ENODATIO MAXIMI PARADOXI, IN PROBLEMATE QUODAM MECHANICO OCCURRENTIS.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 28. Maji 1781.

§. 1. Problema mechanicum, quod tantas difficultates, atque adeo manifestas contradictiones, implicare videtur, ita succincte enunciari potest:

Invenire curvam AYZ, super qua corpus descendens secundum horizontem AB motu uniformiter acclerato progrediatur; ita ut tempus per AY sit in ratione subduplicata abscissae AX. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Vocetur abscissa horizontalis $AX = x$, applicata verticalis $XY = y$, positoque $\partial y = p\partial x$ erit curvae elementum $Yy = \partial x\sqrt{1 + pp}$, unde cum celeritas in Y sit $\sqrt{y}$, erit tempus descensus per arcum $AY = \int \frac{\partial x \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{y}}$ quod igitur ipsi $\sqrt{x}$ proportionale esse debet. Statuatur ergo

$$\int \frac{\partial x\sqrt{1 + pp}}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2nx}, \text{ eritque } \frac{\partial x\sqrt{1 + pp}}{\sqrt{y}} = \partial x \sqrt{\frac{2n}{x}},$$

unde deducitur $y = \frac{x(1 + pp)}{2n}$, quae ergo est aequatio pro ipsa curva quaesita.

§. 3. Differentiemus hanc aequationem, ut ob $\partial y = p\partial x$ calculum ad duas tantum variabiles x et p revocemus, fietque

$$2np\partial x = \partial x(1 + pp) + 2xp\partial p,$$

unde oritur haec aequatio separata : $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\,\partial p}{1 - 2np + pp}$, cujus de-
nominator, quando $n > 1$, duos factores simplices involvit, factaque
integratione pervenitur ad curvas ACZ tractu satis uniformi in infi-
nitum descendentes, ita ut nullum dubium superesse possit, quomodo
motus super hac curva conditioni praescriptae respondeat.

§. 4. At vero si $n < 1$ integratio nostrae aequationis invol-
vet arcus circulares atque ejusmodi curvas producit, quae mod
progredi modo regredi deprehenduntur, quod cum natura motus
quem desideramus, nullo plane modo consistere potest. Quia enim
talem curvam postulamus, super qua corpus ita descendat, ut ejus
motus secundum horizontem uniformiter acceleretur atque adeo ce-
leritas sit ut $\sqrt{x}$, nullo plane modo patet, quomodo curva modo
progrediens modo regrediens cum hac conditione consistere possit.

§. 5. Quod quo clarius appareat ipsam aequationem inte-
gratam consideremus, et cum sit

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\,\partial p + 2n\,\partial p}{1 - 2np + pp} - \frac{2n\partial p}{1 - 2np + pp},$$

partis prioris integrale est $-l(1 - 2np + pp)$, posterioris vero
integrale arcum circuli involvit, ad quem inveniendum, quia $n <$ 1
ponamus $n = \cos.\nu$ atque constat fore

$$\int \frac{\partial p}{1 - 2p\cos.\nu + pp} = \frac{1}{\sin.\nu}\,\text{A tag.}\,\frac{p\sin.\nu}{1 - p\cos.\nu}$$

sicque nostrum integrale erit

$$lx = l\,\frac{a}{1 - 2np + pp} - \frac{2}{\text{tag.}\,\nu}\,\text{A tag.}\,\frac{p\sin.\nu}{1 - p\cos.\nu};$$

ad quam aequationem magis evolvendam ponamus A tag. $\frac{p\sin.\nu}{1 - p\cos.\nu} = \Phi$
atque ad numeros adscendendo erit

$$x = \frac{a}{1 - 2np + pp}\,e^{-2\Phi\cot.\nu};\ \text{tum vero erit}$$

$$y = \frac{x(1 + pp)}{2\cos.\nu}.$$

§. 6. Quoniam igitur $\frac{p\sin.\nu}{1 - p\cos.\nu} = \text{tag.}\,\Phi$, erit

$$p = \frac{\text{tag}\,\Phi}{\sin.\nu + \cos.\nu\,\text{tag.}\,\Phi} = \frac{\sin.\Phi}{\sin.(\nu + \Phi)},$$

unde colligimus $1 + pp = \frac{\sin.\Phi^2 + \sin.(\nu+\Phi)^2}{\sin.(\nu+\Phi)^2}$, hincque

$$1 - 2p\cos.\nu + pp = \frac{\sin.\Phi^2 + \sin.(\nu+\Phi)^2 - 2\sin.\Phi\cos.\nu\sin.(\nu+\Phi)}{\sin.(\nu+\Phi)^2},$$

