ut curva nostra KZ non solum nunquam usque ad hanc dire-
tionem porrigatur, verum etiam ab ea tandem in infinitum reced-
Quemadmodum igitur haec maxime discordantia inter se concili-
queant non parum arduum videtur.

Tab. III. Fig. 4. §. 15. Simile autem paradoxon ipsa parabola communis C-
super axe CV descripta, nobis offert. Cum enim, positis CX $=$
et XZ$=y$, sit $yy = ax$, erit tangens anguli VCZ$= \frac{y}{x}$, sive tag.VCZ$=\sqrt{\frac{a}{x}}$
unde si punctum Z in infinitum removeamus, angulus VCZ prors-
evanescet, cum tamen punctum Z nunquam certe in axem CV in-
cidat, sed ab eo potius in infinitum removeatur. Idem igitur cas-
quoque in nostra curva evenire est censendus. Quamobrem position-
Fig. 3. rectae CV ita definire convenit, ut si alia recta ipsi proxima Cv pr-
ducatur, ea semper ad nostram curvam sit perventura, scilicet int-
omnes rectas, quas intra angulum BCV ex C educere licet, lin-
CV sola est quae curvam nusquam secabit, sicque adeo natura-
omnium curvarum, quae resultant quoties $a < e$, satis prope assi-
nare licet.

§. 16. Perpendamus nunc casus quibus $a > e$, ac stati-
apparet, sumto $z = e$ nostram formulam $zz - aa(lz)^2$ fieri neg-
tivam, ideoque curvam ad hanc distantiam fore imaginariam, quod
etiam inde patet quod hoc casu sin.ψ fieret $= \frac{a}{e}$, hoc est unita-

majori. Cum igitur sumto $z = 1$ nostra formula certe sit positiva, necesse est, ut inter valores $z = 1$ et $z = e$ contineatur casus formulam nostram evanescentem reddens, quam distantiam ponamus $z = g$, ita ut sit $g = alg$ atque ad hanc distantiam ubique sit angulus V rectus.

§. 17. Cum igitur g inter limites 1 et e contineatur, statuamus $g = e^{\alpha}$, ita ut α inter 0 et 1 accipi debeat; tum igitur erit $a = \frac{g}{lg} = \frac{e^{\alpha}}{\alpha}$, unde patet casu $\alpha = 0$ fieri $a = \infty$, at casu $\alpha = 1$ fieri $a = e$. Ex quo intelligitur quicunque valor major quam e ipsi a tribuatur, semper respondere certum valorem pro α positivum et unitate minorem, sicque distantia g semper inter limites 1 et e continebitur.

§. 18. Cum autem pro distantia $z = \infty$ nostra formula realem obtineat valorem, qui tamen, sumto $z = e$, fit imaginarius, necesse est, ut ultra e denuo occurrat distantia z, ubi nostra formula evanescat, ubi ergo curva iterum ad radium fiat normalis, hincque adeo in infinitum usque extendatur. Statuamus igitur hanc distantiam $z = h$, ita ut etiam sit $\frac{h}{lh} = a$, atque intra limites g et h curva nostra ubique erit imaginaria, ideoque partim inter limites f et g includetur, partim ultra h in infinitum porrigetur, dum spatium inter g et h annulare prorsum vacuum relinquitur.

§. 19. Inquiramus igitur in relationem, quae inter binos limites posteriores g et h intercedit, quorum ille minor hic vero major semper est quam e. Hunc in finem ponamus $h = mg$, et cum sit $\frac{h}{lh} = a$, ob $lh = lm + lg$, orietur haec aequatio: $\frac{g}{lg} = \frac{mg}{lm + lg}$, unde reperitur $lg = \frac{lm}{m-1}$, hincque ad numeros ascendendo $g = m^{\frac{1}{m-1}}$, unde igitur fit $h = mg = m^{\frac{m}{m-1}}$, atque porro $a = \frac{m-1}{lm} \cdot m^{\frac{1}{m-1}}$. Hae formulae eo magis sunt notatu dignae, quod assumto pro lubitu numero m, inde statim obtineantur idonei valores pro g, h, a, atque adeo omnes possibiles hoc modo oriantur, dum m ab uni-tate usque ad infinitum augetur. Sumto autem $m = 1$ hae for-mulae videntur fieri indefinitae; at vero posito $m = 1 + \delta$, evanes-cente scilicet δ, erit $g = (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$, quae formula dat $lg = \frac{1}{\delta}\, l(1+\delta) = 1$ sicque patet fore $g = e$ et $h = e$, simulque etiam $a = e$. At vero sumto m infinito fit $g = 1$ et tam h quam $a = \infty$, ita tamen ut h infinities majus sit quam a.

§. 20. Sumamus $m = 2$, eritque $g = 2$, $h = 4$ et $a = \frac{2}{l\,2}$; at sumto $m = 3$, fit $g = \sqrt{3}$; $h = 3\sqrt{3}$, $a = \frac{2\sqrt{3}}{l\,3}$; unde patet, dum numerum m continuo ultra unitatem augemus, va-lores ipsius g continuo decrescere, dum a primo valore e tandem usque ad unitatem rediguntur, contra vero valores ipsius h conti-nuo ultra e augentur usque in infinitum, quod idem de valoribus ipsius a est tenendum, continuo autem magis infra h deprimentur. Denique quod ad primum limitem f, unitate minorem, attinet, quia hic a nunquam infra e subsistit, notasse juvabit satis prope semper fore $f = \frac{2a+1}{2a+3}$, unde facile erit eum propius ad veritatem reducere.