quae expressio satis complicata per notas angulorum reductiones reducetur ad hanc simplicissimam: $1 - 2p\cos.\nu + pp = \frac{\sin.\nu^2}{\sin.(\nu+\Phi)^2}$, unde pro binis coordinatis x et y sequentes formulas obtinemus:

$$x = \frac{a\sin.(\nu+\Phi)^2}{\sin.\nu^2}\, e^{-2\Phi\cot.\nu} \quad \text{et}$$

$$y = \frac{a(\sin.\Phi^2 + \sin.(\nu+\Phi)^2)}{2\cos.\nu\sin.\nu^2}\, e^{-2\Phi\cot.\nu}.$$

Hic non sine maxima admiratione videmus infinitis casibus abscissam evanescere, neque tamen negativam fieri posse. Quoties enim fuerit $\nu + \Phi = i\pi$, denotante i numerum quemcunque integrum sive positivum sive negativum, semper evadet $x = 0$. Quin etiam haec abscissa infinita recipit maxima, ubi scilicet fit $\frac{\partial x}{\partial\Phi} = 0$. Reperatur enim

$$\frac{\partial x}{\partial\Phi} = \frac{2a\sin.(\nu+\Phi)\cos.(\nu+\Phi) - 2a\cot.\nu\sin.(\nu+\Phi)^2}{\sin.\nu^2} \times e^{-2\Phi\cot.\nu}$$

sive etiam

$$\frac{\partial x}{\partial\Phi} = \frac{2a}{\sin.\nu^3}\sin.(\nu+\Phi)\left(\sin.\nu\cos.(\nu+\Phi) - \cos.\nu\sin.(\nu+\Phi)\right)e^{-2\Phi\cot.\nu}$$

quae expressio reducitur ad hanc formam simpliciorem:

$$\frac{\partial x}{\partial\Phi} = \frac{2a\sin.\Phi\sin.(\nu+\Phi)}{\sin.\nu^3}\, e^{-2\Phi\cot.\nu},$$

eaque non solum casibus quibus $\nu + \Phi = i\pi$, sed etiam quoties fit $\Phi = i\pi$, evanescit, in quibus ergo omnibus locis abscissa desinit vel crescere si antea crevit, vel decrescere si ante decreverat, id quod ideae, quam nobis de curva quaesita formavimus, aperte contradicit.

§. 7. Deinde etiam applicata y alternatim ascendere ac descendere deprehenditur, scilicet prouti $\frac{\partial y}{\partial\Phi}$ vel positivum vel negativum induet valorem. Cum enim sit $\partial y = p\partial x$, erit

$$\frac{\partial y}{\partial\Phi} = p\frac{\partial x}{\partial\Phi} = \frac{2a\sin.\Phi^2}{\sin.\nu^3}\, e^{-2\Phi\cot.\nu},$$

sicque y fiet maximum, vel minimum, quoties fuerit sin. $\Phi = 0$, si $\Phi = i\pi$, quibus casibus etiam abscissa x evadit maxima vel minim quae circumstantia paradoxon, quod explicare suscepimus, multo ma joribus difficultatibus involvit.

§. 8. Imprimis autem, quia in omnibus phaenomenis mecha nicis directio motus in contrariam plagam converti nequit, nisi u celeritas evanescit, in omnibus locis, ubi abscissa vel maximum v minimum valorem attigerit, celeritas evanescens statui deberet, cu tamen haec ipsa celeritas ubique sit ut $\sqrt{x}$. Hinc paradoxon illu adhuc multo magis intricatum redditur, neque ulla via patere vide tur, unde conciliatio nostri calculi cum motu vero corporis sperar posset.

§. 9. Quodsi autem singula momenta, quibus nostra soluti innititur, perpendamus; nulla ratio urget, ut motus continuus in produci statuatur; plus enim a solutione non postulatur, quam ut i omnibus locis celeritas sit ut radix quadrata ex abscissa, quae cu ex ipsa natura tam negative quam positive accipi queat, nihil impe dit quo minus celeritates quandoque fiant negativae et retrorsu vergant, unde concedi oportebit dari ejusmodi casus, ubi celerita in contrariam plagam convertitur, quod quia transitu per statu quietis fieri nequit, necessario statuere debemus, in his locis cele ritatem subito in contrariam plagam, quasi per reflexionem, immuta Atque in hoc ipso consistit enodatio omnium difficultatum, quib haec solutio perturbari videbatur.

§. 10. Nunc igitur facile perspicitur has reflexiones ibi con tingere debere, ubi curva subito in contrariam partem per cuspide revertitur, id quod in omnibus illis locis evenire debet, ubi angulu $\Phi = i\pi$, idque tam positive quam negative. Cum enim in his loci fiat $\frac{\partial y}{\partial \Phi} = 0$, ideoque tangens evadat horizontalis, vidimus ibide quoque fieri $\frac{\partial x}{\partial \Phi} = 0$, quo indicatur, curvam ibi per cuspidem qua

Quodsi enim angulum Φ tanquam infinite parvum spectemus, erit

$$\sin.(\nu+\Phi) = \sin.\nu\,(1+\tfrac{1}{2}\Phi\Phi) + \cos.\nu\,(\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3),$$

dum scilicet altiores potestates ipsius Φ negligimus. Quare si etiam cubum rejiciamus, erit

$$\sin.(\nu+\Phi) = \sin.\nu\,(1+\Phi\cot.\nu - \tfrac{1}{2}\Phi\Phi),$$

qua expressione ducta in

$$e^{-\Phi\cot.\nu} = 1 - \Phi\cot.\nu + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi\cot.\nu^2,$$

prodibit $\sin.(\nu+\Phi)\,e^{-\Phi\cot.\nu} = \sin.\nu\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{2\sin.\nu^2}\right)$, cujus expressionis quadratum ductum in $\frac{a}{\sin.\nu^2}$ dabit valorem ipsius

$$x = a\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{2\sin.\nu^2}\right)^2 = a\left(1 - \frac{\Phi\Phi}{\sin.\nu^2}\right).$$

Unde patet, sive Φ capiatur positive sive negative, utroque casu abscissam fieri minorem, ideoque curvam in hoc loco cuspidem habere debere.

§. 11. Hoc etiam magis confirmatur, si radium osculi curvae, qui est $-\frac{\partial x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$, contemplemur, cujus valorem ex aequatione principali $\partial x = \frac{-2p\partial p}{1-2np+pp}$ facile determinabimus. Hinc enim statim deducimus $-\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{2px}{1-2np+pp}$, unde radius osculi in quovis puncto y erit $\frac{2px(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{1-2np+pp}$. Jam quia invenimus $p = \frac{\sin.\nu}{\sin.(\nu+\Phi)}$, in loco proposito, ubi $\Phi = 0$, erit quoque $p = 0$, ideoque radius osculi evanescit. Constat autem cuspides locum habere non posse, nisi ubi radius osculi evanescit vel in infinitum excrescit. Haecque est causa cur abscissae curvae inventae modo crescant, modo decrescant, ideoque etiam ipse motus modo sit directus, modo retrogradus, celeritate tamen semper manente ipsi $\pm\sqrt{x}$ proportionali.

§. 12. Quod autem hic ostendimus de casu ubi $\Phi = 0$, idem quoque valet de omnibus casibus quibus $\Phi = \pm i\pi$; propterea quod sin. $(\nu + \Phi)^2$ non mutatur. At factor exponentialis, lo Φ posito $\pm i\pi + \Phi$, abit in $e^{\mp i\pi \cot. \nu} \times e^{-2\Phi \cot. \nu}$; ideoque praecedentem rationem tenet constantem, consequenter eadem pha nomena hinc resultare debent, quae pro casu $\Phi = 0$ exposuimu

§. 13. Quin etiam hic plurimum notasse juvabit, si in ge nere loco Φ scribamus $\pi + \Phi$, curvam prodituram esse priori pe fecte similem. Si enim coordinatas pro angulo $\pi + \Phi$ designem per x' et y', reperiemus $x' = \frac{a e^{-2\pi \cot \nu}}{\sin. \nu^2}$ sin. $(\nu + \Phi)^2$ $e^{-2\Phi \cot}$

tum vero $y' = \frac{a e^{-2\pi \cot \nu}}{2 \cos. \nu \sin. \nu^2} (\sin. \Phi^2 + \sin. (\nu + \Phi)^2)$ $e^{-2\Phi \cot. \nu}$, sic

que erit $x : x' = e^{2\pi \cot. \nu} : 1$, eodemque modo etiam erit

$$y : y' = e^{2\pi \cot. \nu} : 1,$$

quae ratio cum utrinque sit eadem, evidens est, portionem curva ex angulo $\pi + \Phi$ oriundam perfecte similem fore portioni angu Φ respondenti. Quocirca ad figuram totius curvae cognoscenda sufficiet unam tantum ejus portionem, ex intervallo ab angulo Φ a $\pi + \Phi$ ortam, determinasse, quippe cui sequentes omnes, interval a $\pi + \Phi$ ad $2\pi + \Phi$, item a $2\pi + \Phi$ ad $3\pi + \Phi$; &c. res pondentes, nec non praecedentes, intervallis a Φ ad $-\pi + \Phi$ hincque ad $-2\pi + \Phi$ et ita porro respondentes, erunt simile Semper enim cujusvis portionis ratio ad sequentem erit ut $e^{2\pi \cot. \nu}$:

§. 14. Dum igitur a portione prima, hoc est ab angu $\Phi = 0$ ad $\Phi = \pi$, ad sequentem portionem, hoc est a $\Phi = \pi$ a $\Phi = 2\pi$ progredimur, mensurae coordinatarum x et y decresc in ratione $e^{2\pi \cot. \nu}$, unde haec portio tanto propius ad initium admovetur. Hinc si simili modo ulterius progrediamur, sequent portiones in eadem ratione continuo imminuentur et tandem in ip puncto A terminabuntur. Hoc scilicet modo corpus motu contrar ascendet et postquam infinitas portiones confecerit, tandem in ipsu punctum A perveniet. Manifestum enim est, corpus simili modo ascendere posse quo id in problemate descendere assumsimus.

§. 15. Quanquam autem demum percursis infinitis portionibus usque ad A pertingit, tamen totus hic motus tempore finito absolvetur. Si enim ponamus tempus per primam portionem $= T$ et brevitatis gratia statuamus $e^{\pi \cot. \nu} = m$, quia in sequente portione tam abscissae quam applicatae in ratione $1 : mm$ decrescunt, tempora autem rationem subduplicatam abscissarum sequuntur, tempus per sequentem portionem erit $\frac{1}{m} T$, unde tempus per omnes sequentes portiones erit

$$T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \text{etc.}\right) = \frac{T}{m - 1}.$$

Posito autem $e^{\pi \cot. \nu} = m$ erit $\cot. \nu = \frac{lm}{\pi}$, et quia statuimus $\cos. \nu = n$ erit $\cot. \nu = \frac{n}{\sqrt{1 - nn}}$, unde ex dato n vicissim erit $lm = \frac{\pi n}{\sqrt{1 - nn}}$. Interea autem corpus in hoc motu suo ascensus infinitas reflexiones passum esse necesse est.

§. 16. Ut autem nostras formulas ad motum descensus accommodemus, loco Φ scribamus $-\Phi$, atque pro coordinatis habebimus $x = \frac{a \sin. (\Phi - \nu)^2}{\sin. \nu^2} e^{2 \Phi \cot. \nu}$ et $y = \frac{a (\sin. \Phi^2 + \sin. (\Phi - \nu)^2}{2 \cos. \nu \sin. \nu^2} e^{2 \Phi \cot. \nu}$ ac praeterea $p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin. \Phi}{\sin. (\Phi - \nu)}$. Hinc jam unam portionem descensus definiamus a $\Phi = 0$ ad $\Phi = \pi$, ac pro locis hujus portionis principalibus reperiemus ut sequens tabella ostendit:

$\Phi = 0$	ν	$\frac{\pi}{2}$	π
$x = a$	0	$a \cot. \nu^2 e^{\pi \cot. \nu}$	$a e^{2 \pi \cot. \nu}$
$y = \frac{a}{2 \cos. \nu}$	$\frac{a}{2 \cos. \nu} e^{2 \nu \cot. \nu}$	$\frac{a (1 + \cos. \nu^2)}{2 \cos. \nu \sin. \nu^2} e^{\pi \cot. \nu}$	$\frac{a}{2 \cos. \nu} e^{2 \pi \cot. \nu}$
$p = 0$	∞	$\frac{1}{\cos. \nu}$	$0.$

§. 17. Quod si nunc formam nostrae curvae delineare velimus, ejus figura erit propemodum uti Fig. 2. exhibet, ubi scilicet Tab. I. Fig. 2.

erit $AF = a$, $FG = \frac{a}{2\cos.\nu}$. Deinde, ubi curva primam verticale[m] AB tangit, erit $AH = \frac{a}{2\cos.\nu} e^{2\nu \cot.\nu}$. Denique pro altero termi[no] hujus portionis G' erit $AF' = ae^{2\pi \cot.\nu}$ et $F'G' = \frac{a}{2\cos.\nu} e^{2\pi \cot[.\nu]}$ ubi scilicet G erit initium hujus portionis, G' vero ejus finis, a q[uo] nimirum nova portio multo amplior, sed huic similis, incipiet. [In] utroque autem termino G et G' dabitur cuspis cum tangente ho[ri]zontali, ita ut in utroque radius osculi evanescat. Praeterea ve[ro] cum sit $AF : FG = 2\cos.\nu : 1$, patet omnia puncta G in rectam [ex] A eductam incidere.