§. 21. Notatu ergo etiam maxime dignum est hanc aequa-tionem: $zz - aa\,(lz)^2 = 0$ non solum semper unam habere radicem realem, sed etiam omnibus casibus, quibus $a > e$, tres involvere ra-dices reales, neque adeo plures unquam existere posse, quas radices litteris f, g et h designavimus. Quoniam igitur casus, ubi $a < e$ jam supra exposuimus, quantum quidem hoc aequationum genus in-tractabile permittit, nunc accuratius in formas nostrarum curvarum quando $a > e$, inquiramus.

§. 22. Primum autem statim liquet curvas his casibus satis-facientes duabus portionibus a se invicem penitus separatis constare prior tota in spatio annulari, inter distantias f et g contento includitur, posterior vero, in distantia h incipiens, continuo magis a centro C recedet atque adeo in infinitum elongabitur.

§. 23. Referant igitur puncta F, G, H, nostros ternos limites, ita ut sit CF $= f$, CG $= g$, CH $= h$, ubi sit praeterea intervallum CE $= e$. Intima igitur curvae portio ab F incipiens primo infra axem descendet, mox vero supra eum iterum ascendet usque ad distantiam C$g = g$, ubi ad Cg erit normalis, dehinc ultra g simili modo rursus ad centrum C propius accedet, ita ut recta Cg futura sit diameter istius curvae. Tum vero etiam evidens est, rectam CF pariter fore curvae diametrum, quippe quae infra axem simili tractu continuabitur per punctum g', ita ut etiam Cg' sit diameter. Unde fieri potest, ut ista curva, intra spatium annulare quasi coronam referens, infinitis praedita sit diametris, quando scilicet angulus FCg nullam tenebit rationem rationalem ad totam circuli peripheriam. Ceterum haud difficulter hinc intelligere licet, quo minor fuerit intervallum CF, sive quo propius limites F et G ad se invicem, ideoque ad unitatem, accedent, eo minores futuros esse angulos FCg, contra vero eo majores, quo propius distantia CG ad CE $= e$ accedet. Tab. III. Fig. 5.

§. 24. Quod ad alteram portionem per H transeuntem attinet, ea tractu satis uniformi in infinitum a centro C recedet, atque adeo ejus quasi portionem infinitesimam exacte assignare valemus. Fig. 6. Sit enim CK distantia jam valde magna $= k$, ideoque angulus HKC $= \psi$ jam valde exiguus, ob $\sin. \psi = \frac{a\, l\, k}{k}$. Jam ultra hoc punctum K progrediamur in Z, ut sit angulus KCZ $= \Phi$ et distantia CZ $= z$, eritque, uti invenimus, $\partial \Phi = \frac{a \partial z\, lz}{z \sqrt{zz - aa\,(lz)^2}}$, ubi membrum $a a\, l z^2$ prae zz negligere licebit, ita ut sit $\partial \Phi = \frac{a \partial z\, lz}{zz}$, hincque integrando $\Phi = C - \frac{a(1 + lz)}{z}$, ubi quia angulus Φ evanescere debet casu $z = k$, erit $\Phi = \frac{a(1 + lk)}{k} - \frac{a(1 + lz)}{z} =$ KCZ. Postquam igitur punctum Z in infinitum fuerit remotum, directio CZ

incidit in CV, eritque angulus KCV $= \frac{a(1+lk)}{k}$; ubi notetur, ob
stantiam k valde magnam, fore $\psi = \frac{alk}{k}$, unde fiet KCV $= \psi +$
Hinc sequitur pro quovis situ CZ angulum ZCV semper esse supe
turum angulum KZC, idque eadem quantitate $\frac{a}{z}$. Non solum a
tem haec curva KZ, in infinitum continuata, nunquam ad rectam C
accedet, verum adeo continuo magis recedet, uti jam supra obse
vavimus.

Tab. III. Fig. 5. §. 25. Casus autem hic occurrit maxime memorabilis, q
ambo limites G et H in puncto E concurrunt atque spatium v
cuum inter binas curvae portiones prorsus evanescit, ita ut nu
tota curva uno quasi tractu in infinitum extendatur. At vero h
casu angulus ille FCg, sive semiamplitudo volutarum, priorem po
tionem constituentium, in infinitum augebitur, ita ut curva ab F pr
fecta per infinitas spiras demum ad distantiam CG $=$ CE $= e$ pe
tinget, cujus adeo gyri postremi omnes erunt circuli radio $= e$ d
scripti, quibus percursis curva demum incipiet altius ascendere
posteriorem curvae portionem formare.

§. 26. Haec autem mirabilia symptomata ob calculi diffic
tatem accuratius evolvere non licet; verum hic adhuc aliud me
rabile phaenomenon se offert. Quamvis enim analysis supra all
omnes plane casus, quibus problemati satisfieri queat, complecti
deatur, tamen datur casus adeo maxime obvius, problemati perf
tissime satisfaciens, scilicet circulus centro C radio a descriptus, p
quo fit ubique $z = a$. Tum enim manifesto erit radius osculi $\frac{zz}{a} =$
At vero hic casus $z = a$ neutiquam in nostra aequatione fi
$\partial\Phi = \frac{a\partial z l z}{2\sqrt{zz - aa(lz)^2}}$ continetur, cum nostra expressio, posito $z =$
fiat imaginaria, quoties scilicet fuerit $a > e$. Videtur ergo istum cas
maxime obvium quasi per divisionem ex calculo expulsum fuisse.