§. 18. Consideremus nunc etiam tempus, quo corpus tota[m] hanc portionem GHG' percurrit, et quia in dissertatione: *De pr[o]blemate curvarum synchronarum* &c. (Mém. Tome IX. pag. 2[..] §. 20.) tempus per quamvis abscissam x assumsimus $= 2\sqrt{2n[x]}$ erit tempus per arcum $GH = 2\sqrt{2na}$, existente $n = \cos.\nu$; t[um] vero tempus per arcum HG', pro quo abscissa est AF', e[rit] $2\sqrt{2a}\cos.\nu \times e^{\pi\cot.\nu}$, sicque totum tempus per hanc portionem e[rit] $2\sqrt{2a}\cos.\nu \times (1 + e^{\pi\cot.\nu})$, quod tempus si vocetur $= T$, e[rit] tempus per similem portionem sequentem $= Te^{\pi\cot.\nu}$; at vero te[m]pus per portionem praecedentem $= Te^{-\pi\cot.\nu}$.

§. 19. Cum igitur nunc omnia dubia contra hunc mot[um] perfecte sint diluta, unic[us] adhuc superest casus accuratius evolve[n]dus, quo $n = 1$ ideoque angulus $\nu = 0$. Mox enim videbimus d[e]scriptionem curvae ibi datam insigni correctione indigere. Facilli[me] autem hunc casum ex praesentibus formulis derivare poterimus, spe[c]tando scilicet ν ut infinite parvum, quo facto fit $\cos.\nu = 1$ et $\cot.\nu = [\frac{1}{\nu}]$ et quia nunc formula exponentialis evadit $e^{\frac{a\Phi}{\nu}}$, manifestum est angul[um] Φ etiam infinite parvum esse debere. Ponamu[s] ergo $\frac{\Phi}{\nu} = [\omega]$ sive $\Phi = \nu\omega$, eritque $\sin.\Phi = \sin.\nu\omega = \nu\omega$, similique modo

$$\sin.(\Phi - \nu) = \sin.\nu(\omega - 1) = \nu(\omega - 1),$$

unde coordinatae pro curva erunt:

$$x = a(\omega - 1)^2 e^{2\omega} \text{ et } y = \frac{a(\omega^2 + (\omega - 1))^2}{2} e^{2\omega}.$$

§. 20. Ponamus nunc $\omega - 1 = q$ atque, si loco a scribamus $\frac{a}{ee}$, pro x et y obtinebimus formulas in Dissertatione illa inventas, scilicet

$$x = aqqe^{2q} \text{ et } y = \frac{a(1 + 2q + 2qq)}{2} e^{2q}.$$

Hinc intelligitur ambas coordinatas x et y evanescere non posse, nisi sit $q = -\infty$, unde ergo nobis initium erit repetendum, a quo autem curva satis aequaliter progredietur usque ad locum, ubi erit tangens horizontalis, sive $\frac{\partial y}{\partial q} = 0$, unde deducimur ad hanc aequationem $qq + 2q + 1 = 0$, unde fit $q = -1$, quo ergo loco erit $x = \frac{a}{ee}$ et $y = \frac{a}{2ee}$. Quaeramus nunc locum ubi $\frac{\partial x}{\partial q} = 0$, quod etiam eveniet si $q = -1$. Hinc concludere debemus in hoc loco dari cuspidem, unde curva retro inflectetur atque adeo usque ad primam verticalem AC pertinget, ubi $q = 0$, ibi vero erit $y = \frac{a}{2}$. Hinc autem, quia protinus nullae amplius cuspides locum inveniunt, curva in infinitum tractu satis uniformi descendet.

§. 21. Forma igitur hujus curvae ita erit comparata, uti figura monstrat. Scilicet ex A descendendo egredietur usque in G, ubi erit $AF = \frac{a}{ee}$ et $FG = \frac{a}{2ee}$. Hinc autem corpus subito reflectetur usque ad punctum H in prima verticali AC, ubi $AH = \frac{a}{2}$. Curva igitur hanc rectam in puncto H tanget, hinc vero tractu satis aequali per I in infinitum descendet, ideoque curva longe aliter se habet atque in dissertatione citata eram suspicatus, cum initium in H consumsissem hincque per G ascendere, indeque porro descendere fecissem. Curva igitur nostra tantum duas portiones AG et GHI habere est censenda, quarum altera ad alteram tenet rationem adeo infinitam, quae est caussa, cur hoc casu subito unica tantum cuspis locum habere queat. Tab. I. Fig. 3.